RAPPEL

Soit $f \in L^2_T$, l'égalité

$$f \overset{L^2}{=} \sum e^{ikt}$$

signifie :

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{ikt} \text{ pour presque tout } t \in \mathrm{R}$$

et la série converge dans L^2. Elle n'est définie que pour presque tout $t \in \mathrm{R}$.

Un théorème ponctuel

Si f est T-périodique et de classe C^1 par morceaux :

1. **en chaque point t où f est continue**

$$S_N(t) = \sum_{-N}^{N} c_k e^{ik\omega t} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} f(t)$$

2. **en chaque point t de discontinuité**

$$S_N(t) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$$

3. **Si, de plus, f est continue sur $[a,b]$, S_N CVG uniformément vers f sur $[a,b]$.**

DEF. – $\Gamma \subset \mathrm{R}^3$ est un réseau s'il existe une base (e_1, e_2, e_3) de R^3 telle que,

$$\gamma \in \Gamma \Leftrightarrow \gamma = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \qquad x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{Z}$$

On dit alors que $(e_1, e_2, e_3,)$ est une base du réseau.

DEF. – f définie dans R^3 est Γ-périodique si $f(x+\gamma) = f(x)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.

TH. – (e_1, e_2, e_3) base de Γ; (f_1, f_2, f_3) base de R^3.

P matrice de passage : $f_i = \sum\limits_{i=1}^{3} p_{ij} e_j$

$$\{(f_1, f_2, f_3) \text{ base de } \Gamma\}$$
$$\Updownarrow$$
$$\{p_{ij} \in \mathbf{Z} \text{ et } \det(P) = \pm 1\}$$

DEF. – Base réciproque d'une base (e_1, e_2, e_3) de R^3 : l'unique base (e_1^*, e_2^*, e_3^*) telle que $e_i \cdot e_j^* = 2\pi\delta_{ij}$

TH. – Γ : réseau de R^3 et $k \in \mathrm{R}^3$. Alors (a)⇔(b)⇔(c)

(a) – La fonction $x \mapsto e^{ik\cdot x}$ est Γ-périodique.

(b) – Pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a $k \cdot \gamma \in 2\pi\mathrm{Z}$.

(c) – Si (e_j) est une base de Γ, et si (e_j^*) est la base réciproque, $k = \sum_j k_j e_j^*$ avec $k_j \in \mathrm{Z}$.

DEF. – Réseau réciproque Γ^* : ensemble des k possédant ces propriétés.

TH. – f : Γ-périodique; M et M' : deux mailles de Γ.

$$\int_M f(x)dx = \int_{M'} f(x)dx \quad \textbf{et} \quad \textbf{Vol}(M) = \textbf{Vol}(M').$$

DEF. –
L^2_Γ : espace des fonctions Γ-périodiques de carré sommable sur tout ensemble borné.

Produit scalaire : $(f|g) = \frac{1}{V}\int_M \overline{f(x)}g(x)dx$

M: maille ; V= volume de M.

TH. – **Les** $e_k(x) = e^{ik\cdot x}$, **pour** $k \in \Gamma^*$, **forment une base hilbertienne de** L^2_Γ.

Explicitation

$$\forall f \in L^2_\Gamma, \qquad f \stackrel{L^2}{=} \sum_{k\in\Gamma^*} c_k(f) e^{ik\cdot x}$$

(CVG en moyenne quadratique sur tout ensemble borné)

$$c_k(f) = \frac{1}{V}\int_M e^{-ik\cdot x} f(x)dx$$

$$\frac{1}{V}\int_M |f(x)|^2 dx = \sum_{k\in\Gamma^*} |c_k(f)|^2 \quad \textbf{(Bessel-Parseval).}$$

TH. & DEF. (convolution)

Soient f**,** $g \in L^1(\mathrm{R}^n)$

$$(f \star g)(x) = \int \underbrace{f(x-y)g(y)}\, dy$$

• **Pour presque tout** $x \in \mathrm{R}^n$**,** $\uparrow$ **est sommable en** y

• **La fonction** $f \star g$ **est sommable et**

$$\|f \star g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

commutativité : $(f \star g)(x) = \int g(x-y)f(y)dy$

associativité : $(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$

TH. – g **continue et bornée,** $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$**.**

$$(f \star g)(x) = \int f(x-y)g(y)dy = \int g(x-y)f(y)dy$$

est définie en tout point, continue et bornée.

– Si g **a des dérivées partielles continues et bornées,** $f \star g$ **aussi et**

$$\frac{\partial(f \star g)}{\partial x_j} = f \star \frac{\partial g}{\partial x_j}, \qquad \frac{\partial^2(f \star g)}{\partial x_j \partial x_k} = f \star \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_k}$$

Autres cas où $\star$ est définie

- $f \in L^1(\mathbf{R}^n), g \in L^2(\mathbf{R}^n)$. **Alors** $f \star g \in L^2$

$$\|f \star g\|_2 \leq \|f\|_1 \|g\|_2$$

- f **et** $g \in L^2(\mathbf{R}^n)$. **Alors** $f \star g$ **est continue et bornée**

$$\|f \star g\|_\infty \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$

- $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^n)$, $g \in L^1$ **nulle hors d'un ensemble borné**

$$f \star g \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^n)$$

- $f, g \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$ **nulles pour** x **assez petit** **(**$x \leq A \in \mathbf{R}$**)**

$$f \star g \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$$

Approximations de l'identité

TH. – Soit $h \in L^1(\mathbf{R}^n)$ **avec** $\int_{\mathbf{R}^n} h(x)dx = 1$

$$h_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} h(x/\epsilon)$$

$f \in \left\{ \begin{array}{l} L^1(\mathbf{R}^n) \\ L^2(\mathbf{R}^n) \end{array} \right\}$ **alors** $f \star h_\epsilon \underset{\epsilon \longrightarrow 0}{\longrightarrow} f$ **dans** $\left\{ \begin{array}{l} L^1(\mathbf{R}^n) \\ L^2(\mathbf{R}^n) \end{array} \right.$

REM. – Si $h \in C^\infty$ **alors** $f \star h_\epsilon \in C^\infty$