RAPPELS

1. **Si f est holomorphe,**

$$f'(z) \equiv 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

donc f est localement constante

2. **exemples de fonctions holomorphes :**

$$P(z) = \sum_0^N a_n z^n$$

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \text{ sur } \Omega = \{z,\, Q(z) \neq 0\}$$

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n (z - z_0)^n \text{ sur } D(z_0, R).$$

3. **En particulier sont holomorphes :**

$$\exp(z),\ \ln(1-z) = -\sum_0^\infty \frac{z^{n+1}}{n+1},\ \cosh(z),\ \ldots$$

TH. (Développement en série entière)
f **est holomorphe dans** $D = \{z,\ |z - z_0| < r\}$**.**
Alors f **est développable en série entière dans** D **:**

$f(z) = \sum_0^\infty a_n (z - z_0)^n,$ **rayon de CVG** $\geq r$

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw, \qquad \rho \in]0, r[.$$

où $\gamma_\rho =$ **cercle de centre** z_0**, de rayon** ρ**, orienté positivement.**

COR. **Si f est holomorphe dans Ω alors $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ existent et sont holomorphes dans Ω.**

Si Ω contient $D(z_0, r)$, on a

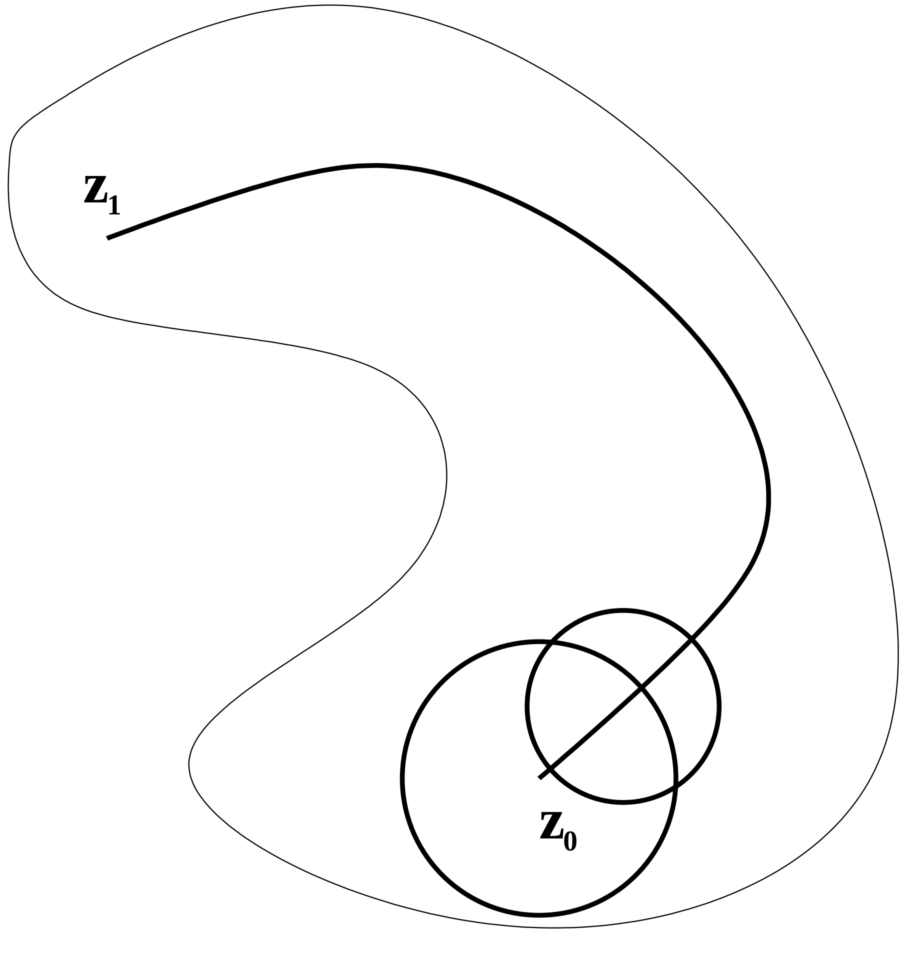
$$f(z) = \sum \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \text{ pour } z \in D(z_0, r),$$

le rayon de convergence étant $\geq r$.

Structure d'une fonction holomorphe nulle en z_0

– ou bien f est nulle dans tout un disque centré en z_0 (si tous les a_n sont nuls).

– ou bien $f(z) = (z - z_0)^p g(z)$ avec g holomorphe et $g(z_0) \neq 0$ (on dit que f a un zéro d'ordre p).
Il existe alors $D(z_0, \rho)$ où f ne s'annule qu'en z_0.


z_1
z_0

TH. (Développement en série de Laurent)

f **holomorphe dans** $\overset{\bullet}{D} = \{z,\, 0 < |z - z_0| < r\}$
Alors, pour $z \in \overset{\bullet}{D}$**, on a**

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw, \quad \rho \in]0, r[.$$

$\sum\limits_0^\infty a_n u^n$ **a un rayon de convergence** $\geq r$
($u = z - z_0$**).**
$\sum\limits_1^\infty a_{-n} \zeta^n$ **a un rayon de convergence infini**
($\zeta = (z - z_0)^{-1}$**).**

CVG uniforme dans $\{z,\, \rho_1 \leq |z| \leq \rho_2\}$ **pour** $0 < \rho_1 < \rho_2 < r$**.**

Structure d'une fonction holomorphe dans un disque pointé $0 < |z - z_0| < r$.

– point singulier essentiel

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

avec un infinité de a_{-n} non nuls.

– pôle d'ordre p : $f(z) = h(z)/(z - z_0)^p$ avec $h(z_0) \neq 0$ et h holomorphe.

– singularité apparente : f se prolonge en une fonction holomorphe dans le disque.

THÉORÈME DES RÉSIDUS

K **compact de bord orienté** $\gamma = (\gamma_j)_{j\in J}$
$Z = \{z_l\}_{l\in L}$ **ensemble fini de points de l'intérieur** $\overset{\circ}{K}$**.**
f **continue dans** $K \setminus Z$ **et holomorphe dans** $\overset{\circ}{K} \setminus Z$**.**
Alors,

$$\sum_{j\in J} \int_{\gamma_j} f(z)dz = 2i\pi \sum_{l\in L} Res(f; z_l)\,.$$