

# TER - Autour du théorème de De Branges

Nathan Huguenin - sous la direction d'Agnès Coquio



FIGURE 1 – Charles Loewner en 1963.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction, rappels d'analyse complexe.</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Fonctions univalentes, fonctions <i>schlicht</i>, fonction de Koebe.</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Conjecture de Bieberbach : cas réel.</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Le théorème de l'aire de Grönwall, et ses conséquences.</b>	<b>9</b>
4.1	Théorème de l'aire. . . . .	9
4.2	Conjecture de Bieberbach, cas $n = 2$ . . . . .	11
4.3	Conséquences des inégalités de Bieberbach. . . . .	12
<b>5</b>	<b>Prérequis topologiques.</b>	<b>17</b>
5.1	Structure d'espace métrique. . . . .	17
5.2	Principe de subordination, convergence de Carathéodory. . . . .	19
5.3	Classe $\mathcal{S}^*$ des déchirures. . . . .	21
<b>6</b>	<b>Méthode de Loewner - Cas <math>n = 3</math> de la conjecture de Bieberbach.</b>	<b>24</b>
6.1	Idée générale. . . . .	24
6.2	Existence et unicité d'une chaîne de Loewner. . . . .	25
6.3	Équation de Loewner, cas $n = 3$ . . . . .	27
<b>7</b>	<b>Équations de Loewner et courbes du plan complexe.</b>	<b>34</b>
7.1	Équation de Loewner Radiale . . . . .	34
7.1.1	Sens inverse . . . . .	34
7.1.2	Équation radiale pour les inverses . . . . .	37
7.1.3	L'exemple des chaînes de Koebe . . . . .	38
7.2	Équation de Loewner Cordale . . . . .	39
7.3	Autres généralisations et applications . . . . .	39

# 1 Introduction, rappels d'analyse complexe.

Nous nous intéresserons dans ce mémoire à certaines fonctions de la variable complexe, définies sur le disque unité  $\mathbb{D}$ , dites *univalentes*, c'est-à-dire holomorphes et injectives. Plus particulièrement, nous étudierons une sous-classe  $\mathcal{S}$  de ces fonctions, telles que  $f(0) = 0$ , et  $f'(0) = 1$ . Les fonctions de  $\mathcal{S}$  sont dites *schlicht*.

Ces fonctions étant analytiques sur  $\mathbb{D}$ , elles y admettent un développement unique en série de Taylor, qui fait l'objet de la conjecture suivante :

**Conjecture** (de Bieberbach). *Soit  $f$  une fonction schlicht avec  $f(z) = z + \sum_{n \geq 2} a_n z^n$ . Alors  $|a_n| \leq n$  pour tout  $n$ .*

La conjecture fut émise par Ludwig Bieberbach en 1916, et finalement démontrée par Louis De Branges en 1985.

Le cas  $n = 2$  fut prouvé par Bieberbach, en utilisant le théorème de l'aire de Grönwall. Plus tard, en 1923, Charles Loewner prouva le cas  $n = 3$  en utilisant ce qu'on appellera ici la *méthode de Loewner*. L'idée est d'étudier des familles à un paramètre temporel de fonctions univalentes, qui vérifient une certaine équation différentielle, dite *équation de Loewner*.

Nous présenterons le cas  $n = 2$ , puis nous prouverons le cas  $n = 3$  par cette méthode. Nous verrons ensuite différentes versions de l'équation de Loewner, et essayerons de comprendre les liens entre l'équation, les familles de fonctions univalentes, et les courbes dans  $\mathbb{C}$ .

Nous supposerons connus les résultats du cours de M1 d'analyse complexe, et nous rappelons ici les théorèmes dont nous nous servirons le plus.

**Théorème 1.1** (Lemme de Schwarz). *Soit  $f$  holomorphe sur  $\mathbb{D}$ , telle que  $f(0) = 0$ , et  $|f(z)| \leq 1$  si  $|z| < 1$ .*

*Alors  $|f(z)| \leq |z|$  et  $|f'(0)| \leq 1$ .*

*De plus il y a égalité si il existe  $z_0$  tel que  $|f(z_0)| = |z_0| \neq 0$ , et alors  $f(z) = \lambda z$ ,  $|\lambda| = 1$ .*

**Théorème 1.2** (de Weierstrass). *Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions holomorphes qui converge uniformément sur les compacts d'un ouvert  $U$  de  $\mathbb{C}$  vers une fonction  $f$ , alors  $f$  est holomorphe et la suite des dérivées  $k$ -ièmes  $(f_n^{(k)})$  converge uniformément sur les compacts de  $U$  vers la fonction  $f^{(k)}$ .*

**Théorème 1.3** (de Hurwitz). *Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert connexe  $U$  de  $\mathbb{C}$ , qui converge uniformément sur les compacts de  $U$  vers une fonction holomorphe  $f$  non nulle sur  $U$ .*

*Si  $f$  a un zéro d'ordre  $m$  en  $z_0$  alors pour tout  $\epsilon > 0$  et pour tout  $n = n_\epsilon$  suffisamment grand,  $f_n$  a précisément  $m$  zéros dans le disque  $|z - z_0| < \epsilon$  en comptant la multiplicité.*

*De plus, ces zéros convergent vers  $z_0$  quand  $n \rightarrow \infty$ .*

**Théorème 1.4** (de Montel). *Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  et  $F \subset \mathcal{H}(U)$ .*

*Alors  $F$  est d'adhérence compacte si et seulement si  $F$  est uniformément bornée.*

**Théorème 1.5** (de la représentation conforme de Riemann). *Soit  $U$  un ouvert simplement connexe de  $\mathbb{C}$ , alors il existe une bijection biholomorphe  $f$  de  $D$  dans  $U$ , unique après avoir fixé  $f(0)$  et imposé  $f'(0) > 0$ .*

## 2 Fonctions univalentes, fonctions *schlicht*, fonction de Koebe.

Nous commençons par donner les premières définitions des objets étudiés.

**Définition 2.1** (Fonctions univalentes et *schlicht*). Une fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $U$  ouvert, est dite *univalente* si elle est holomorphe et injective.

Une telle fonction  $f$  est dite *schlicht* si elle est définie sur le disque unité  $\mathbb{D}$  et vérifie  $f(0) = 0$  et  $f'(0) = 1$ . L'ensemble des fonctions *schlicht* est noté  $\mathcal{S}$ .

La restriction aux fonctions de  $\mathcal{S}$  lors de l'étude des fonctions univalentes est pertinente. En effet, étant donné une fonction univalente  $f$ , on obtient une fonction *schlicht*  $\tilde{f}$  en posant

$$\tilde{f} = \frac{f - f(0)}{f'(0)}$$

où la division par  $f'(0)$  est licite vu l'injectivité de  $f$ .

Certaines fonctions de  $\mathcal{S}$  jouent un rôle crucial dans l'étude de la conjecture de Bieberbach, car elles réalisent tous les cas d'égalité, ou tous les cas "limites", des théorèmes que nous allons aborder : il s'agit de la fonction de Koebe  $k$  et de ses rotations  $k_\theta$ .

On obtient la première en normalisant la fonction  $z \mapsto \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2$ , univalente sur  $\mathbb{D}$  comme carré de la fonction  $z \mapsto \frac{1+z}{1-z}$  (comme nous allons le voir), appelée transformation de Cayley.

Ainsi

$$k(z) = \frac{1}{4} \left( \left( \frac{1+z}{1-z} \right)^2 - 1 \right) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

Les rotations de la fonction de Koebe sont alors données par :

$$k_\theta(z) = \frac{z}{(1 - ze^{i\theta})^2}$$

On peut développer ces fonctions en séries entières sur  $\mathbb{D}$ , et on obtient :

$$\begin{aligned} k(z) &= z \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{1-z} \right) = \sum_{n \geq 0} n z^n \\ k_\theta(z) &= z e^{-i\theta} \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{1 - ze^{i\theta}} \right) = \sum_{n \geq 0} n e^{i(n-1)\theta} z^n \end{aligned}$$

On remarque que les coefficients de Taylor de ces fonctions sont maximaux, au sens où  $|a_n(k)| = |a_n(k_\theta)| = n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Intéressons-nous aux images de  $\mathbb{D}$  par ces fonctions.

La transformation de Cayley est une application conforme de  $\mathbb{D}$  dans le demi-plan  $\{\Re(z) > 0\}$  (d'où l'injectivité de  $k$ ). En effet, notons  $z = a + ib \in \mathbb{D}$ , et  $w = \frac{1+z}{1-z}$ , on a alors :

$$\begin{aligned} w &= \frac{1 + a + ib}{1 - a - ib} \\ &= \frac{(1 + a + ib)(1 - a + ib)}{(1 - a)^2 + b^2} \\ &= \frac{1 - (a^2 + b^2)}{1 + a^2 + b^2 - 2a} + i \frac{2b}{1 + a^2 + b^2 - 2a} \end{aligned}$$

Donc  $\Re(w) = \frac{1-|z|^2}{1+|z|^2-2\Re(z)} = \frac{1-|z|^2}{(\Re(z)-1)^2+\Im(z)^2} > 0$  et on a une inclusion.

Inversement, soit  $w$  de partie réelle strictement positive, on pose  $z = \frac{w-1}{1+w}$ , et on a bien  $\frac{1+z}{1-z} = w$ , et  $|z| = \frac{(\Re(w)-1)^2+\Im(w)^2}{(\Re(w)+1)^2+\Im(w)^2} < 1$  car  $\Re(w) > 0$ .

