Université de Grenoble Alpes
Institut Fourier
M1 Analyse fonctionnelle
2017-2018

Examen de mai 2018

Sans document, ni calculatrice
Le barème est donné à titre indicatif
Durée : 3 heures

Exercice 1 [7 points]

On munit $L^2(\mathbb{R})$ de la norme classique $||.||_2$ pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.
1) Soit (f_n) une suite dans $L^2(\mathbb{R})$ qui converge vers f dans $L^2(\mathbb{R})$. Démontrer que si $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi(x) f_n(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)f(x)dx$.
2) Le but de cette question est de démontrer que si (f_n) est une suite bornée dans $L^2(\mathbb{R})$, alors il existe une sous-suite de (f_n) qui converge faiblement dans $L^2(\mathbb{R})$ vers $f \in L^2(\mathbb{R})$.
2a) Soit $g \in L^2(\mathbb{R})$. Démontrer qu'il existe une sous-suite (θ_n) de (f_n) telle que la suite $\left(\int g(x)\theta_n(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2b) Soit (ψ_n) une suite donnée par la séparabilité de $L^2(\mathbb{R})$. En appliquant le procédé diagonal de Cantor à $C_i^j = \int \psi_j(x)f_i(x)dx$, démontrer qu'il existe une sous-suite (F_n) de (f_n) tel que pour tout j, $\left(\int F_n(x)\psi_j(x)dx\right)$ converge.
2c) En déduire que pour tout $g \in L^2(\mathbb{R})$, la suite $\left(\int F_n(x)g(x)dx\right)$ converge. On notera $L(g)$ sa limite.
2d) Démontrer que $L : g \to L(g)$ est une forme linéaire continue sur $L^2(\mathbb{R})$.
2e) Conclure (on pourra utiliser sans démonstration la caractérisation du dual de $L^2(\mathbb{R})$ que l'on énoncera avec soin) .
On considère dans la suite l'espace de Sobolev $W^{1,2}(\mathbb{R})$ muni de la norme $||u|| = ||u||_2 + ||u'||_2$ où u' est la dérivée faible de u sur $\mathbb{R}$ et où $||.||_2$ est la norme classique dans $L^2(\mathbb{R})$ (pour la mesure de Lebesgue).
3) La fonction u à support dans $[-1, 1]$ qui est égale à $1 + x$ sur $[-1, 0]$ et $1 - x$ sur $]0, 1]$ est-elle dans $W^{1,2}(\mathbb{R})$?
4) Soit (u_n) une suite dans $W^{1,2}(\mathbb{R})$ telle que (u_n) converge vers u en norme L^2 et telle que (u_n') est bornée dans $L^2(\mathbb{R})$. En utilisant les questions précédentes, démontrer que u est dans $W^{1,2}(\mathbb{R})$.

Exercice 2 [6 points]

Soit E un espace de Banach (sur $\mathbb{R}$). On notera $||.||$ la norme sur E et $|||.|||$ celle sur son dual E^*. On pose $S_{E^*} = \{\phi \in E^*, |||\phi||| = 1\}$. On suppose que E^* est séparable. Le but de ce qui suit est de démontrer que E est aussi séparable.
1) Dans le cas d'un espace vectoriel normé, montrer qu'il est séparable si et seulement si il existe une partie dénombrable engendrant un sous-espace vectoriel dense.
2) Soit $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une partie dénombrable dense dans E^*. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $\psi_n \neq 0_{E^*}$, on pose $\phi_n = \psi_n/|||\psi_n|||$. Montrer que pour tout $\phi \in S_{E^*}$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $|||\phi - \phi_p||| < 1/2$.

2) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in E$ tel que $||x_n|| = 1$ et $|\phi_n(x_n)| \geq 1/2$.
3) Soit M le sous-espace vectoriel de E engendré par les (x_n). On suppose que $\overline{M} \neq E$.
3a) Enoncer sans démonstration les deux versions géométriques du théorème d'Hahn-Banach.
3b) En déduire qu'il existe $\phi \in S_{E'}$ tel que $\phi(x_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3c) Conclure.

Exercice 3 [4 points]

Soient E, F deux espaces de Banach (on notera $||.||_E$ et $||.||_F$ leurs normes respectives) et soit $a : E \times F \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire telle que
(i) Pour tout $x \in E$ fixé, l'application $y \to a(x, y)$ est continue.
(i) Pour tout $y \in F$ fixé, l'application $x \to a(x, y)$ est continue.
Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une constante $C \geq 0$ telle que pour tout $x \in E$, tout $y \in F$,

$$|a(x, y)| \leq C||x||_E||y||_F.$$

1) Montrer qu'il existe une application linéaire $T : E \to F^*$ telle que $a(x, y) = \langle T(x), y\rangle$ pour tout $x \in E$, tout $y \in F$. Que faut-il démontrer sur T pour conclure ?
2) Enoncer sans démontration le théorème de Banach-Steinhaus.
3) On note $B_E = \{x \in E; ||x||_E \leq 1\}$ la boule unité de E. Montrer que pour tout $y \in F$, $B^*(y) = \{\langle T(x), y\rangle, x \in B_E\}$ est borné dans $\mathbb{R}$.
4) Conclure.

Exercice 4 [3 points]

Soit E l'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ que l'on munit de la norme uniforme $||.||_\infty$. On définit l'application $T : E \to E$ par $Tf(x) = \displaystyle\int_0^{1-x} f(t)dt$ pour tout $f \in E$, tout $x \in [0, 1]$. On pourra utiliser sans démonstation le théorème d'Ascoli qui est rappelé à la fin.
1) Rappeler la définition d'un opérateur compact, d'une valeur spectrale, d'une valeur propre. On notera comme dans le cours $\sigma(T)$ l'ensemble des valeurs spectrales de T et $VP(T)$ l'ensemble des valeurs propres de T.
2) Montrer que T est un opérateur compact.
3) Montrer que 0 est valeur spectrale de T mais n'est pas valeur propre de T.

QUESTIONS BONUS (A ne faire que si le reste est fait) :
5) Déterminer toutes les valeurs propres de T et les espaces propres associés (dont on précisera la dimension). Indication : Montrer que tout vecteur propre g_λ associé à la valeur propre λ est de classe C^2 sur $[0, 1]$ et vérifie une équation différentielle du second ordre simple avec $g_\lambda(1) = 0$, $g'_\lambda(0) = 0$ et $\lambda g'_\lambda(1) = -g(0)$.
6) En déduire l'ensemble des valeurs spectrales $\sigma(T)$ (on pourra utiliser sans démonstration un résultat du cours que l'on énoncera avec soin).

Rappels : On dit qu'une partie $H \subset E$ est équicontinue en $x_0 \in [0, 1]$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in [0, 1], |x - x_0| < \eta \Longrightarrow \forall h \in H, |h(x) - h(x_0)| < \varepsilon.$$

On dit que $H \subset E$ est équicontinue si elle est équicontinue en tout $x_0 \in [0, 1]$. Le théorème d'Ascoli dit qu'une partie H de E est relativement compacte dans E si et seulement si elle est bornée et équicontinue.