

Mathématiques MAT 432
Analyse de Fourier et théorie spectrale

Feuille d'exercices numéro 5 - octobre 2004
Applications de l'analyse de Fourier et de la convolution

Exercice 1. On note $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, l'espace des fonctions u de classe C^∞ sur \mathbb{R}^N telle que u et toutes ses dérivées partielles tendent vers 0 à l'infini plus vite que toutes les fonctions $(1+|x|)^{-k}$ avec $k > 0$. On rappelle que la transformation de Fourier induit une bijection de l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ sur lui-même. On cherche à déterminer toutes les solutions u dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ de l'équation

$$\Delta u + \sum_{j=1}^N x_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + N u = 0.$$

Pour cela, supposer que u est solution et poser $v(\xi) := e^{\frac{|\xi|^2}{2}} \hat{u}(\xi)$. Calculer $\sum_{j=1}^N \xi_j \frac{\partial v}{\partial \xi_j}$ et conclure.

Exercice 2. On garde les notations de l'exercice 1. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

a) Montrer que l'équation $\frac{\partial u}{\partial x_1} - u = f$ admet une unique solution u dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

b) Montrer que pour $\lambda > 0$ l'équation $\Delta u - \lambda u = f$ admet une unique solution u dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

c) Que dire de l'équation $\frac{\partial u}{\partial x_1} - i u = f$?

Exercice 3. On considère l'équation différentielle (sur \mathbb{R}^3)

$$(E) \quad (\Delta - \lambda)u = f,$$

où f est de classe C^4 , toutes les dérivées de f jusqu'à l'ordre 4 étant intégrables. On cherche u solution de (E) de classe C^2 , avec des dérivées jusqu'à l'ordre 2 intégrables. En étudiant le comportement de $\hat{f}(\xi)$ lorsque $|\xi| \rightarrow +\infty$, montrer que la fonction $u = -(2\pi)^{-3} \overline{\mathcal{F}}\left(\frac{\hat{f}}{|\xi|^2 + \lambda}\right)$ est de classe C^2 et vérifie l'équation.

Exercice 4. Soit f une fonction de classe C^2 et à support compact sur \mathbb{R}^3 . On veut déterminer les solutions u de classe C^2 et tendant vers 0 à l'infini de l'équation $\Delta u = f$. L'existence de u est montrée dans cet exercice et l'unicité dans l'exercice suivant. On pose $u(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|} f(y) dy$

a) Montrer que u est de classe C^2 .

b) Soient $\varepsilon > 0$ et g_ε définie par $\forall x \in \mathbb{R}^3, g_\varepsilon(x) = G_\varepsilon(|x|)$, où G_ε est définie par $G_\varepsilon(r) = 1/r$ pour $r \geq \varepsilon$ et $G_\varepsilon(r) = a_\varepsilon r^3 + b_\varepsilon r^2 + c_\varepsilon$ pour $0 \leq r < \varepsilon$,

les coefficients a_ε , b_ε et c_ε étant choisis de sorte que G_ε est de classe C^2 sur \mathbb{R}_+ .
Calculer ces coefficients.

c) Calculer $\Delta g_\varepsilon(x)$.

d) Montrer que $\Delta u(x) = f(x)$.

Indication: montrer

$$\Delta u(x) = -\frac{1}{4\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^3} g_\varepsilon(x-y) \Delta f(y) dy = -\frac{1}{4\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^3} \Delta g_\varepsilon(x-y) f(y) dy.$$

e) Montrer que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0$.

Exercice 5. Soit v une fonction de classe C^2 sur \mathbb{R}^N tendant vers 0 à l'infini et telle que $\Delta v = 0$. On veut montrer que $v = 0$. Soient $\varepsilon > 0$ et $R > 0$.

a) Montrer que la fonction $v_\varepsilon(x) := v(x) + \varepsilon|x|^2$ n'a pas de maximum local.

b) En déduire que, pour tout $R > 0$, on a $\sup_{|x| \leq R} v_\varepsilon(x) = \sup_{|x|=R} v_\varepsilon(x)$

c) En déduire que $\sup_{|x| \leq R} v(x) = \sup_{|x|=R} v(x)$.

d) Conclure.

Exercice 6. Soit u_0 une fonction continue bornée sur \mathbb{R}^N . On note u la fonction sur $]0, \infty[\times \mathbb{R}^N$ donnée par $u(t, x) := (4\pi t)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-|x-y|^2/4t} u_0(y) dy$.

a) Montrer que u est de classe C^∞ .

b) Montrer que u est solution de l'équation de la chaleur $(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta)u = 0$.

c) Montrer que u satisfait les conditions initiales $\lim_{t \rightarrow 0} u(t, x) = u_0(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$.

d) Si $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$, montrer que $u_0 = \lim_{t \rightarrow 0^+} u(t)$, la limite étant prise dans L^1 .

e) Calculer $u(t)$ lorsque $u_0(x) = e^{-(x-c)^2/\gamma}$, $c, \gamma > 0$.