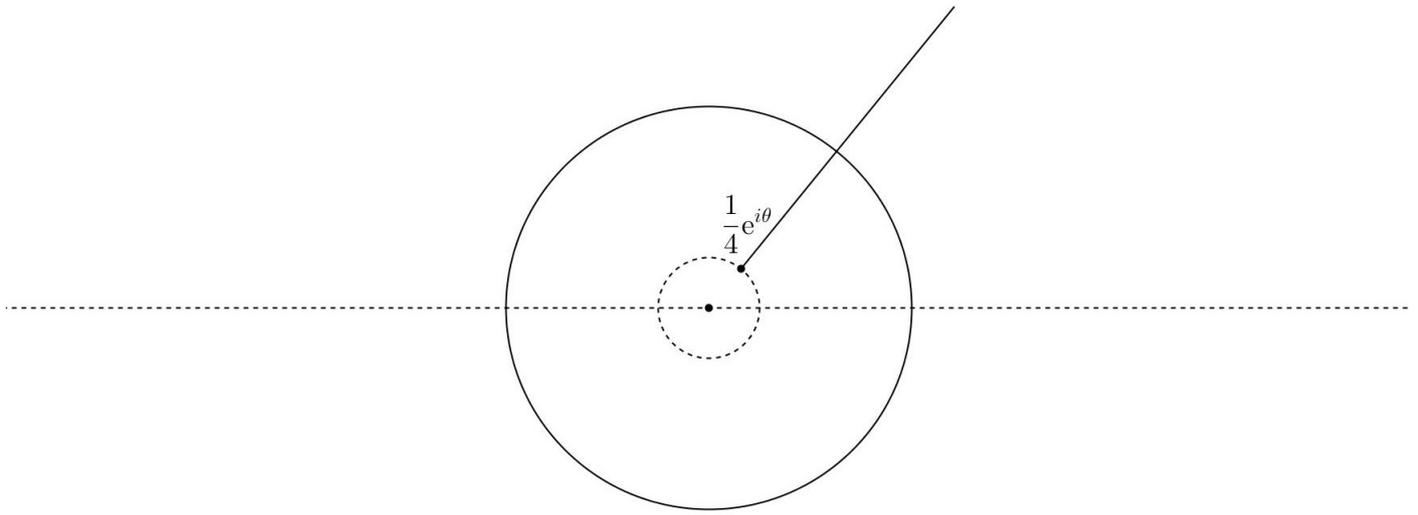


FIGURE 2 – Image de  $\mathbb{D}$  par la fonction de Koebe  $k_\theta$ .

L'application  $z \mapsto z^2$  envoie  $\{\Re(z) > 0\}$  sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ , donc par composition  $z \mapsto \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2$  envoie  $\mathbb{D}$  sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ , et enfin  $k$  fait correspondre  $\mathbb{D}$  à  $\mathbb{C}$  privé de la demi-droite  $] -\infty, -\frac{1}{4}]$ . On trouve de la même manière que l'image de  $k_\theta$  est  $\mathbb{C}$  sans la demi-droite  $\{-re^{-i\theta}, r \in [\frac{1}{4}, +\infty[ \}$ .

Nous verrons que ces images réalisent le cas limite du théorème du quart de Koebe, que nous aborderons plus tard.

### 3 Conjecture de Bieberbach : cas réel.

Nous donnons dans cette partie une démonstration de la conjecture de Bieberbach dans le cas où les coefficients de Taylor de la fonction *schlicht*  $f$  sont réels.

**Théorème 3.1** (Conjecture de Bieberbach - Cas réel). *Soit  $f \in \mathcal{S}$  telle que  $f(z) = z + \sum_{n \geq 2} a_n z^n$ , avec  $a_n \in \mathbb{R}$  pour tout  $n \geq 2$ , alors pour tout  $n \geq 2$ ,  $|a_n| \leq n$ . De plus, la fonction de Koebe  $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$  réalise le cas d'égalité.*

**Lemme.** *Soit  $f \in \mathcal{S}$  à coefficients de Taylor réels. Alors :*

i)  $f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ .

ii)  $f$  envoie le demi-disque supérieur sur le demi-plan supérieur.

*Démonstration.* i) La réciproque est évidente, puisque les coefficients de  $f$  sont réels.

Montrons l'implication directe. Notons  $f(z) = \sum_{n \geq 1} a_n z^n$ , alors comme  $a_n \in \mathbb{R}$  pour tout  $n \geq 1$  on a  $\bar{a}_n = a_n$ , puis :

$$f(\bar{z}) = \sum_{n \geq 1} a_n \bar{z}^n = \sum_{n \geq 1} \overline{a_n z^n} = \overline{f(z)}.$$

Supposons  $f(z) \in \mathbb{R}$ , on a alors  $f(z) = \overline{f(z)} = f(\bar{z})$ , mais  $f$  est injective, donc  $z = \bar{z}$ , c'est à dire  $z \in \mathbb{R}$ .

ii) Comme  $f(0) = 0$ , et  $f'(0) = 1$ , on a  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)/z = 1 > 0$ .

Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels de  $(0, 1)$  de limite nulle. On a que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(ix_n)}{ix_n} = 1$$

donc pour tout  $\epsilon > 0$  il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\left| \frac{f(ix_N)}{ix_N} - i \right| < \epsilon$ , et alors  $\Im \left( \frac{f(ix_N)}{ix_N} \right) > 1 - \epsilon > 0$ . Donc  $\Im(f(ix_N)) > 0$

On a donc trouvé l'existence d'un  $\omega \in \mathbb{D}_+$  tel que  $f(\omega) \in \mathbb{H}_+$ .

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe  $z \in \mathbb{D}_+$  tel que  $\Im(f(z)) < 0$ . Soit  $\gamma$  le segment  $[\omega, z]$  dans  $\mathbb{D}_+$  et soit  $\gamma_1$  l'image de  $\gamma$  par  $f$ , reliant  $f(\omega) \in \mathbb{H}_+$  à  $f(z) \in \mathbb{H}_-$ . Comme  $f$  est continue,  $\gamma_1$  est un chemin et donc coupe l'axe des réels en au moins un point  $u \in f(\gamma)$ , et alors  $f^{-1}(u) \in \mathbb{R}$  par le point i). On aboutit à une contradiction puisque  $f^{-1}(u) \in \gamma \subset \mathbb{D}_+$ . Donc pour tout  $z \in \mathbb{D}$  tel que  $\Im(z) > 0$ , on a  $\Im(f(z)) > 0$ . □

*Preuve du théorème.* Si  $z \in \mathbb{D}$ , on pose  $z = re^{i\theta}$ ,  $0 \leq r < 1$ . On écrit  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ .

Calculons pour  $n \geq 0$  :

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \Im(f(re^{i\theta})) \sin(n\theta) d\theta \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left( \sum_{k=0}^\infty a_k r^k \sin(k\theta) \right) \sin(n\theta) d\theta \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left( \sum_{k=0}^\infty a_k r^k \sin(k\theta) \sin(n\theta) \right) d\theta \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left( \sum_{k=0}^\infty a_k r^k (\cos((k-n)\theta) - \cos((k+n)\theta)) \right) d\theta \\
&= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^\infty a_k r^k \left( \int_0^\pi \cos((k-n)\theta) d\theta - \int_0^\pi \cos((k+n)\theta) d\theta \right) \\
&= \frac{1}{\pi} a_n r^n \left( \int_0^\pi d\theta - \int_0^\pi \cos(2n\theta) d\theta \right) + \frac{1}{\pi} \sum_{k=0, k \neq n}^\infty a_k r^k \left( \left[ \frac{\sin((k-n)\theta)}{k-n} \right]_0^\pi - \left[ \frac{\sin((k+n)\theta)}{k+n} \right]_0^\pi \right) \\
&= a_n r^n - \frac{1}{\pi} a_n r^n \left[ \frac{\sin(2n\theta)}{2n} \right]_0^\pi + \frac{1}{\pi} \sum_{k=0, k \neq n}^\infty a_k r^k \left( \left[ \frac{\sin((k-n)\theta)}{k-n} \right]_0^\pi - \left[ \frac{\sin((k+n)\theta)}{k+n} \right]_0^\pi \right) \\
&= a_n r^n
\end{aligned}$$

L'interversion somme/intégrale à la cinquième ligne est justifiée par la convergence normale de la série entière de  $f$ , et donc de cette somme, sur  $\overline{D}(0, r)$ .

En notant  $v(r, \theta) = \Im(f(re^{i\theta}))$ , on a donc établi l'égalité :

$$a_n r^n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi v(r, \theta) \sin(n\theta) d\theta \quad (1)$$

pour tout  $n \geq 0$ .

Par le lemme, on a que  $v(r, \theta) \geq 0$  pour tout  $r \in [0, 1[$  et pour tout  $\theta \in [0, \pi]$ .

Pour conclure, on a besoin d'un petit résultat sur le sinus que nous allons montrer par récurrence : pour tout  $n \geq 0$  et pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $|\sin(n\theta)| \leq n |\sin \theta|$ .

L'initialisation est évidente, supposons donc la propriété vraie au rang  $n$ , on a :

$$\begin{aligned}
& |\sin((n+1)\theta)| \\
&= |\sin(n\theta) \cos \theta + \sin \theta \cos(n\theta)| \\
&\leq |\sin(n\theta)| + |\sin \theta| \\
&\leq n |\sin \theta| + |\sin \theta| \quad (\text{par hypothèse de récurrence}) \\
&= (n+1) |\sin \theta|
\end{aligned}$$

On a donc établi l'inégalité, qui devient  $|\sin(n\theta)| \leq n \sin \theta$  dès que  $\theta \in [0, \pi]$ .

En reprenant l'égalité (1), on obtient :

$$\begin{aligned}
 & |a_n r^n| \\
 &= \frac{2}{\pi} \left| \int_0^\pi v(r, \theta) \sin(n\theta) d\theta \right| \\
 &\leq \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |v(r, \theta)| |\sin(n\theta)| d\theta \\
 &\leq \frac{2}{\pi} \int_0^\pi v(r, \theta) n \sin \theta d\theta \\
 &= n \left( \frac{2}{\pi} \int_0^\pi v(r, \theta) \sin \theta d\theta \right) \\
 &= n a_1 r \\
 &= n r
 \end{aligned}$$

Où les majorations sont celles trouvées précédemment.  $r$  étant arbitraire inférieur à 1, on obtient la conclusion par passage à la limite des deux côtés :

$$|a_n| \leq n$$

Montrons maintenant le cas d'égalité.

