Examen du mercredi 16 mai 2018

Représentations des groupes

Durée : 3 heures

La clarté, la concision et la précision des réponses données seront des facteurs importants d'appréciation des copies. On justifiera chaque réponse donnée. Documents et calculatrices interdits.

La partie IV est indépendante des autres parties du problème.

Exercice

Soit p un nombre premier et soit G un groupe fini de cardinal divisible par p. Soit k un corps de caractéristique p. On note $k[G]_s$ la représentation régulière de G sur k. On note $(e_g)_{g\in G}$ la base usuelle de $k[G]$. Soit $\varepsilon = \sum_{g\in G} e_g$. On note D la droite vectorielle engendrée par ε.

1. Démontrer que D est une sous-représentation de $k[G]_s$.

2. Démontrer que $\varepsilon^2 = 0$ dans l'algèbre $k[G]$.

3. On suppose que D admet un supplémentaire H qui est une sous-représentation de $k[G]_s$.

(**a**) Démontrer que $\varepsilon H \subset H$. En déduire que $\varepsilon\alpha \in H$ pour tout $\alpha \in k[G]$.

(**b**) Démontrer que $D \subset H$.

(**c**) Conclure sur l'existence de H.

4. Démontrer que $k[G]_s$ n'est pas isomorphe à une somme directe de représentations irréductibles de G sur k.

Problème

Représentations d'un groupe de cardinal p^3

Dans tout ce problème, la lettre p désigne un nombre premier impair. On note G un groupe de cardinal p^3 et d'élément neutre 1_G tel que

$$\forall g \in G, \quad g^p = 1_G.$$

Pour tous $g, h \in G$, on note $[g,h] = ghg^{-1}h^{-1}$. On suppose qu'il existe trois éléments a, b et c de G tels que $c \neq 1_G$ et $[a,b] = c$. En particulier, le groupe G n'est pas abélien. On note également V le sous-groupe de G engendré par c, et U l'abélianisé de G, c'est-à-dire le quotient $G/[G,G]$. On note π la projection canonique de G dans U.

T.S.V.P

Partie I

Préliminaires

1. Démontrer que les représentations complexes irréductibles de G sont de dimension 1 ou p.

2. Démontrer qu'il y a au plus $(p-1)$ classes d'isomorphisme de représentations complexes irréductibles de G de dimension égale à p.

3. En déduire un minorant sur le nombre de classes d'isomorphisme de représentations complexes de dimension 1 de G.

4. Que peut-on dire sur le cardinal de U ? Démontrer que $[G, G] = V$.

5. Déterminer le nombre exact de classes d'isomorphisme de représentations irréductibles complexes de dimension p de G.

6. On fait agir le groupe G par conjugaison sur le sous-groupe dérivé $[G, G]$. Cette action est donc donnée par $g.v = gvg^{-1}$ pour $g \in G$ et $v \in V$.

(a) Démontrer que V contient une orbite de cardinal 1.

(b) Démontrer que V est contenu dans le centre de G.

7. (a) Démontrer qu'il existe une application $\psi : U \times U \to V$ telle que

$$[g, h] = \psi(\pi(g), \pi(h))$$

pour tous $g, h \in G$.

(b) En déduire qu'il n'existe pas de sous-groupe cyclique de U qui contienne à la fois $\pi(a)$ et $\pi(b)$.

On note désormais $\bar{a}$ et $\bar{b}$ les classes de a et b dans U.

8. Démontrer que l'application $\mathbf{Z}^2 \to U$ définie par $(k, l) \mapsto \bar{a}^k \bar{b}^l$ induit un isomorphisme de groupes $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^2 \to U$.

9. (a) Démontrer que tout élément g de G s'écrit de manière unique sous la forme $g = a^\alpha b^\beta c^\gamma$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \{0, \dots p-1\}$. (On pourra utiliser la projection π de G dans U.)

(b) Soient $\alpha, \beta \in \{0, \dots, p-1\}$. On pose $g = a^\alpha b^\beta$. Calculer aga^{-1} et bgb^{-1}. (On pourra commencer par considérer les cas $g = a$ et $g = b$).

10. (a) Soit C une classe de conjugaison de G. Que peut-on dire de l'image de C par π ?

(b) Décrire les classes de conjugaison de G.

Partie II

Représentations induites

On note H le sous-groupe de G engendré par a et c. On pose $\xi = \exp(\frac{2i\pi}{p})$.

1. (a) Démontrer que H est un sous-groupe distingué de G. (On pourra rechercher un morphisme de groupes dont c'est le noyau).

(b) Le groupe H est-il isomorphe au groupe $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^2$?

2. Décrire les caractères des représentations complexes irréductibles de H.

On note $\varpi : G \to G/H$ la projection canonique.

3. Démontrer qu'il existe un morphisme de groupes $s : G/H \to G$ tel que $\varpi \circ s = \mathrm{Id}_{G/H}$.

Soit τ un morphisme de groupes de H dans $\mathbf{C}^*$. Le morphisme τ munit le $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathbf{C}_s$ d'une structure de représentation de G, qu'on note $\mathbf{C}_\tau$. On note $W_\tau = \mathrm{Ind}_H^G(\mathbf{C}_\tau)$ la représentation induite.

4. (a) Quelle est la dimension de W_τ ?

(b) [Question de cours] Donner la formule qui exprime le caractère de W_τ en termes de τ. (On rappelle que H est distingué dans G).

(c) On note $\zeta = \tau(c)$. On suppose que $\zeta \neq 1$. Démontrer que $\chi_{W_\tau}(g)$ est nul si $g \notin V$.

5. On suppose que $\tau(c) \neq 1$. Démontrer que W_τ est irréductible.

Partie III

Table de caractères

1. Donner la table des caractères des représentations complexes irréductibles du groupe G.

2. Soient S_1 et S_2 des représentations irréductibles complexes de G de caractères respectifs χ_1 et χ_2.

(a) [Question de cours] Exprimer le caractère de la représentation produit tensoriel $S_1 \otimes_{\mathbf{C}} S_2$ en termes de χ_1 et χ_2.

(b) Donner pour les représentations irréductibles complexes S de G les multiplicités $[S_1 \otimes_{\mathbf{C}} S_2 : S]$. (On pourra distinguer des cas notamment suivant les dimensions de S_1 et S_2).

Partie IV

Exemple

On rappelle que le nombre premier p est impair. Soit $\mathbf{F}_p$ le corps $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Démontrer qu'un p-sous-groupe de Sylow du groupe $\mathrm{GL}_3(\mathbf{F}_p)$ est un groupe G qui vérifie les hypothèses du problème. (On pourra considérer des matrices triangulaires).