Mathématiques MAT 432
Analyse de Fourier et théorie spectrale
Correction de l'interrogation du 24 septembre 2004

Exercice 1. Par l'inégalité triangulaire, pour $|z| = 1$,

$$|P(z)| \geq |a_d z^d| - (|a_{d-1}z^{d-1}| + \cdots + |a_0|) = |a_d| - (|a_0| + \cdots + |a_{d-1}|) > |a_0|$$

en vertu de l'hypothèse.
Si P n'a pas de zéros dans le disque unité, alors $1/P$ est holomorphe dans le disque unité. Le principe du maximum nous dit alors que

$$\frac{1}{|a_0|} = \frac{1}{|P(0)|} \leq \sup_{|z|=1} \frac{1}{|P(z)|} \leq \frac{1}{|a_d| - (|a_0| + \cdots + |a_{d-1}|)} < \frac{1}{|a_0|}$$

ce qui est absurde.

Exercice 2. On remarque que

$$I = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(tx)}{(x^2+x+1)^2} dx = \mathrm{Im}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx}}{(x^2+x+1)^2} dx\right).$$

Nous calculerons cette dernière intégrale. Comme I est une fonction impaire de t il suffit de considérer le cas $t > 0$.

Pour $t > 0$ on la calcule en cherchant les résidus de

$$z \mapsto f_t(z) = \frac{e^{itx}}{(z^2+z+1)^2}$$

dans le demi-plan complexe supérieur.

Le point $z = e^{2i\pi/3}$ est le seul pôle (double) de f_t dans le demi-plan supérieur. On calcule le résidus en ce point en écrivant

$$f_t(z) = \frac{h(z)}{(z - e^{2i\pi/3})^2}$$

et

$$\mathrm{Rés}(f_t; e^{2i\pi/3}) = h'(e^{2i\pi/3})$$

Il vient

$$\mathrm{Rés}(f_t; e^{2i\pi/3}) = -\frac{1}{9}(3t + 2\sqrt{3})i \exp(tie^{2i\pi/3})$$

Pour $t > 0$, on a donc

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx}}{(x^2+x+1)^2} dx = 2i\pi \mathrm{Res}(f_t,e^{2i\pi/3}) = \frac{2\pi}{9}(3t + 2\sqrt{3}) \exp(-\sqrt{3}t/2 - it/2)$$

On obtient donc finalement pour $t \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(tx)}{(x^2+x+1)^2} dx = -\frac{2\pi}{9}(3|t| + 2\sqrt{3}) \sin(t/2) e^{-\sqrt{3}|t|/2}.$$

Exercice 3. On cherche un développement en cosinus, donc on prolonge la fonction $f(x) = \sin x$ définie sur $[0,\pi]$ en une fonction paire $f_1(x)$ définie sur $[-\pi,\pi]$, dont on va chercher le développement en série de Fourier (et donc en cosinus puisque f_1 est paire).
La période est $T = 2\pi$ et on peut donc écrire

$$f_1(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

où

$$a_0 = 2 \int_{-\pi}^{\pi} f_1(x) \frac{dx}{2\pi}$$

et pour $n \geq 1$,

$$a_n = 2 \int_{-\pi}^{\pi} f_1(x) \cos(nx) \frac{dx}{2\pi} = 4 \int_0^{\pi} \sin x \cos(nx) \frac{dx}{2\pi}\cdot$$

Soit

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\sin((n+1)x) - \sin((n-1)x))\, dx \\ &= -\frac{2}{\pi(n^2-1)} (1 + (-1)^n)\,. \end{aligned}$$

On en déduit que les coefficients a_n sont nuls si n est impair, et on a donc

$$\sin x = \frac{2}{\pi} - \sum_{p \geq 1} \frac{4}{\pi(4p^2-1)} \cos(2px) \quad \text{dans} \quad L^2([0,\pi]).$$

Exercice 4. Les pôles de la fonction

$$f(z) = \frac{z^{\frac{7}{4}}}{(z^2+1)^2}$$

sont i et $-i$, et chacun est un pôle double: on a ainsi

$$f(z) = \frac{z^{\frac{7}{4}}}{(z+i)^2(z-i)^2}\cdot$$

Cherchons le résidu en i. On peut écrire

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-i)^2}$$

et l'on a

$$\text{Rés}(f; i) = h'(i).$$

On calcule

$$\begin{aligned} h'(z) &= \frac{d}{dz}\left(\frac{z^{\frac{7}{4}}}{(z+i)^2}\right) \\ &= \frac{7}{4}\frac{z^{\frac{3}{4}}}{(z+i)^2} - 2\frac{z^{\frac{7}{4}}}{(z+i)^3} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} h'(i) &= \frac{7}{4}\frac{i^{\frac{3}{4}}}{(2i)^2} - 2\frac{i^{\frac{7}{4}}}{(2i)^3} \\ &= -\frac{7}{16}e^{\frac{3i\pi}{8}} - \frac{1}{4}e^{\frac{7i\pi}{8}+\frac{i\pi}{2}} \\ &= -\frac{3}{16}e^{\frac{3i\pi}{8}}, \end{aligned}$$

d'où

$$\text{Rés}(f;i) = -\frac{3}{16}e^{\frac{3i\pi}{8}}.$$

Le calcul pour le résidu en $-i$ est similaire et l'on trouve

$$\text{Rés}(f;-i) = -\frac{3}{16}e^{-\frac{3i\pi}{8}}.$$