La fonction de Koebe, définie sur  $\mathbb{D}$  par  $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ , est développable en série entière sur  $\mathbb{D}$  et s'écrit :

$$k(z) = z \frac{d}{dz} \frac{1}{1-z} = z \sum_{n \geq 0} n z^{n-1} = z + 2z^2 + \dots$$

On a donc  $a_n = n$  pour tout  $n$ . On a bien  $k(0) = 0$  et  $k'(0) = 1$ . Pour obtenir l'injectivité de  $k$ , on peut remarquer d'abord qu'on peut l'écrire sous la forme :

$$k(z) = \frac{1}{4} \left( \left( \frac{1+z}{1-z} \right)^2 - 1 \right)$$

$k$  est alors la composée de trois fonctions injectives  $k_1, k_2, k_3$ , avec  $k_1(z) = \frac{1+z}{1-z}$ ,  $k_2(z) = z^2$ ,  $k_3(z) = \frac{1}{4}(z-1)$ , et  $k = k_3 \circ k_2 \circ k_1$  (la fonction  $k_2$  étant injective sur  $\{\Re(z) > 0\} = k_1(\mathbb{D})$ ).

□

## 4 Le théorème de l'aire de Grönwall, et ses conséquences.

Dans cette partie, nous proposons une démonstration du théorème de l'aire, qui nous permettra de démontrer la conjecture de Bieberbach dans le cas  $n = 2$ . Nous donnerons ensuite comme conséquence de ce résultat le théorème du quart de Koebe, qui précise les images de  $\mathbb{D}$  par les fonctions *schlicht*, ainsi que deux théorèmes dus également à Koebe, fondamentaux pour le reste de l'étude.

### 4.1 Théorème de l'aire.

La preuve du théorème de l'aire consiste essentiellement à calculer l'aire d'un certain sous-ensemble du plan complexe, et nous aurons besoin pour cela de lier intégrale sur une courbe, et intégrale sur le domaine délimité par la courbe. A cette fin, nous rappelons un résultat concernant les formes différentielles, sans démonstration.

**Théorème 4.1** (Formule de Green-Riemann). *Si  $\omega$  est une 1-forme différentielle sur  $\mathbb{R}^2$ , et  $D$  un compact du plan délimité par une courbe  $C^1$  par morceaux et orientée positivement, on a :*

$$\int_{\partial D} \omega = \iint_D d\omega$$

Si  $\omega = Pdx + Qdy$ , la dérivée extérieure de  $\omega$  s'écrit  $d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy$ , et la formule se réécrit :

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy$$

On note  $\Sigma$  l'ensemble des fonctions univalentes sur  $\Omega = \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ , possédant un développement de Laurent de la forme  $g(z) = z + \sum_{n \geq 0} b_n z^{-n}$ . On peut maintenant énoncer le théorème qui nous intéresse :

**Théorème 4.2** (de l'aire de Grönwall). *Soit  $g \in \Sigma$ , alors l'aire de  $\mathbb{C} \setminus g(\Omega)$  est  $\pi(1 - \sum_{n=0}^{\infty} n|b_n|^2)$ , et on a  $\sum_{n=0}^{\infty} n|b_n|^2 \leq 1$ .*

*Démonstration.* Le but est de calculer l'aire de  $\Gamma = \mathbb{C} \setminus g(\Omega)$ .

Ne connaissant pas grand chose de  $\Gamma$  ni de sa frontière, la fonction  $g$  n'étant a priori holomorphe que sur  $\Omega$  ouvert, nous allons l'approcher par des domaines légèrement plus grands, qui eux sont bien réguliers.

Pour tout  $r > 1$ , notons  $\Omega_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$ ,  $\Gamma_r = \mathbb{C} \setminus g(\Omega_r)$ , et  $\gamma_r = \partial\Gamma_r$  la frontière de  $\Gamma_r$ , c'est-à-dire  $\partial g(\Omega_r)$ . Observons qu'alors, si  $C_r$  désigne le cercle de centre 0 et de rayon  $r$ ,  $C_r$  est inclus dans  $\Omega$ , où  $g$  est holomorphe, et ainsi son image par  $g$  est le lacet  $\gamma_r$ , qui est alors lisse et injectif, parcouru positivement :

$$\begin{aligned} \gamma_r &: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} \\ & \quad t \mapsto g(re^{it}) \end{aligned}$$

De plus comme  $\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = \infty$ ,  $g$  envoie  $\Omega_r$  sur la composante connexe non bornée de  $\mathbb{C} \setminus \gamma_r$ , donc  $\Gamma_r$  est borné, donc compact puisque  $g(\Omega_r)$  est ouvert.

Les  $\Gamma_r$  sont croissants en  $r$  : si  $r_1 > r_0 > 1$ , alors  $\Omega_{r_1} \subset \Omega_{r_0} \subset \Omega$ , et alors  $g(\Omega_{r_1}) \subset g(\Omega_{r_0}) \subset g(\Omega)$ .

Finalement,  $\Gamma \subset \Gamma_{r_0} \subset \Gamma_{r_1}$ . On a donc  $\Gamma = \bigcap_{r \geq 1} \Gamma_r$ , et si  $\mathcal{A}$  désigne l'aire, on a

$$\mathcal{A}(\Gamma) = \lim_{r \searrow 1} \mathcal{A}(\Gamma_r)$$

(limite par valeurs supérieures).

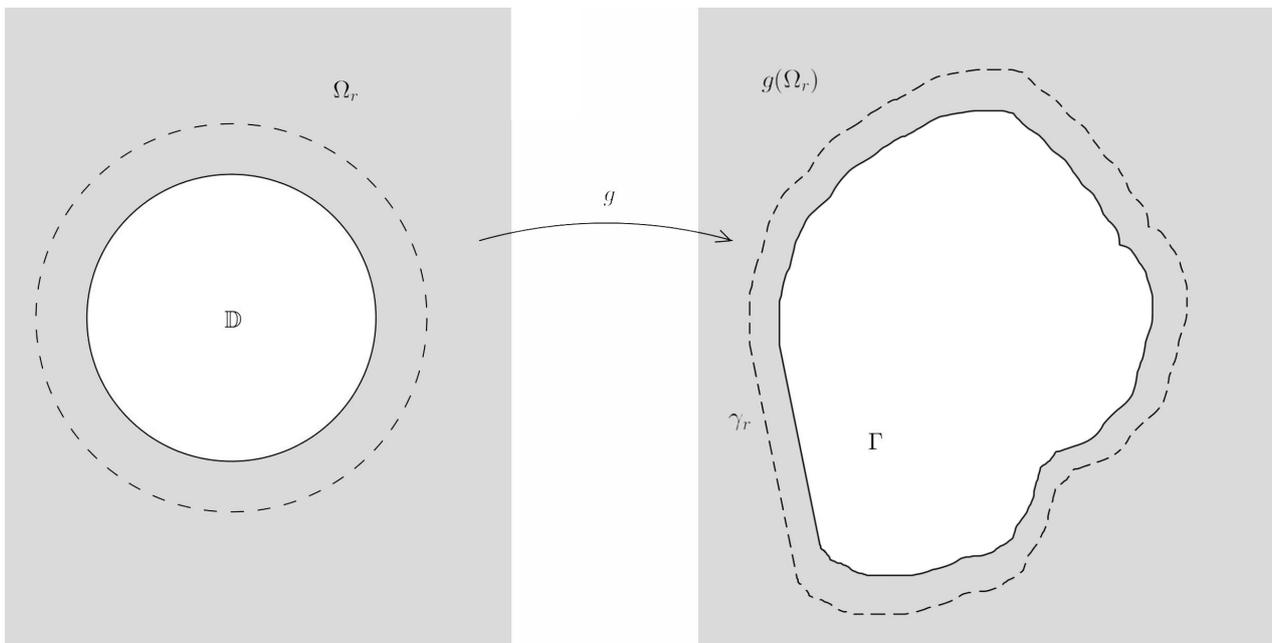


FIGURE 3 – La fonction  $g$  et les domaines  $\Gamma_r$ .

Si  $z \in \mathbb{C}$ , notons  $z = x + iy$ , on a alors si  $r > 1$  :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(\Gamma_r) &= \iint_{\Gamma_r} dx dy \\
 &= \iint_{\mathbb{C} - g(\Omega_r)} dx dy \\
 &= \int_{\gamma_r = g(C_r)} \left( \frac{1}{2} x dy - \frac{1}{2} y dx \right) \text{ par la formule de Green} \\
 &= \frac{1}{2i} \int_{\gamma_r} \bar{z} dz \\
 &= \frac{1}{2i} \int_{C_r} \overline{g(\omega)} g'(\omega) d\omega
 \end{aligned}$$

Faisons le changement de variable  $w = re^{i\theta}$  sur  $C_r$ . On a

$$g(re^{i\theta}) = re^{i\theta} + \sum_{n \geq 0} b_n r^{-n} e^{-in\theta}$$

et

$$g'(re^{i\theta}) = 1 - \sum_{n \geq 1} n b_n r^{-n-1} e^{-i(n+1)\theta}$$

Puis :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(\Gamma_r) &= \frac{1}{2i} \int_0^{2\pi} r i e^{i\theta} \overline{g(re^{i\theta})} g'(re^{i\theta}) d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r e^{i\theta} \left( r e^{-i\theta} + \sum_{n \geq 0} \bar{b}_n r^{-n} e^{in\theta} \right) \left( 1 - \sum_{n \geq 1} n b_n r^{-n-1} e^{-i(n+1)\theta} \right) d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left( r e^{-i\theta} + \sum_{n \geq 0} \bar{b}_n r^{-n} e^{in\theta} \right) \left( r e^{i\theta} - \sum_{n \geq 1} n b_n r^{-n} e^{-in\theta} \right) d\theta
 \end{aligned}$$