Exercice 7. Exercice 7.3.5 du cours.

Exercice 8. On veut résoudre l'équation des ondes :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) f(t, x) = 0.$$

On cherche les solutions $f \in C^2$ qui satisfont aux conditions initiales

$$\begin{aligned} f(0, x) &= u(x) \\ \frac{\partial f}{\partial t}(0, x) &= v(x) \end{aligned}$$

avec $u \in C^2, v \in C^1$ et u et v à support compact.

a) En prenant comme nouvelles variables $y = x + t, z = x - t$, montrer que l'on a

$$f(t, x) = \varphi_1(t+x) + \varphi_2(x-t)$$

où φ_1, φ_2 sont deux fonctions C^2 .

b) En écrivant les conditions initiales, montrer que si u est à support compact et $v = 0$, on obtient une solution de la forme $f(t, x) = \varphi(x+t) + \varphi(x-t)$ où φ est à support compact.

c) Retrouver ce résultat (voir 7.3.6 du cours) en utilisant la transformation de Fourier et en résolvant explicitement (voir la notation \tilde{f} dans le Chapitre 7 du cours)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \xi^2\right) \tilde{f}(t, \xi) = 0.$$

d) Si $u = 0$ et $v \neq 0$, montrer que

$$\tilde{f}(t, \xi) = \frac{\hat{v}(\xi)}{|\xi|} \sin |\xi|t.$$

En déduire que $f(t, x)$ est donnée pour $t > 0$ par le produit de convolution

$$\frac{1}{2}(\mathbf{1}_{[-t, t]^*} * v)(x).$$

Cette fonction est-elle à support compact en x ? Montrer que si $\int_{-\infty}^{+\infty} v(x) dx = 0$ on a $f(t, x) = 0$ si $|x - t| > R$ ou $|x + t| > R$, en supposant le support de v contenu dans $[-R, R]$. (Phénomène de propagation : le cas de la dimension 3 est traité dans la remarque 7.3.7 du cours).

Exercice 9. Soit Γ un réseau de \mathbb{R}^3 , Γ^* le réseau dual, C_Γ^0 l'espace des fonctions sur \mathbb{R}^3 continues et Γ -périodiques, C_Γ^2 et C_Γ^∞ le sous-espace formé des fonctions de classe C^2 et C^∞ respectivement. Pour f dans C_Γ^0 , on note $(c_k(f))_{k \in \Gamma^*}$ les coefficients de Fourier de f .

a) Montrer que f est dans C_Γ^∞ si et seulement si on a $\forall r \geq 1 \exists C > 0 \forall k \in \Gamma^* |c_k(f)| \leq C(1 + |k|)^{-r}$.

b) Montrer que les constantes sont les seules solutions u dans C_Γ^2 de l'équation $\Delta u = 0$.

c) Soit f dans C_Γ^∞ . Montrer que l'équation $\Delta u = f$ admet des solutions u dans C_Γ^2 si et seulement si f est de moyenne nulle (i.e. $c_0(f) = 0$). Montrer qu'alors ces solutions sont de classe C^∞ .

Exercice 10. On garde les notations de l'exercice 9. Soient f et g dans C_Γ^∞ . Montrer qu'il existe une unique fonction $(t, x) \rightarrow u_t(x)$ de classe C^2 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ telle que

i) $\forall t \in \mathbb{R}, u_t \in C_\Gamma^2$,

ii) $(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta)u = 0$,

iii) $u_t|_{t=0} = f, \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = g$.

Montrer que cette fonction u est de classe C^∞ .

Exercice 11. Soit f une fonction sur \mathbb{R}^2 , C^∞ , périodique de période \mathbb{Z}^2 . On écrit son développement de Fourier :

$$f(x, y) = \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} a_{mn} e^{2i\pi(mx + ny)}$$

a) Que peut-on dire des coefficients a_{mn} ? (Exercice 9)

b) On suppose que f vérifie l'équation différentielle:

$$(E) \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \alpha \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

En déduire une relation sur les coefficients de Fourier de f .

c) Si α est irrationnel, montrer que f est *constante*.

d) Soit $\gamma(t) = (t, \alpha t) (t \in \mathbb{R})$. Si f vérifie (E), vérifier que f est constante sur la courbe γ . Si α est irrationnel montrer que $D + \mathbb{Z}^2$ est dense dans \mathbb{R}^2 (D étant la droite image de γ) et en déduire une autre démonstration de c).