Groupe de Travail

Flot de Ricci, papiers de Perelman

Exemples, formation des singularités.
19 février 2004

1 Exemples

On considère le flot de Ricci sur des variétés M^n non nécessairement compactes.

$$\frac{d}{dt}g(t) = -2Ric_{g(t)} \tag{1}$$

1.1 Solutions d'Einstein

On suppose que M^n admet une métrique g_0 d'Einstein, i.e. satisfaisant

$$Ric_{g_0} = k(n-1)g_0$$

où k est constant (si $n \geq 3$, c'est une conséquence de l'égalité). On cherche la solution de (1) sous la forme $g(t) = a(t)g_0$. En utilisant l'invariance de Ric_g par dilatation de g on trouve:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}g(t) &= a'(t)g_0 \\ &= -2Ric_{a(t)g_0} \\ &= -2Ric_{g_0} \\ &= -2k(n-1)g_0\end{aligned}$$

d'où $a(t) = 1 - 2k(n-1)t$. La contrainte $a(t) > 0$ implique

<u>si $k > 0$:</u> $g(t)$ est définie pour $t \in]-\infty, \frac{1}{2k(n-1)}[$ et est de la forme $g(t) = 2k(n-1)(T-t)$ avec $T = \frac{1}{2k(n-1)}[$. C'est un soliton contractant. La courbure tend vers 0 en $-\infty$ et explose vers $+\infty$ en T. Une solution du flot définie sur un intervalle $]-\infty, T[$ est dite antique.

<u>si $k = 0$:</u> $g(t) = g$ est définie pour $t \in]-\infty, +\infty[$. C'est un soliton stable. Une solution définie sur $]-\infty, +\infty[$ est dite éternelle.

<u>si $k < 0$:</u> $g(t)$ est définie pour $t \in]T, +\infty[$ et est de la forme $g_t = -2k(n-1)(-T+t)$ avec $T = \frac{1}{2k(n-1)}$. C'est un soliton dilatant. La courbure explose vers $-\infty$ en T et tend vers 0 en $+\infty$.

1.2 Cylindres

On considère la variété $M^n \times \mathbb{R}$, où M^n admet une solution d'Einstein $g(t)$. Alors $g(t) + dx^2$ est une solution sur $M^n \times \mathbb{R}$.

1.3 Le cigar soliton

On considère $\mathbb{R}^2$, muni de la métrique

$$g(0) = \frac{dx^2 + dy^2}{1 + x^2 + y^2} = \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{1 + r^2} = ds^2 + th^2(s) d\theta^2$$

où $s = Argsh(r)$ est la distance pour $g(0)$ de l'origine au cercle euclidien de rayon r. Le cigar est asymptote en $+\infty$ au cylindre euclidien $\mathbb{R} \times S^1$. La courbure est donnée par

$$Ric_{g(0)} = \frac{2}{1 + r^2} g(0) = \frac{2}{ch^2(s)} g(0) \tag{2}$$

On définit $g(t) = \varphi_t^* g(0)$ où φ_t est le difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\varphi_t(x, y) = e^{-2t}(x, y)$$

$g(t)$ est défini sur $]-\infty, \infty[$. On peut vérifier (calcul) que pour $V = \frac{d}{dt}_{t=0} \varphi_t = -2x \frac{\partial}{\partial x} - 2y \frac{\partial}{\partial y}$, on a

$$L_V g = -2Ric_g$$

Donc

$$\frac{d}{dt}_{|t_0} \varphi_t^* g(0) = \varphi_{t_0}^* \frac{d}{ds}_{|s=0} \varphi_s^* g(0) = \varphi_{t_0}^* (L_V g) = \varphi_{t_0}^* (-2Ric_{g(0)}) = -2Ric_{\varphi_{t_0}^* g(0)}$$

C'est un soliton de Ricci stable. C'est même un soliton de type gradient,i.e,

$$V = \nabla^g f$$

avec $f = -\frac{1}{2} \ln(1 + x^2 + y^2)$. Cette fonction donne le facteur conforme de $g(0)$ par rapport à $dx^2 + dy^2$:

$$g(0) = \frac{dx^2 + dy^2}{1 + x^2 + y^2} = e^{2f}(dx^2 + dy^2)$$

1.4 La solution de Rosenau

Sur $\mathbb{R} \times S^1$, il existe une solution définie sur $]-\infty, 0[$:

$$g(t) = \frac{sh(-t)}{ch(x) + ch(t)} (dx^2 + d\theta^2)$$

On a

$$Ric_{g(t)} = \frac{1}{sh(-t)} \frac{1 + ch(x)ch(t)}{ch(x) + ch(t)} g(t)$$

Comme $\frac{1+ch(x)ch(t)}{ch(x)+ch(t)} \in [1, ch(t)]$, la métrique diverge en 0 en devenant sphérique.

1.5 La solution de Bryant

C'est une solution sur $\mathbb{R}^3$

- obtenue comme solution d'EDP.
- à courbure > 0 décroissant linéairement avec la distance à l'origine.
- rotationnellement symétrique.
- attendue comme limite d'un "degenerate neck pinch".

2 Formation des singularités en temps fini

Dans cette partie, on fait un survol des travaux d'Hamilton concernant la formation des singularités.