Les deux sommes sont des séries de Laurent normalement convergentes, on pourra donc quand on aura développé les parenthèses intervertir sommes et intégrales. De plus l'intégrale entre 0 et  $2\pi$  des termes de la forme  $e^{ik\theta}$  est nulle dès que  $k \neq 0$ . Les termes mixtes sont donc nuls, tandis qu'il nous reste le premier terme et le produit des deux sommes :

$$\mathcal{A}(\Gamma_r) = \pi r^2 - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \overline{b_n} b_{n-m} r^{-2n+m} (n-m) \int_0^{2\pi} e^{im\theta} d\theta$$

Or l'intégrale vaut 0 dès que  $m \neq 0$  et  $2\pi$  sinon, donc :

$$\mathcal{A}(\Gamma_r) = \pi(r^2 - \sum_{n \geq 0} n |b_n|^2 r^{-2n})$$

On applique la convergence monotone à la suite  $(n|b_n|^2 r_k^{-2n})_{k \geq 0}$ , avec  $0 < r_0 < 1$  et  $r_k \rightarrow 1$  (limite croissante), qui est positive et décroissante. On passe donc à la limite quand  $r_k$  tend vers 1 et on obtient l'expression souhaitée :

$$\mathcal{A}(\Gamma) = \pi(1 - \sum_{n \geq 0} n |b_n|^2)$$

Comme l'aire est positive par orientation, on obtient également la majoration attendue, ainsi que l'inégalité qui nous sera utile plus tard : en considérant qu'alors

$$\sum_{k=0}^n k |b_k|^2 \leq 1$$

pour tout  $n$ , on a en particulier  $|b_1| \leq 1$ . □

## 4.2 Conjecture de Bieberbach, cas $n = 2$ .

On démontre à présent les inégalités de Bieberbach.

**Théorème 4.3** (Cas  $n = 2$ , inégalités de Bieberbach).

i) Soit  $g \in \mathcal{S}$  impaire, donnée par  $g(z) = z + \sum_{n \geq 1} b_{2n+1} z^{2n+1}$ , alors  $|b_3| \leq 1$ .

ii) Soit  $f \in \mathcal{S}$ , donnée par  $f(z) = z + \sum_{n \geq 2} a_n z^n$ , alors  $|a_2| \leq 2$ .

De plus, il y a égalité si et seulement si  $g(z) = \frac{z}{1-e^{i\theta}z^2}$  et  $f(z) = \frac{z}{(1-e^{i\theta}z)^2}$ .

*Démonstration.* i) Soit  $g$  définie comme dans l'énoncé.

Sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ ,  $g(\frac{1}{z}) = \frac{1}{z} + \frac{b_3}{z^3} + \dots \neq 0$ . On définit alors

$$G(z) = \frac{1}{g(\frac{1}{z})} = z - \frac{b_3}{z} + \dots$$

qui vérifie les hypothèses du théorème de l'aire, étant de la bonne forme et injective comme composée de fonctions injectives.

Alors en appliquant directement le théorème on obtient  $|b_3| \leq 1$ .

ii) Soit  $f$  définie comme dans l'énoncé.

Il s'agit d'établir une correspondance bijective entre  $f$  et une fonction de  $\mathcal{S}$  impaire, pour appliquer le point i).

On a

$$f(z^2) = z^2 + \sum_{n \geq 2} a_n z^{2n} = z^2 \left( 1 + \sum_{n \geq 2} a_n z^{2n-2} \right)$$

On pose  $u(z) = 1 + \sum_{n \geq 2} a_n z^{2n-2}$ ,  $u$  est paire, et non nulle sur  $\mathbb{D}$ , qui est simplement connexe. Cela nous assure l'existence d'un logarithme de  $u$  et donc d'une racine carrée, holomorphe sur  $\mathbb{D}$ .

On pose alors

$$v(z) = \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^z \frac{u'(\omega)}{u(\omega)} d\omega\right)$$

On a bien  $v^2 = u$ ,  $v \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$  et  $v(0) = 1$ .

On pose enfin  $g(z) = zv(z)$ , qui est bien définie, holomorphe sur  $\mathbb{D}$ , et telle que  $g^2(z) = f(z^2)$ , ce qui assure la correspondance bijective souhaitée.

On a également  $v(-z) = \pm v(z)$  mais  $v(0) = 1$ , donc  $v$  est paire et  $g$  est impaire.

$g$  est également injective :  $g(z) = g(w) \Rightarrow f(z^2) = f(w^2) \Leftrightarrow z^2 = w^2$  par injectivité de  $f$ . Mais l'hypothèse  $z = -w$  est exclue par imparité de  $g$ .

On a facilement  $g'(0) = 1$ , et finalement  $g$  est bien celle que nous attendions.

On a :  $g(z)^2 = z^2 + 2b_3 z^4 + \dots$

Et :  $f(z^2) = z^2 + a_2 z^4 + \dots$

Par identification, on a  $b_3 = \frac{a_2}{2}$ , et en appliquant le point i), on obtient bien  $|\frac{a_2}{2}| \leq 1$ , soit  $|a_2| \leq 2$ .

Montrons le cas d'égalité de i) :

Dans le sens direct, supposons  $|b_3| = 1$ , c'est à dire :

$$G(z) = \frac{1}{g(1/z)} = z - \frac{e^{i\theta}}{z} + \dots$$

On a par le théorème de l'aire que  $\sum_{n=0}^m n|b_n|^2 \leq 1$  pour tout  $m$ , et comme  $|e^{i\theta}| = 1$ , tous les prochains coefficients sont nuls. On a alors :

$$G(z) = z - \frac{e^{i\theta}}{z}$$

Puis,

$$g(z) = \frac{z}{1 - e^{i\theta} z^2}$$

Réciproquement, il suffit de développer  $g$  en série entière.

Comme  $f(z^2) = g(z)^2$  on trouve directement qu'il y a égalité pour ii) si et seulement si  $f$  est une rotation de la fonction de Koebe.  $\square$

Suit un corollaire de "renormalisation" bien utile :

**Corollaire 4.4** (Généralisation de l'inégalité de Bieberbach). *Si  $f$  est univalente sur  $\mathbb{D}$ , alors  $|f''(0)| \leq 4|f'(0)|$ .*

*Démonstration.* On écrit  $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ , alors  $z \mapsto \frac{1}{a_1}(f(z) - a_0) = z + \frac{a_2}{a_1} z^2 + \dots$  est *schlicht* et par l'inégalité de Bieberbach,  $|\frac{a_2}{a_1}| \leq 2$ , d'où le résultat.  $\square$

### 4.3 Conséquences des inégalités de Bieberbach.

Premièrement, nous donnons un résultat très important donnant une "borne inférieure" des images de  $\mathbb{D}$  par les fonctions univalentes.

**Théorème 4.5** (du quart de Koebe). *Pour toute fonction  $f \in S$ ,  $D(0, \frac{1}{4}) \subset f(\mathbb{D})$ .*

*Démonstration.* Il s'agit de montrer que pour tout  $w$  dans  $D^*(0, \frac{1}{4})$ , l'équation  $f(z) = w$  a une solution. Raisonnons par l'absurde et supposons que ce ne soit pas le cas, alors  $w - f(z) \neq 0$  pour tout  $z \in \mathbb{D}$ , et alors la fonction  $h : z \mapsto \frac{1}{w-f(z)}$  est univalente sur  $\mathbb{D}$ .

Sa dérivée est donnée par :

$$h'(z) = \frac{f'(z)}{(w - f(z))^2}$$

d'où  $h'(0) = 1/w^2$ .

Sa dérivée seconde est donnée par :

$$h''(z) = \frac{f''(z)}{(w - f(z))^2} + \frac{2f'(z)(w - f(z))}{(w - f(z))^4}$$

d'où  $h''(0) = \frac{2a_2}{w^2} + \frac{2}{w^3}$ .

Par l'inégalité de Bieberbach sur les fonctions univalentes,

$$\begin{aligned} 2 \left| \frac{a_2}{w^2} + \frac{1}{w^3} \right| &\leq 4 \left| \frac{1}{w^2} \right| \\ \Leftrightarrow \left| \frac{a_2}{w^2} + \frac{1}{w^3} \right| &\leq \left| \frac{2}{w^2} \right| \\ \Leftrightarrow \left| a_2 + \frac{1}{w} \right| &\leq 2 \end{aligned}$$

Mais  $|a_2| \leq 2$  et alors  $|\frac{1}{w}| \leq 2 + |a_2| \leq 4$ , donc  $|w| \geq \frac{1}{4}$ , ce qui est impossible puisque  $w \in D^*(0, 1/4)$ .  $\square$

De la même manière, on généralise immédiatement aux fonctions univalentes.

**Corollaire 4.6** (Généralisation). *Pour toute fonction univalente  $f$ ,  $D(f(0), \left| \frac{f'(0)}{4} \right|) \subset f(\mathbb{D})$ .*

Suivent les deux résultats fondamentaux de cette partie, qui vont nous permettre ensuite de développer la méthode de Loewner.

**Théorème 4.7** (de distorsion de Koebe). *Pour toute  $f \in \mathcal{S}$ , pour tout  $z \in \mathbb{D}$ , on a :*

$$\frac{1 - |z|}{(1 + |z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1 + |z|}{(1 - |z|)^3}$$

La preuve se fait en deux temps, commençons par démontrer le lemme suivant :

**Lemme.** *Si  $f \in \mathcal{S}$  et  $z \in \mathbb{D}$ , alors :*

$$\left| \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2\bar{z}}{1 - |z|^2} \right| \leq \frac{4}{1 - |z|^2}$$

*Preuve du lemme.* Soit  $z_0 \in \mathbb{D}$ , on va "translater" l'inégalité de Bieberbach en  $z_0$ , en composant  $f$  à droite par un automorphisme de  $\mathbb{D}$ , de sorte que 0 soit envoyé sur  $z_0$ . On définit donc :

$$\phi(z) = \frac{z + z_0}{1 + z\bar{z}_0}$$

$f \circ \phi$  est univalente, et on la normalise afin de la rendre *schlicht* :

$$g(z) = \frac{f \circ \phi(z) - f(z_0)}{\phi'(0)f'(z_0)}$$

On a :

$$\phi'(z) = \frac{1 + z\bar{z}_0 - \bar{z}_0(z + z_0)}{(1 + z\bar{z}_0)^2} = \frac{1 - |z_0|^2}{(1 + z\bar{z}_0)^2}$$

donc  $\phi'(0) = 1 - |z_0|^2$ .

