# Mathématiques MAT 432
# Analyse de Fourier et théorie spectrale

## Feuille d'exercices numéro 4 - 24 septembre et 1er octobre 2004
## Transformation de Fourier et convolution

**Convolution et transformation de Fourier dans $L^1_{loc}$ et dans $L^1$**

**Exercice 1.** Soit $\alpha$ et $\beta$ deux nombres réels. Montrer l'existence et calculer la convolée $(e^{\alpha x}\mathbf{1}_{[0,\infty[}(x)) \star (e^{\beta x}\mathbf{1}_{[0,\infty[}(x))$

**Exercice 2.** Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de classe $C^1$ bornées et de dérivées bornées. On suppose que $f$ et $g'$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $f \star g$ est bien définie et qu'elle est de classe $C^2$.

**Exercice 3.** Montrer que la convolée de deux fonctions radiales de $L^1(\mathbb{R}^N)$ est encore radiale.

**Exercice 4.** En utilisant la transformée de Fourier, montrer qu'il n'y a pas d'unité pour le produit de convolution dans $L^1(\mathbb{R}^N)$.

**Exercice 5.** Soient $a, b > 0$. Soit $h_a(x) = \frac{2a}{x^2+a^2}$. En utilisant le calcul de $\mathcal{F}(h_a)$, calculer la convolée $h_a \star h_b$ et la transformée de Fourier $\mathcal{F}(h_a h_b)$.

**Exercice 6.** Pour $a > 0$, on note $f_a(x) = e^{-x}x^{a-1}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x)$.
a) Montrer que, pour $a > 0$, $f_a$ est dans $L^1(\mathbb{R})$.
b)On pose $\Gamma(a) = \|f_a\|_1$ et $g_a = \Gamma(a)^{-1}f_a$. Calculer $\widehat{g}_1$.
c) Pour $a > 0$ et $b > 0$, on note $B(a,b) = \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}du$. Démontrer la relation $g_a \star g_b = \frac{B(a,b)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} g_{a+b}$.
Retrouver la formule des compléments $B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ et en déduire $g_a \star g_b = g_{a+b}$.
d) Calculer $\widehat{g}_a$ pour $a > 0$ (*Indication : on commencera par le cas où a est rationnel.*)

**Exercice 7. Espace de Schwartz et formule sommatoire de Poisson**

L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}$ est l'espace des fonctions $f$ (dites à décroissance rapide) de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $n$ et $p$ entiers positifs, l'on ait $x^n f^{(p)}(x)$ tend vers 0 lorsque $\mid x \mid$ tend vers $+\infty$.
a) Montrer que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par dérivation et par multiplication par une fonction polynomiale,
b) Montrer que $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ et que la transformation de Fourier est une bijection de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans lui-même ;

c) Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+2k\pi)$ est convergente et que sa somme $\theta(x)$ est une fonction de classe $C^\infty$ et $2\pi$ périodique. Démontrer la formule de Poisson

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(2k\pi) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)$$

**Transformation de Fourier dans $L^2$**

**Exercice 8.** Calculer les transformées de Fourier des fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ :

$$x^{-1}\sin x \qquad \text{et} \qquad (x+i)^{-1}\ .$$

**Exercice 9.** Montrer que la transformée de Fourier de la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$ n'est pas dans $L^1(\mathbb{R}) + L^2(\mathbb{R})$.

**Exercice 10.** Soit $(x,y) \to f(x,y)$ une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, c'est à dire une fonction de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que $f$ et toutes ses dérivées tendent vers 0 à l'infini plus vite que toutes les fonctions $(1+x^2+y^2)^{-k}$ avec $k>0$. Montrer l'inégalité : $2\,\|\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f\|_2 \le \|(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})f\|_2$.

**Exercice 11.** Soit $f$ une fonction de $L^2(\mathbb{R}^N)$. On note, pour tout $x$ dans $\mathbb{R}^N$, $f_x$ la fonction translatée : $y \to f_x(y) := f(y-x)$. Montrer que l'espace vectoriel $V := \mathrm{Vect}(\{f_x\ /\ x \in \mathbb{R}^N\})$ engendré par les translatées de $f$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ si et seulement si l'ensemble $\{\xi \in \mathbb{R}^N\ /\ \widehat{f}(\xi) = 0\}$ est de mesure nulle.
*Indication : étudier l'orthogonal dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ de $\mathcal{F}(V)$.*

**Convolution dans $L^2$**

**Exercice 12.** On veut étendre la formule $\mathcal{F}(fg) = (2\pi)^{-N}\widehat{f}\star\widehat{g}$ pour $f,g$ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ avec $\widehat{f}$, $\widehat{g}$ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ au cas où $f,g$ sont dans $L^2(\mathbb{R}^N)$.
1) Soit $V = \{f \in L^1(\mathbb{R}^N)\ /\ \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^N)\}$. Montrer que $V$ est inclus dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ et que $V$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^N)$.
2) En déduire l'égalité $\mathcal{F}(fg) = (2\pi)^{-N}\widehat{f}\star\widehat{g}$ pour $f,g$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$.

**Exercice 13.** Résoudre dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ puis dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, l'équation $u\star u = u$.

**Exercice 14.** Soient $A$, $B$ deux parties de $\mathbb{R}^N$ de mesure non nulle. Montrer que l'ensemble $A+B := \{a+b\ /\ a\in A, b\in B\}$ contient un ouvert non vide de $\mathbb{R}^N$.
*Indication : On supposera que les mesures de $A$ et $B$ sont finies et on montrera que la fonction $\mathbf{1}_A\star\mathbf{1}_B$ est continue.*

**Exercice 15.** Pour tout $f$ dans $L^2(\mathbb{R})$, on note $Pf(x) = \pi^{-1}\int_{\mathbb{R}} f(x-y)\frac{\sin y}{y}dy$.
a) Montrer que la fonction $Pf$ est bien définie et est continue.
b) Montrer, à l'aide des exercices 8 et 12, que $Pf$ est dans $L^2(\mathbb{R})$ et calculer, pour $g$ dans $L^2(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}^{-1}\circ P\circ\mathcal{F}(g)$.
c) En déduire que $Pf$ est de classe $C^\infty$, que $\|Pf\|_2 \le \|f\|_2$ et que $P\circ P = P$.