Mathématiques MAT 432
Analyse de Fourier et théorie spectrale
lundi 23 septembre 2002 – durée 1 heure

Exercice 1. Calculer pour tout $t \in \mathbb{R}$ l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{(x-2i)^2} dx.$$

Exercice 2. On considère $z^{\frac{2}{3}}$ définie à partir de la détermination principale $l(z)$ du logarithme ($z^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{2}{3}l(z)}$). On définit la fonction

$$f(z) = \frac{z^{\frac{2}{3}}}{z^2+1},$$

sur $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R}, z \leq 0\}$. Déterminer ses pôles et ses résidus. On donnera les résidus sous la forme $\rho e^{i\theta}$.

Exercice 3. (i) Calculer les coefficients a_n tels que:

$$\mathbf{1}_{[0,\frac{2\pi}{3}]} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \quad \text{dans} \;\; L^2(0,\pi).$$

($\mathbf{1}_{[0,\frac{2\pi}{3}]}$ est la fonction indicatrice de l'intervalle $[0,\frac{2\pi}{3}]$.

(ii) Quelle formule obtient-on en écrivant l'égalité des normes L^2 des deux membres ?

Exercice 4. Soient f et g deux fonctions holomorphes dans $\mathbb{C}$. On suppose que $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) + \overline{g(z)} \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = g(z) + c$.