Et :

$$\phi''(z) = (1 - |z_0|^2) \left( -\frac{2z\bar{z}_0^2 + 2\bar{z}_0}{(1 + z\bar{z}_0)^4} \right) = -\frac{(1 - |z_0|^2)(2\bar{z}_0)}{(1 + z\bar{z}_0)^3}$$

donc  $\phi''(0) = -2\bar{z}_0(1 - |z_0|^2)$ .

Ainsi,

$$g(z) = \frac{f \circ \phi(z) - f(z_0)}{(1 - |z_0|^2)f'(z_0)}$$

$g$  est bien définie sur  $\mathbb{D}$ , univalente et  $g(0) = 0$ .

De plus,

$$g'(z) = \frac{\phi'(z)f' \circ \phi(z)}{(1 - |z_0|^2)f'(z_0)} = \frac{f' \circ \phi(z)}{(1 + z\bar{z}_0)^2 f'(z_0)}$$

donc  $g'(0) = 1$ , donc  $g \in \mathcal{S}$ .

On a :

$$g''(z) = \frac{\phi'(z)f'' \circ \phi(z)(1 + z\bar{z}_0)^2 - (2z\bar{z}_0^2 + 2\bar{z}_0)f' \circ \phi(z)}{(1 + z\bar{z}_0)^4 f'(z_0)}$$

Donc  $g''(0) = -2\bar{z}_0 + (1 - |z_0|^2)\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}$ .

En appliquant l'inégalité de Bieberbach à  $g$ , on a  $\left|\frac{g''(0)}{2}\right| \leq 2$ , d'où le résultat. □

*Preuve du théorème.* On déduit directement du lemme que :

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1 - |z|^2}\right| \leq \frac{4|z|}{1 - |z|^2}$$

et donc,

$$\frac{2|z|^2 - 4|z|}{1 - |z|^2} \leq \Re\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) \leq \frac{2|z|^2 + 4|z|}{1 - |z|^2}$$

Par injectivité de  $f$ ,  $f'$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{D}$  qui est simplement connexe, donc elle admet un logarithme, et on choisit une détermination telle que  $\log f'(0) = \log 1 = 0$ , de sorte qu'elle coïncide avec  $\ln$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

On pose  $z = re^{i\theta}$ , ainsi :

$$\frac{2r^2 - 4r}{1 - r^2} \leq \Re\left(\frac{re^{i\theta}f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right) \leq \frac{2r^2 + 4r}{1 - r^2}$$

puis,

$$\frac{2r - 4}{1 - r^2} \leq \Re\left(\frac{e^{i\theta}f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right) \leq \frac{2r + 4}{1 - r^2}$$

d'où,

$$\frac{2r - 4}{1 - r^2} \leq \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(re^{i\theta})| \leq \frac{2r + 4}{1 - r^2}$$

en remarquant que  $\Re(\log w) = \log |w|$  pour tout  $w$  tel que le logarithme soit défini.

Puis en intégrant sur  $[0, r]$  :

$$\begin{aligned} & -\int_0^r \frac{4}{1 - \rho^2} d\rho + \int_0^r \frac{2\rho}{1 - \rho^2} d\rho \leq \log |f'(re^{i\theta})| \leq \int_0^r \frac{4}{1 - \rho^2} d\rho + \int_0^r \frac{2\rho}{1 - \rho^2} d\rho \\ \Leftrightarrow & -\int_0^r \left(\frac{2}{1 - \rho} + \frac{2}{1 + \rho}\right) d\rho - \log(1 - r^2) \leq \log |f'(re^{i\theta})| \leq \int_0^r \left(\frac{2}{1 - \rho} + \frac{2}{1 + \rho}\right) d\rho - \log(1 - r^2) \\ \Leftrightarrow & -2\log\left(\frac{1+r}{1-r}\right) - \log(1 - r^2) \leq \log |f'(re^{i\theta})| \leq 2\log\left(\frac{1+r}{1-r}\right) - \log(1 - r^2) \\ \Leftrightarrow & \log\left(\frac{1-r}{(1+r)^3}\right) \leq \log |f'(re^{i\theta})| \leq \log\left(\frac{1+r}{(1-r)^3}\right) \end{aligned}$$

D'où le résultat en passant à l'exponentielle. □

**Théorème 4.8** (de croissance de Koebe). *Pour toute  $f \in \mathcal{S}$ , pour tout  $z \in \mathbb{D}$ , on a :*

$$\frac{|z|}{(1 + |z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1 - |z|)^2}$$

*Démonstration.* On procède à peu près de la même façon que pour le théorème de distorsion, en posant  $z = re^{i\theta}$ .

On a alors :

$$f(re^{i\theta}) = \int_0^r \frac{\partial}{\partial \rho} f(\rho e^{i\theta}) d\rho = \int_0^r e^{i\theta} f'(\rho e^{i\theta}) d\rho$$

Donc :

$$\begin{aligned} |f(re^{i\theta})| &\leq \int_0^r |f'(\rho e^{i\theta})| d\rho \\ &\leq \int_0^r \frac{1+\rho}{(1-\rho)^3} d\rho \\ &= \int_0^r \left( \frac{2}{(1-\rho)^3} - \frac{1}{(1-\rho)^2} \right) d\rho \\ &= \left[ \frac{1}{(1-\rho)^2} - \frac{1}{1-\rho} \right]_0^r \\ &= \frac{r}{(1-r)^2} \end{aligned}$$

Donc

$$|f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}$$

Pour démontrer la partie gauche, séparons deux cas.

i) Supposons d'abord que  $|f(z)| \geq \frac{1}{4}$ . Comme  $\frac{1}{4} \geq \frac{|z|}{(1+|z|)^2}$  sur  $\mathbb{D}$ , on a l'inégalité.

ii) Si  $|f(z)| < \frac{1}{4}$  alors par le théorème du quart de Koebe, le segment  $[0, f(z)]$  est contenu dans l'image de  $f$ . Si on note  $\alpha := f^{-1}([0, f(z)])$ ,  $\alpha$  est un arc de Jordan joignant  $f^{-1}(0) = 0$  à  $f^{-1}(f(z)) = z$ .

On a :

$$f(z) = \int_{\alpha} f'(\omega) d\omega = \int_0^{\alpha^{-1}(z)} f'(\alpha(t)) \alpha'(t) dt = \int_0^{\alpha^{-1}(z)} \frac{d}{dt} f(\alpha(t)) dt$$

Quand  $t$  parcourt l'intervalle  $[0, \alpha^{-1}(z)]$ ,  $f(\alpha(t))$  parcourt le segment  $[0, f(z)]$ , donc l'argument de  $f(\alpha(t))$  est constant donc celui de  $\frac{d}{dt} f(\alpha(t))$  l'est aussi.

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \int_0^{\alpha^{-1}(z)} \left| \frac{d}{dt} f(\alpha(t)) \right| dt \\ &= \int_0^{\alpha^{-1}(z)} |\alpha'(t)| |f'(\alpha(t))| dt \end{aligned}$$

On considère la fonction  $t \mapsto |\alpha(t)|$ , cette fonction est dérivable sur  $]0, \alpha^{-1}(z)[$  et dérivable à droite en 0, on a :

$$\frac{d}{dt} |\alpha(t)| = \frac{1}{2} \left( \alpha'(t) \frac{\overline{\alpha(t)}}{|\alpha(t)|} + \overline{\alpha'(t)} \frac{\alpha(t)}{|\alpha(t)|} \right)$$

donc :

$$\left| \frac{d}{dt} |\alpha(t)| \right| \leq \frac{1}{2} (|\alpha'(t)| + |\overline{\alpha'(t)}|) = |\alpha'(t)|$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} |f(z)| &\geq \int_0^{\alpha^{-1}(z)} |f'(\alpha(t))| \left| \frac{d}{dt} |\alpha(t)| \right| dt \\ &\geq \int_0^{\alpha^{-1}(z)} \frac{1 - |\alpha(t)|}{(1 + |\alpha(t)|)^3} \left| \frac{d}{dt} |\alpha(t)| \right| dt \text{ par le théorème de distorsion} \\ &\geq \int_0^{\alpha^{-1}(z)} \frac{1 - u}{(1 + u)^3}(t) u'(t) dt \\ &= \left[ \frac{r}{(1 + r)^2} \right]_0^{|z|=u(\alpha^{-1}(z))} \\ &= \frac{|z|}{(1 + |z|)^2} \end{aligned}$$

□

## 5 Prérequis topologiques.

Dans cette partie, nous donnons quelques résultats d'ordre topologique sur l'espace des fonctions holomorphes sur  $\mathbb{D}$  et sur l'ensemble  $\mathcal{S}$ . Nous définissons également une notion de convergence pour les ouverts simplement connexes de  $\mathbb{C}$ , et commençons la description d'une certaine classe de bijections conformes : les fonctions *slit*.

On peut utiliser la majoration fournie par le théorème de croissance pour prouver la compacité de  $\mathcal{S}$  dans  $\mathcal{H}(\mathbb{D})$  sur  $\mathbb{D}$  pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts.

**Proposition 5.1** (Compacité des fonctions *schlicht*). *L'ensemble  $\mathcal{S}$  est compact dans  $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ .*

*Démonstration.* i)  $\mathcal{S}$  est relativement compacte :

Il suffit en vertu du théorème de Montel de montrer que  $\mathcal{S}$  est uniformément bornée sur les compacts. Or, si  $K \subset \mathbb{D}$  est compact, alors par le théorème de distorsion

$$|f(z)| \leq \frac{\max_K |z|}{(1 - \max_K |z|)^2}$$

et la borne ne dépend pas de  $f$ .

ii)  $\mathcal{S}$  est fermée :

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$  telles que  $f_n \rightarrow f$  (pour la convergence uniforme sur tout compact).

