Mathématiques MAT 432
Analyse de Fourier et théorie spectrale

Feuille d'exercices numéro 4 - 23 septembre 2002
Transformation de Fourier et convolution

Convolution et transformation de Fourier dans L^1_{loc} et dans L^1

Exercice 1. Soit α et β deux nombres réels. Montrer l'existence et calculer la convolée $(e^{\alpha x}\mathbf{1}_{[0,\infty[}(x)) \star (e^{\beta x}\mathbf{1}_{[0,\infty[}(x))$

Exercice 2. Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de classe C^1 bornées et de dérivées bornées. On suppose que f et g' sont dans $L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $f \star g$ est bien définie et qu'elle est de classe C^2.

Exercice 3. Montrer que la convolée de deux fonctions radiales de $L^1(\mathbb{R}^N)$ est encore radiale.

Exercice 4. En utilisant la transformée de Fourier, montrer qu'il n'y a pas d'unité pour le produit de convolution dans $L^1(\mathbb{R}^N)$.

Exercice 5. Soient $a, b > 0$. Soit $h_a(x) = \frac{2a}{x^2+a^2}$. En utilisant le calcul de $\mathcal{F}(h_a)$, calculer la convolée $h_a \star h_b$ et la transformée de Fourier $\mathcal{F}(h_a h_b)$.

Exercice 6. Pour $a > 0$, on note $f_a(x) = e^{-x}x^{a-1}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x)$.
a) Montrer que, pour $a > 0$, f_a est dans $L^1(\mathbb{R})$.
b)On pose $\Gamma(a) = \|f_a\|_1$ et $g_a = \Gamma(a)^{-1} f_a$. Calculer $\widehat{g}_1$.
c) Pour $a > 0$ et $b > 0$, on note $B(a,b) = \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}du$. Démontrer la relation $g_a \star g_b = \frac{B(a,b)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} g_{a+b}$.
Retrouver la formule des compléments $B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ et en déduire $g_a \star g_b = g_{a+b}$.
d) Calculer $\widehat{g}_a$ pour $a > 0$ (*Indication : on commencera par le cas où a est rationnel.*)

Exercice 7. Espace de Schwartz et formule sommatoire de Poisson

L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}$ est l'espace des fonctions f (dites à décroissance rapide) de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout n et p entiers positifs, l'on ait $x^n f^{(p)}(x)$ tend vers 0 lorsque $\mid x \mid$ tend vers $+\infty$.
a) Montrer que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par dérivation et par multiplication par une fonction polynomiale,
b) Montrer que $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ et que la transformation de Fourier est une bijection de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans lui-même;
c) Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x + 2k\pi)$ est convergente et que sa somme $\theta(x)$ est une fonction de classe C^∞ et 2π périodique.
Démontrer la formule de Poisson

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(2k\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)$$

Transformation de Fourier dans L^2

Exercice 8. Calculer les transformées de Fourier des fonctions de $L^2(\mathbb{R})$:

$$x^{-1}\sin x \qquad \text{et} \qquad (x+i)^{-1}\ .$$

Exercice 9. Montrer que la transformée de Fourier de la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$ n'est pas dans $L^1(\mathbb{R}) + L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 10. Soit $(x,y) \to f(x,y)$ une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, c'est à dire une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ telle que f et toutes ses dérivées tendent vers 0 à l'infini plus vite que toutes les fonctions $(1+x^2+y^2)^{-k}$ avec $k>0$. Montrer l'inégalité: $2\left\|\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f\right\|_2 \leq \left\|\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f\right\|_2$.

Exercice 11. Soit f une fonction de $L^2(\mathbb{R}^N)$. On note, pour tout x dans $\mathbb{R}^N$, f_x la fonction translatée : $y \to f_x(y) := f(y-x)$. Montrer que l'espace vectoriel $V := \mathrm{Vect}(\{f_x \ / \ x \in \mathbb{R}^N\})$ engendré par les translatées de f est dense dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ si et seulement si l'ensemble $\{\xi \in \mathbb{R}^N \ / \ \widehat{f}(\xi) = 0\}$ est de mesure nulle.
Indication: étudier l'orthogonal dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ de $\mathcal{F}(V)$.

Convolution dans L^2

Exercice 12. On veut étendre la formule $\mathcal{F}(fg) = (2\pi)^{-N}\widehat{f} \star \widehat{g}$ pour f,g dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ avec $\widehat{f}$, $\widehat{g}$ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ au cas où f,g sont dans $L^2(\mathbb{R}^N)$.
1) Soit $V = \{f \in L^1(\mathbb{R}^N) \ / \ \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^N)\}$. Montrer que V est inclus dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ et que V est dense dans $L^2(\mathbb{R}^N)$.
2) En déduire l'égalité $\mathcal{F}(fg) = (2\pi)^{-N}\widehat{f} \star \widehat{g}$ pour f,g dans $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Exercice 13. Résoudre dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ puis dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, l'équation $u \star u = u$.

Exercice 14. Soient A, B deux parties de $\mathbb{R}^N$ de mesure non nulle. Montrer que l'ensemble $A+B := \{a+b \ / \ a \in A, b \in B\}$ contient un ouvert non vide de $\mathbb{R}^N$.
Indication : On supposera que les mesures de A et B sont finies et on montrera que la fonction $\mathbf{1}_A \star \mathbf{1}_B$ est continue.

Exercice 15. Pour tout f dans $L^2(\mathbb{R})$, on note $Pf(x) = \pi^{-1}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x-y)\frac{\sin y}{y}dy$.
a) Montrer que la fonction Pf est bien définie et est continue.
b) Montrer, à l'aide des exercices 8 et 12, que Pf est dans $L^2(\mathbb{R})$ et calculer, pour g dans $L^2(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}^{-1} \circ P \circ \mathcal{F}(g)$.
c) En déduire que Pf est de classe C^∞, que $\|Pf\|_2 \leq \|f\|_2$ et que $P \circ P = P$.