Mathématiques MAT 432
Analyse de Fourier et théorie spectrale

Feuille d'exercices numéro 3 - 16 septembre 2002
Séries de Fourier et transformation de Fourier dans L^1

Exercice 1. Développements en demi-période
(i) Soit $L > 0$. Montrer que les fonctions $\varphi_p(t) = cos(\frac{p\pi}{L}t)$ forment un système total de $L^2(0, L)$
(ii) Soit $L > 0$. Montrer que les fonctions $\varphi_p(t) = sin(\frac{p\pi}{L}t)$ forment un système total de $L^2(0, L)$
(iii) Calculer les coefficients a_n tels que $1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)$ dans $L^2(0, \pi)$.

Exercice 2. Développements en quart de période
(i) Soit $L > 0$. Montrer que les fonctions $\varphi_p(t) = cos(\frac{(2p+1)\pi}{2L}t)$ forment un système total de $L^2(0, L)$. Pour $f \in L^2(0, L)$, on considérera la fonction

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & \text{pour} \quad 0 < t < L \\ -f(2L - t) & \text{pour} \quad L < t < 2L \\ g(-t) & \text{pour} \quad -2L < t < 0. \end{cases}$$

(ii) Soit $L > 0$. Montrer que les fonctions $\varphi_p(t) = sin(\frac{(2p+1)\pi}{2L}t)$ forment un système total de $L^2(0, L)$. Pour $f \in L^2(0, L)$, on considérera la fonction

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & \text{pour} \quad 0 < t < L \\ f(2L - t) & \text{pour} \quad L < t < 2L \\ -g(-t) & \text{pour} \quad -2L < t < 0. \end{cases}$$

Exercice 3. Décroissance des coefficients de Fourier
i) Montrer que pour toute fonction $f \in L^1(0, 2\pi)$, on a la relation

$$\lim_{|n|\to\infty} c_n(f) = 0,$$

où $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx} f(x)dx$.
ii) Soit f une fonction de classe C^k sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique. Montrer que

$$\lim_{|n|\to\infty} n^k c_n(f) = 0.$$

iii) Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0, 2\pi]$ mais telle que $f(2\pi) \neq f(0)$. Montrer qu'alors $c_k(f) = 0(\frac{1}{k})$. Estimer le reste de la série de Fourier (en norme L^2).
iv) Faire les mêmes calculs que dans les deux questions précédentes, mais en considérant les coefficients de f sur la base en cosinus, $c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\frac{kx}{2}) f(x)dx$.
v) Faire les mêmes calculs pour les coefficients de Fourier $c_{k,l}$ d'une "image", c'est-à-dire une fonction $f(x, y)$ définie sur un carré $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, de classe C^2 et dont la $(2\pi \times 2\pi)$-périodisée a des discontinuités sur le bord du carré. En déduire pourquoi la technologie actuelle préfère la "transformée en cosinus" pour coder les images de télévision.

Exercice 4. Convolution dans l'espace des fonctions périodiques
i) On note E l'espace des fonctions sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui sont 2π-périodiques et intégrables sur $[-\pi, \pi]$. On munit E de la norme $||f||_1 := \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx$. Pour $f \in E$ et $g \in E$, et $x \in \mathbb{R}$ on pose $f *_{S^1} g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dy$. Montrer que $f *_{S^1} g$ ainsi définie appartient à E .
ii) On appelle polynôme trigonométrique toute expression de la forme $P(t) = \Sigma_{k=-N}^{N} a_k e^{ikt}$, où les a_k sont des nombres complexes. Montrer que pour $f \in E$ la fonction $f *_{S^1} P$ est un polynôme trigonométrique.
iii) Démontrer que si $f, g \in L^2(-\pi, \pi)$, alors $f *_{S^1} g$ est bornée et $c_n(f *_{S^1} g) = 2\pi c_n(f) c_n(g)$.
iv) En déduire que la série de Fourier de $f *_{S^1} g$ est uniformément convergente et que donc la S^1-convolée de deux fonctions de $L^2(-\pi, \pi)$ est une fonction continue.

Exercice 5. Soient $a > 0$, $b > 0$ et $c \in \mathbb{R}$.
Calculer les transformées de Fourier des fonctions de $L^1(\mathbb{R})$ suivantes:

$$\frac{1}{2a}\mathbf{1}_{[c-a,c+a]}(x) \ , \ \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{\frac{-x^2}{2a}} \ , \ e^{-a|x|} \ , \ |x|e^{-a|x|} \ , \ \frac{2a}{x^2+a^2} \ .$$

Exercice 6. Calculer les transformées de Fourier des fonctions de $L^1(\mathbb{R}^2)$:

$$e^{-(x^2+2y^2)}, \qquad e^{-(x^2+y^2+xy)} \qquad \text{et} \qquad e^{-\frac{1}{2}({}^tXAX)},$$

où A est une matrice symétrique définie positive, et X un vecteur de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7. Calculer la transformée de Fourier de la fonction indicatrice de la boule unité euclidienne de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 8. Rappelons que les polynômes d'Hermite H_n sont définis par la relation $(\frac{d}{dx})^n(e^{-x^2}) = (-1)^n H_n e^{-x^2}$ et satisfont les relations $H_0 = 1$ et $H_{n+1} = (-\frac{d}{dx} + 2x)H_n$.
Les fonctions d'Hermite ψ_n sont définies par $\psi_n = c_n H_n e^{\frac{-x^2}{2}}$ où $c_n = (\sqrt{\pi} 2^n n!)^{-\frac{1}{2}}$.
a)Montrer que, pour $n \geq 0$, on a $(\frac{d}{dx} + x)\psi_0 = 0$, $\quad (-\frac{d}{dx} + x)\psi_n = \sqrt{2(n+1)}\psi_{n+1}$.
b)En déduire les égalités $\widehat{\psi_n} = (-i)^n \sqrt{2\pi} \psi_n$.
c)Montrer que les $\psi_n, n \geq 0$ forment un système orthonormal dans $L^2(\mathbb{R})$. Pour calculer $(\psi_p|\psi_q)$, on pourra intégrer par parties p (ou q) fois.
d)Soit g une fonction de $L^2(\mathbb{R})$. On pose, pour $\zeta \in \mathbb{C}$,

$$G(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\zeta} e^{-\frac{x^2}{2}} g(x) \, dx.$$

Montrer que la fonction G est une fonction holomorphe de la variable ζ et calculer $(\frac{d}{d\zeta})^k G(0)$.
e) En déduire que la famille $\psi_n, n \geq 0$ est une base de $L^2(\mathbb{R})$.