Alors :

-  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$  et  $f' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n$  par le théorème de Weierstrass

- Soit  $f \equiv z_0 \in \mathbb{C}$ , soit  $f$  est injective, par le théorème de Hurwitz

$(f_n)$  converge uniformément sur les compacts de  $\mathbb{D}$  vers  $f$ , *a fortiori* point par point.

Ainsi :

-  $f(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 0$

-  $f'(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(0) = 1$

On a d'autre part que si  $f$  est constante alors  $f \equiv 0$ , mais alors  $f'(0) = 0$ , ce qui est impossible donc  $f$  est injective. Finalement,  $f \in \mathcal{S}$ .

iii) Conclusion :

$\mathcal{S}$  est relativement compacte, donc  $\bar{\mathcal{S}}$  est compacte, et  $\mathcal{S}$  est fermée donc  $\mathcal{S} = \bar{\mathcal{S}}$ . □

### 5.1 Structure d'espace métrique.

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ . On munit l'espace  $\mathcal{C}(U)$  des fonctions continues sur  $U$  de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de  $U$  : pour  $f \in \mathcal{C}(U)$  et  $K \subset U$  compact, on définit :

$$\|f\|_K = \sup\{|f(z)|, z \in K\}$$

On définit un système fondamental de voisinages de 0 par :

$$\{V(K, \epsilon) : K \subset U \text{ compact}, \epsilon > 0\}$$

avec  $V(K, \epsilon) = \{f \in \mathcal{C}(U) : \|f\|_K < \epsilon\}$ .

On va également définir une métrique.

**Définition 5.1.** Une *suite exhaustive*  $(K_n)$  de compacts de  $U$ , est une suite croissante de compacts telle que tout compact de  $U$  soit contenu dans un  $K_n$

Par exemple, considérons les disques fermés contenus dans  $U$ , de centre et de rayon rationnels (ici, centre rationnel désigne un point dont les parties réelle et imaginaire sont rationnelles). Ces disques forment une famille dénombrable, que l'on indexe par  $i$ .

Considérons alors :

$$K_n = \bigcup_{i \leq n} D_i$$

Les  $K_n$  forment une suite exhaustive, en effet les intérieurs des disques  $D_i$  forment un recouvrement ouvert de  $U$  et par conséquent tout compact de  $U$  est inclus dans un  $K_n$  (et bien sûr, la suite est croissante).

On a alors la distance :

$$d_{\mathcal{CUC}(U)}(f, g) = \sum_{n \geq 0} \min\{\|f - g\|_{K_n}; 1\} \frac{1}{2^n}$$

Montrons que c'est bien une distance :

- Positivité : évident

- Symétrie :  $\|f - g\|_{K_n} = \|g - f\|_{K_n}$  donc  $d_{\mathcal{CUC}(U)}(f, g) = d_{\mathcal{CUC}(U)}(g, f)$

- Séparation :

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{CUC}(U)}(f, g) = 0 & \\ \Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} \min\{\|f - g\|_{K_n}; 1\} \frac{1}{2^n} = 0 & \\ \Leftrightarrow \min\{\|f - g\|_{K_n}; 1\} = 0 \text{ pour tout } n & \\ \Leftrightarrow \sup_{K_n} |f(z) - g(z)| = 0 \text{ pour tout } n & \\ \Leftrightarrow f|_{K_n} \equiv g|_{K_n} \text{ pour tout } n & \end{aligned}$$

et comme  $U = \bigcup_{n \geq 0} K_n$ ,  $f \equiv g$  sur  $U$ .

- Inégalité triangulaire :

On a

$$\|f - g\|_{K_n} + \|g - h\|_{K_n} \geq \|f - h\|_{K_n}$$

donc

$$\min\{\|f - g\|_{K_n}; 1\} + \min\{\|g - h\|_{K_n}; 1\} \geq \min\{\|f - h\|_{K_n}; 1\}$$

Donc  $d_{\mathcal{CUC}(U)}(f, g) + d_{\mathcal{CUC}(U)}(g, h) \geq d_{\mathcal{CUC}(U)}(f, h)$ .

Ainsi,  $d_{\mathcal{CUC}(U)}$  est bien une distance sur  $\mathcal{C}(U)$ , et donc sur  $\mathcal{H}(U)$ .

Enfin, si  $F \subset \mathcal{C}(U)$ ,  $F$  est un ouvert si :

$$\forall f \in F, \exists K \subset U \text{ compact}, \exists \epsilon > 0 : f + V(K, \epsilon) \subset F$$

On a alors que  $\mathcal{H}(U)$  est fermé dans  $\mathcal{C}(U)$  et que les applications  $f \mapsto f^{(k)}$  sont continues sur  $\mathcal{H}(U)$  (théorème de Weierstrass).

L'espace  $\mathcal{H}(U)$  muni de la distance  $d_{\mathcal{CUC}(U)}$  est alors un espace métrique et la topologie induite par  $d_{\mathcal{CUC}(U)}$  est la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. Cela aura beaucoup d'importance par la suite, notamment pour extraire des sous-suites convergentes lors de la preuve du théorème d'approximation de Loewner.

## 5.2 Principe de subordination, convergence de Carathéodory.

Nous allons dans la suite beaucoup nous intéresser à la convergence de certaines suites de fonctions univalentes, et nous aurons besoin d'un critère bien utile qui la caractérise par une certaine notion de convergence des images des fonctions, à savoir la convergence au sens des noyaux de Carathéodory. Premièrement, nous donnons quelques définitions et propriétés.

**Définition 5.2** (Rayon conforme). Soit  $U$  un ouvert simplement connexe propre de  $\mathbb{C}$ , et soit  $\Phi : \mathbb{D} \rightarrow U$  une application conforme envoyant 0 sur  $z_0 \in U$ .

On définit le *rayon conforme* de  $U$  autour de  $z_0$  :  $RC_{z_0}(U) = |\Phi'(0)|$ .

Par exemple, pour tout  $z_0 \in \mathbb{D}$ , pour tout  $r > 0$ ,  $RC_{z_0}(D(z_0, r)) = r$  : en effet, une application conforme est donnée par  $\Phi(z) = \pm rz + z_0$ .

La définition fait sens, en effet l'existence de la fonction  $\Phi$  vient du théorème de représentation de Riemann, et on montre que le choix de  $\Phi$  n'a pas d'importance : soient  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  deux applications conformes de  $\mathbb{D}$  dans  $U$  envoyant 0 sur  $z_0$ .

L'application  $\Phi_1^{-1} \circ \Phi_2$  est un automorphisme de  $\mathbb{D}$ , donc de la forme  $\lambda \frac{z-w}{1-\bar{z}w}$  avec  $|\lambda| = 1$  et  $|w| < 1$ .

Comme  $\Phi_1^{-1} \circ \Phi_2(0) = 0$ , alors  $w = 0$ , donc  $\Phi_1^{-1} \circ \Phi_2 = \lambda \text{Id}$ .

On a :

$$(\Phi_1^{-1} \circ \Phi_2)' = \frac{\Phi_2'}{\Phi_1' \circ \Phi_1^{-1} \circ \Phi_2}$$

D'où en 0,  $|\Phi_2'(0)/\Phi_1'(0)| = 1$ .

Le rayon conforme est monotone en  $U$  : si  $U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq \mathbb{C}$ , et  $z_0 \in U_1$ , alors  $RC_{z_0}(U_1) < RC_{z_0}(U_2)$ . Ce résultat est une application du principe de subordination, qui suit.

Par conséquent, si  $r > 0$  est le rayon du plus grand disque contenu dans  $U$  centré en  $z_0$ , alors  $RC_{z_0}(U) \geq r$ .

Par le théorème du quart de Koebe, si  $\Phi$  est une application conforme de  $\mathbb{D}$  dans  $U$  telle que  $\Phi(0) = z_0$ , alors  $U = \Phi(\mathbb{D})$  contient le disque centré en  $z_0$  et de rayon  $|\Phi'(0)|/4$ . On a donc :

$$\frac{|\Phi'(0)|}{4} \leq r$$

et donc le rayon conforme de  $U$  autour de  $z_0$  est majoré par  $4r$ .

Finalement on a :

**Proposition 5.2.** *Si  $U$  est un ouvert simplement connexe propre contenant  $z_0$ , alors le rayon conforme  $RC_{z_0}(U)$  de  $U$  autour de  $z_0$  vérifie :*

$$r \leq RC_{z_0}(U) \leq 4r$$

où  $r$  est le rayon du plus grand disque contenu dans  $U$  centré en  $z_0$ .

**Théorème 5.3** (Principe de subordination). *Soient  $f$  et  $g$  univalentes sur  $\mathbb{D}$  telles que  $f(0) = g(0)$ . On dit que  $f$  est subordonnée à  $g$  s'il existe une fonction  $\phi$  univalente de  $\mathbb{D}$  dans lui-même, telle que  $\phi(0) = 0$  et  $f = g \circ \phi$ .*

*Si  $f$  est subordonnée à  $g$  alors :*

- i)  $f(\mathbb{D}) \subset g(\mathbb{D})$
- ii)  $|f'(0)| \leq |g'(0)|$
- iii)  $\forall 0 \leq r < 1, f(D(0, r)) \subset g(D(0, r))$

*On dira que  $f$  est strictement subordonnée à  $g$  si  $\phi$  envoie  $\mathbb{D}$  dans un domaine strictement inclus dans  $\mathbb{D}$ . Les points i) et ii) sont alors des inclusions et inégalités strictes.*

*Démonstration.* (Déf  $\Rightarrow$  i) Soit  $z \in f(\mathbb{D})$ , alors il existe  $w \in \mathbb{D}$  tel que  $z = f(w) = g(\phi(w))$ . Comme  $\phi(w) \in \mathbb{D}$  alors on a bien  $z \in g(\mathbb{D})$ .