2.1 Existence en temps maximal

Thèorème 2.1 (Hamilton, 1995). *Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte. Il existe $T > 0$ tel que $g(t)$ existe sur $[0, T[$, $g(0) = g$ et*

- *Soit $T = \infty$.*
- *Soit $T < \infty$ et $m(t) := \max_{x \in M} |Rm(x,t)| \underset{t \to T}{\longrightarrow} \infty$.*

C'est le même argument que pour les courbes. Tant que la courbure reste bornée, l'équation du flot permet de controler les dérivées de la courbure et la géométrie. Le passage à la limite donne une métrique lisse et on applique l'existence en temps petit. En fait, on a un certain controle sur la vitesse de divergence:

Lemme 2.2. *Il existe une constante $C(n) > 0$ telle que pour toute (M^n, g) compacte, $g(t)$ existe sur $[0, \frac{C(n)}{m(0)} := T_0[$ et*

$$m(t) \leq \frac{C(n)}{(T_0 - t)}$$

Preuve: Le tenseur de Riemann satisfait l'EDP (Hamilton ch.7)

$$\frac{d}{dt}|Rm(t)|^2 \leq \Delta |Rm(t)|^2 + C|Rm(t)|^3$$

pour une constante $C > 0$. On a un pricipe du maximum pour les équations de la forme

$$\frac{d}{dt} v(x,t) \leq \Delta v + F(v)$$

Si $\varphi(t)$ satisfait

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\varphi(t) = F(\varphi) \\ \varphi(0) = C' \geq |v(x,0)| \end{cases}$$

alors

$$\varphi(t) \geq v(x,t)$$

tant qu'il y a existence. On applique cela à $v = |Rm(x,t)|^2$ et $F(v) = Cv^{3/2}$. On résoud $\frac{\varphi'}{\varphi^{3/2}} = C$ entre 0 et t avec condition initiale $\varphi(0) = m(0)^2$. On trouve

$$\sqrt{\varphi(t)} = \frac{\sqrt{\varphi(0)}}{1 - \frac{C\varphi(0)}{2}t}$$

d'où

$$m(t) \leq \frac{m(0)}{1 - \frac{Cm(0)}{2}t} \qquad \square$$

2.2 Suites de dilatations

On suppose que $T < \infty$. On veut comprendre la géométrie de la variété en des points où la courbure va diverger. Pour cela Hamilton considère des suites de renormalisations de la métrique, en des points de courbure presque maximale. Soit $0 < C < 1$ une constante. Soit une suite $t_i \to T$ telle que $m(t_i) \to \infty$ et $m(t) \leq m(t_i)$ pour $0 \leq t \leq t_i$. Soit une suite de points $x_i \in M$ tel que

$$Q_i := |R_m(x_i, t_i)| \geq C.m(t_i)$$

On définit

$$\tilde{g}_i(t) := Q_i g(t_i + \frac{t}{Q_i})$$

C'est une solution du flot de Ricci sur

$$[-t_i Q_i, (T - t_i)Q_i[$$

La courbure maximale $\tilde{m}_i(t)$ de $\tilde{g}_i(t)$ satisfait

$$\tilde{m}_i(t) \leq \frac{1}{C}$$

sur $]-t_iQ_i, 0]$. Faisons l'hypothèse que l'on dispose d'un "Injectivity Radius Estimate", i.e. qu'il existe une constante $c_0 > 0$ telle que

$$m(t)\rho^2(t) \geq c_0$$

où $\rho(t)$ est le rayon d'injectivité de $(M, g(t))$. Dans un certain nombre de cas, Hamilton sait obtenir cet IRE. Comme cette condition est invariante par dilatation, chaque $\tilde{g}_i$ la satisfait. On peut alors appliquer le théorème de compacité suivant:

Thèorème 2.3. *Soit (M_k^n, g_k, x_k) une suite de solutions complètes du flot de Ricci. On suppose que*

1. *$g_k(t)$ satisfait sur $a < t < b$:*
$$m_k(t) \leq C$$

2. *Le rayon d'injectivité en x_k au temps $t = 0 \in]a, b[$ vérifie*
$$\rho_k(x_k, 0) \geq C' > 0$$

Alors il existe une sous-suite qui converge vers une solution complète $(M_\infty, g_\infty, x_\infty)$ du flot de Ricci sur $]a, b[$.

C'est à dire qu'il existe une suite d'ouverts $U_k \subset M_\infty$, contenant x_∞ et tel que tout compact de M_∞ est dans U_k pour tout k assez grand, et une suite de difféomorphismes

$$F_k : U_k \longrightarrow V_k \subset M_k$$

tel que $F_k(x_\infty) = x_k$ et $F_k^* g_k$ converge vers g_∞.

En appliquant cela à $\tilde{g}_i$, on obtient une limite (N, g_∞, x_∞) complète, antique, c'est à dire définie sur $] - \infty, t_\infty[$. En dimension 3, Hamilton obtient la classification suivante:

Thèorème 2.4 (Hamilton 1995, ch. 26). *Soit M^3 une variété compacte et $g(t)$ une solution du flot de Ricci sur $[0, T)$, $T < \infty$. On suppose que $g(t)$ satisfait l'IRE. Alors il existe une suite de dilatations qui converge vers une solution complète antique du flot de Ricci qui est un quotient fini par isométrie de S^3, de $S^2 \times \mathbb{R}$ ou de $\Sigma^2 \times \mathbb{R}$.*

Dans un certain nombre de cas, Hamilton peut se passer de l'hypothèse IRE.

Conjecture: $\Sigma^2 \times \mathbb{R}$ n'apparait pas.

Cette conjecture est résolue par Perelman dans le corollaire 4.2.