Si la subordination est stricte, alors on a  $z \in g(U) \subsetneq g(\mathbb{D})$  où  $U$  est l'image de  $\phi$ .

(i  $\Rightarrow$  Déf) Réciproquement si  $f(\mathbb{D}) \subset g(\mathbb{D})$  alors  $g^{-1} \circ f$  est une fonction univalente à valeurs dans  $\mathbb{D}$  et fixant 0, on pose  $\phi = g^{-1} \circ f$ .

Si les domaines  $f(\mathbb{D})$  et  $g(\mathbb{D})$  sont strictement inclus l'un dans l'autre alors il vient immédiatement que l'image de  $\phi$  est strictement incluse dans  $\mathbb{D}$ .

(Déf  $\Rightarrow$  ii) Comme  $\phi$  envoie  $\mathbb{D}$  dans lui-même et fixe 0, on a par le lemme de Schwarz  $0 < |\phi'(0)| \leq 1$ , soit  $|f'(0)|/|g'(0)| \leq 1$ , soit  $|f'(0)| \leq |g'(0)|$ .

Si la subordination est stricte, alors  $|\phi'(0)| < 1$  par le lemme de Schwarz, et on a ainsi  $|f'(0)| < |g'(0)|$ .

(Déf  $\Rightarrow$  iii) Soit  $z \in f(D(0, r))$ , alors il existe  $w$  dans  $D(0, r)$  tel que  $z = f(w) = g(\phi(w))$ , mais  $|\phi(w)| \leq |w|$  par le lemme de Schwarz, donc  $\phi(w) \in D(0, r)$ , donc  $z \in g(D(0, r))$ .  $\square$

**Définition 5.3** (Convergence au sens des noyaux). Soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'ouverts simplement connexes propres de  $\mathbb{C}$  contenant 0. Le *noyau* de la suite  $(U_n)$  est l'ensemble de tous les  $w \in \mathbb{C}$  tels qu'il existe un ouvert simplement connexe contenant 0 et  $w$ , contenu dans tous les  $U_n$  pour  $n$  assez grand.

Si la suite  $(U_n)$  est croissante, alors le noyau est la réunion des  $U_n$ , si elle est décroissante alors le noyau est soit l'intérieur de l'intersection s'il est non-vide, soit  $\{0\}$ .

On dit que  $U_n$  converge au sens des noyaux vers  $U$  si toute sous-suite de  $(U_n)$  a même noyau  $U$ .

On peut maintenant énoncer le résultat qui nous intéresse :

**Théorème 5.4** (des noyaux de Carathéodory). Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'applications conformes de  $\mathbb{D}$  dans leurs images  $U_n$ , qui forment donc une suite d'ouverts simplement connexes propres de  $\mathbb{C}$ . Soit  $f : \mathbb{D} \rightarrow U = f(\mathbb{D})$  une application conforme. On suppose pour tout  $n$ ,  $f_n(0) = f(0) = 0$  et  $f'_n(0), f'(0) > 0$ .

Alors  $f_n$  converge uniformément sur les compacts vers  $f$  si et seulement si  $U_n$  converge au sens des noyaux vers  $U$ .

*Démonstration.* 1) Montrons l'implication directe, il s'agit de montrer que si  $f_n$  converge uniformément sur les compacts vers  $f$  alors  $U = f(\mathbb{D})$  est le noyau de toute sous-suite de  $(U_n)$ .

i) Montrons que si  $w \in U$ , alors il existe un ouvert simplement connexe contenant 0 et  $w$  contenu dans tous les  $U_n$  pour  $n$  assez grand.

Soit  $w \in U$ , alors il existe  $0 < r < r' < 1$  tels que  $w \in f(\overline{D}(0, r)) \subset f(D(0, r')) \subset U$ . On va montrer qu'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $f(D(0, r)) \subset U_n$ .

Par l'absurde, supposons qu'il existe une extraction  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante telle que pour tout  $n$ , il existe  $z_{\phi(n)} \in D(0, r)$  tel que  $w_{\phi(n)} := f(z_{\phi(n)}) \notin U_{\phi(n)}$ .

Comme la suite  $(z_{\phi(n)})$  est bornée, il existe une seconde extraction  $\psi$  et un  $z \in \overline{D}(0, r)$  tels que  $z_{\phi \circ \psi(n)} \rightarrow z$ .

Donc  $f(z_{\phi \circ \psi(n)}) \rightarrow f(z)$ . On note  $w := f(z)$ , on a donc  $w \in f(\overline{D}(0, r)) \subset D(0, r')$ .

Les fonctions  $f_{\phi \circ \psi(n)} - w_{\phi \circ \psi(n)}$  convergent uniformément sur les compacts de  $\mathbb{D}$  vers la fonction  $f - w$ , qui s'annule une unique fois sur  $D(0, r')$  par injectivité de  $f$ .

Par le théorème de Hurwitz, les fonctions  $f_{\phi \circ \psi(n)} - w_{\phi \circ \psi(n)}$  ont également un unique zéro dans  $D(0, r')$  et alors  $w_{\phi \circ \psi(n)} \in f_{\phi \circ \psi(n)}(D(0, r')) \subset U_{\phi \circ \psi(n)}$ , d'où la contradiction.

ii) Montrons que si  $(U_{n_j})$  est une sous-suite de  $(U_n)$  et  $w \in \mathbb{C}$  est tel qu'il existe  $V$  ouvert simplement connexe contenant 0 et  $w$  et contenu dans  $U_{n_j}$  pour tout  $j$  assez grand, alors  $w \in U = f(\mathbb{D})$ .

On considère les applications inverse  $f_{n_j}^{-1} : V \rightarrow \mathbb{D}$ .

Ces fonctions sont holomorphes et uniformément bornées, donc forment une famille relativement compacte par le théorème de Montel. Il existe donc une sous-suite (qu'on appelle encore  $(U_{n_j})$ ) qui converge vers une limite holomorphe  $g$ , à valeurs dans  $\overline{\mathbb{D}}$ .

Si  $g$  est non constante, par le théorème de l'application ouverte on sait en fait que  $g$  est à valeurs dans  $\mathbb{D}$  (si  $g$  est constante alors elle est nulle partout donc d'image dans  $\mathbb{D}$ ), et en particulier  $g(w) \in \mathbb{D}$ .

Comme  $f_{n_j}^{-1}(w) \rightarrow g(w)$  et  $f_{n_j} \rightarrow f$  uniformément sur les compacts, on a  $f_{n_j}(f_{n_j}^{-1}(w)) \rightarrow f(g(w))$

donc  $f(g(w)) = w$  et  $w \in U$ .

2) Montrons l'implication réciproque, c'est-à-dire : si  $U$  est le noyau de toute sous-suite de  $(U_n)$ , alors  $f_n$  tend vers  $f$  uniformément sur les compacts.

Il suffit de montrer que de toute sous-suite de  $(f_n)$  on peut extraire une autre sous-suite de limite  $f$ . Comme  $\{0\} \subsetneq U$ , il existe  $r > 0$  tel que le disque de centre 0 et de rayon  $r$  soit contenu dans les  $U_n$  pour  $n$  suffisamment grand. Soit  $R$  le plus grand rayon pour lequel le disque de centre 0 et de rayon  $R$  soit inclus dans  $U$ . Comme  $U \subsetneq \mathbb{C}$ , le rayon conforme de  $U_n$  autour de 0 est borné entre  $r$  et  $4R$ , c'est-à-dire que  $|f'_n(0)|$  est borné par  $r$  et  $4R$ .

De plus, soit  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante et soit  $\tilde{f}_{\phi(n)} := f_{\phi(n)}/f'_{\phi(n)}(0)$ . Ces fonctions sont *schlicht* et forment une famille relativement compacte.

Par conséquent il existe une autre extraction  $\psi$  et une fonction holomorphe  $g$  telles que  $\tilde{f}_{\phi \circ \psi(n)} \rightarrow g/c$  uniformément sur les compacts, où  $r \leq c \leq 4R$ . Donc  $f_{\phi \circ \psi(n)} \rightarrow g$  uniformément sur les compacts.

Comme  $\tilde{f}'_{\phi \circ \psi(n)}(0) = 1 > 0$ ,  $g'(0) > 0$ , donc  $g$  est non constante, donc univalente par le théorème de Hurwitz.

Soit  $V = g(\mathbb{D})$ . Par l'implication directe appliquée à  $g$  et  $V$ , on a que  $V$  est le noyau de tous les  $U_{n_j}$  pour  $j$  assez grand, mais par hypothèse c'est aussi  $U$ , donc  $U = V$ . Par unicité de la bijection biholomorphe,  $f = g$ .

□

### 5.3 Classe $\mathcal{S}^*$ des déchirures.

On va maintenant s'intéresser à un type particulier de bijections conformes, qu'on appelle *déchirures*, ou encore fonctions *slit*. Ces fonctions ont pour images le plan complexe "déchiré", c'est-à-dire privé d'un arc de Jordan partant à l'infini. Ces fonctions jouent un rôle particulier dans la méthode de Loewner et la preuve de la conjecture de Bieberbach.

**Définition 5.4** (Fonctions *slit*). Un domaine *slit* est un ouvert simplement connexe de  $\mathbb{C}$ , qui est le complémentaire dans  $\mathbb{C}$  d'un arc de Jordan du type  $\{\gamma(t) : t \geq 0\}$  avec  $\gamma(0) \in \mathbb{C}$  et  $|\gamma(t)| \rightarrow \infty$  (par exemple l'image de  $\mathbb{D}$  par la fonction de Koebe  $k(\mathbb{D}) = \mathbb{C} \setminus ]-\infty, -\frac{1}{4}]$ ).

Une fonction ayant pour image un tel domaine est dite *slit*. L'ensemble des fonctions de  $\mathcal{S}$  possédant cette propriété est noté  $\mathcal{S}^*$ .

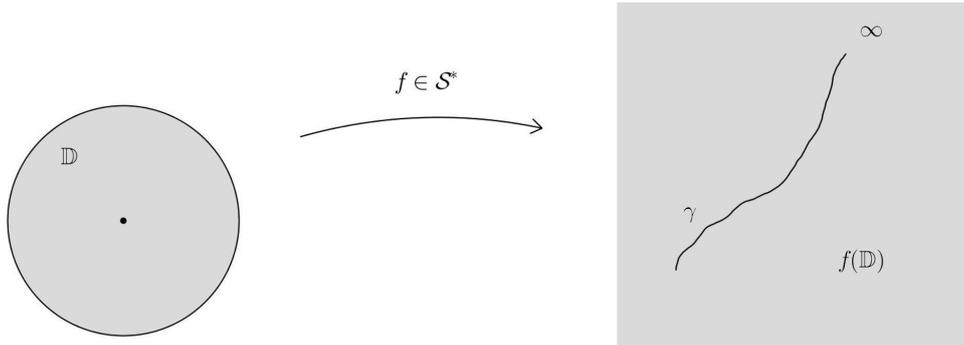


FIGURE 4 – Les fonctions *slit*.

**Théorème 5.5** (d'approximation de Loewner). Soit  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction univalente. Alors il existe une suite  $f_n : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  de fonctions univalentes, ayant pour images des domaines *slit*, convergeant uniformément sur les compacts vers  $f$ . Ainsi,  $\mathcal{S}^*$  est dense dans  $\mathcal{S}$ .

**Lemme.** Pour toute  $f \in \mathcal{S}$ , il existe une suite  $(f_n)$  de fonctions de  $\mathcal{S}$  convergeant uniformément sur les compacts vers  $f$ , et telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n(\mathbb{D})$  est délimitée par un lacet injectif.

*Démonstration.* On pose

$$f_n(z) = \frac{f((1 - 1/2^n)z)}{1 - 1/2^n}$$

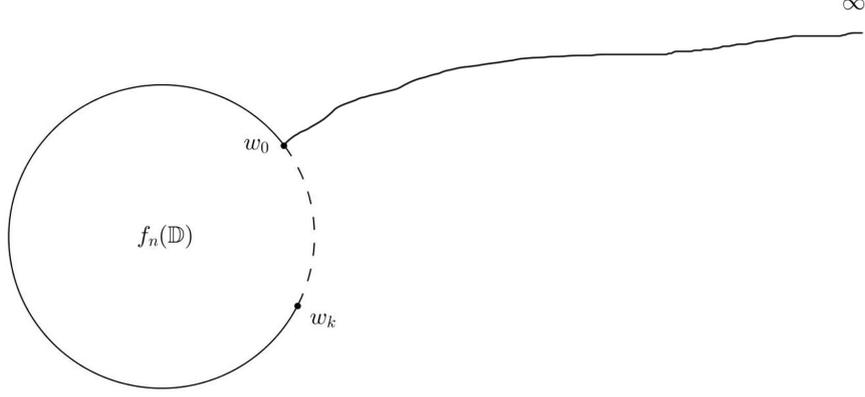


FIGURE 5 – Le chemin  $\gamma_{n,k}$ .

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Alors  $f_n$  converge uniformément vers  $f$  sur tout compact de  $\mathbb{D}$  : la convergence est indépendante de  $z$ . De plus,  $f_n(\mathbb{D})$  est délimitée par le lacet défini par

$$\gamma_n(t) = \frac{f((1 - 1/2^n)e^{it})}{1 - 1/2^n}$$

pour  $t \in [0, 2\pi]$ .

Les fonctions  $f_n$  ainsi définies sont bien dans  $\mathcal{S}$ . □

*Preuve du théorème.* Soit  $(f_n)$  définie comme dans le lemme, et soit  $n \geq 1$ .

On veut trouver une suite  $(f_{n,k})$  de fonctions univalentes *slit* qui converge uniformément vers  $f_n$  sur les compacts de  $\mathbb{D}$ .

Soit  $w_0 \in \gamma_n = \partial f_n(\mathbb{D})$ , et soit  $\gamma_{n,k}$  un arc de Jordan joignant un point à l'infini à  $w_0$ , puis empruntant  $\gamma_n$  jusqu'à  $w_k \in \gamma_n$ , en restant injectif (voir illustration).

On note  $D_k = \mathbb{C} - \gamma_{n,k}$ , et  $g_{n,k}$  l'unique application conforme de  $\mathbb{D}$  dans  $D_k$  satisfaisant  $g_{n,k}(0) = 0$  et  $g'_{n,k}(0) \in (0, \infty)$ .

On choisit la suite  $(w_k)$  de sorte que  $\gamma_{n,k} \subset \gamma_{n,k+1}$  et  $\lim_{k \rightarrow \infty} w_k = w_0$ .

Alors  $D_{k+1} \subset D_k$ , donc  $f_n(\mathbb{D})$ , qui est l'intérieur de la composante connexe de l'intersection des  $D_k$  contenant 0, est le noyau de la suite  $(D_k)$ , avec  $\lim_{k \rightarrow \infty} D_k = f_n(\mathbb{D})$  au sens des noyaux.

Par le théorème des noyaux de Carathéodory,  $g_{n,k} \rightarrow f_n$  uniformément sur les compacts de  $\mathbb{D}$ .

Par le théorème de Weierstrass, la convergence a lieu aussi pour les dérivées et donc  $\lim_{k \rightarrow \infty} g'_{n,k}(0) = f'_n(0) = 1$ .

Alors la suite  $(f_{n,k}) := g_{n,k}/g'_{n,k}(0)$  converge vers  $f_n$  uniformément sur les compacts de  $\mathbb{D}$ , et les  $f_{n,k}$  sont bien des fonctions *slit* de  $\mathcal{S}$ .

On a donc :

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n,k} &= f_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f_n &= f \end{aligned}$$

C'est-à-dire :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, d_{\text{CUC}(U)}(f_n, f) < \frac{\epsilon}{2}$$

et

$$\forall n \geq N, \exists K_n \in \mathbb{N} : \forall k \geq K_n, d_{\text{CUC}(U)}(f_{n,k}, f_n) < \frac{\epsilon}{2}$$

Si  $n \geq N$ , on a alors :

$$d_{\text{CUC}(U)}(f_{n,K_n}, f) \leq d_{\text{CUC}(U)}(f_{n,K_n}, f_n) + d_{\text{CUC}(U)}(f_n, f) \leq \epsilon$$

On peut donc extraire des  $f_{n,k}$  une sous-suite convergeant vers  $f$ . □

**Remarque.**

- i) Ici, on utilise la structure d'espace métrique de  $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ .
- ii) On a prouvé le résultat pour les fonctions schlicht, mais par renormalisation on obtient immédiatement le cas général.

## 6 Méthode de Loewner - Cas $n = 3$ de la conjecture de Bieberbach.

### 6.1 Idée générale.

Avant de rentrer dans les détails, il peut être bon d'avoir une vision globale de la méthode de Loewner, qui nous permettra de prouver le cas  $n = 3$ .

Premièrement, la définition centrale.

**Définition 6.1** (Chaîne de Loewner). Une *chaîne de Loewner* est une famille  $(f_t)_{t \geq 0}$  de fonctions univalentes sur  $\mathbb{D}$  vérifiant :

- i)  $f_t(0) = 0$
- ii)  $f'_t(0) = e^t$  (en particulier  $f_0 \in \mathcal{S}$ )
- iii)  $f_t(\mathbb{D}) \subsetneq f_s(\mathbb{D})$  dès que  $0 \leq t < s < \infty$ .

Étant donnée une fonction  $f$  dans  $\mathcal{S}^*$ , avec  $f(\mathbb{D}) = \mathbb{C} \setminus \gamma$ , où  $\gamma$  est un arc de Jordan partant à l'infini, si on note  $f_t$  la bijection conforme entre  $\mathbb{D}$  et  $\mathbb{C} \setminus \gamma|_{[t, \infty[}$  avec  $f'_t(0) > 0$ , alors on montre que les coefficients de Taylor de  $f_t$  sont continus en  $t$ . On montre également qu'on peut reparamétriser  $\gamma$  de sorte à avoir  $f'_t(0) = e^t$ , c'est la *paramétrisation standard* de  $\gamma$  (on change  $t$  en  $\sigma(t) = (t \mapsto f'_t(0))^{-1}(e^t)$ ). La famille  $(f_t)$  ainsi construite est unique, c'est la chaîne de Loewner commençant en  $f$  (théorème de Loewner).

On considère ensuite la fonction  $g$  définie par  $g(z, t) = f_t^{-1}(f(z))$ , qu'on peut écrire :

$$g(z, t) = e^{-t} \left( z + \sum_{n \geq 2} a_n(t) z^n \right)$$

où les  $a_n(t)$  sont continus en  $t$ . On montre qu'alors on a la convergence :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a_n(t) = a_n$$

Où  $a_n$  est le  $n$ -ième coefficient de Taylor de  $f$ . On étudie ensuite les fonctions  $h_{s,t} = f_t^{-1} \circ f_s$ , où  $s < t$ . Ce sont des "petites" fonctions *slit* au sens où ce sont des bijections conformes de  $\mathbb{D}$  dans le complémentaire d'un "petit" arc de Jordan dans  $\mathbb{D}$ .

On montre que :

$$\lim_{t \searrow s} h_{s,t} = \text{Id}_{\mathbb{C}}$$

et que la convergence est uniforme sur les compacts de  $\mathbb{D}$  ne contenant pas un certain point de  $\partial\mathbb{D}$ , lui-même dépendant de  $s$ .

On montre que cette dépendance est continue, c'est à dire qu'on a exhibé une fonction continue  $\lambda$  à valeurs dans  $\partial\mathbb{D}$ .

Ensuite, grâce au travail effectué sur  $h_{s,t}$  et  $\lambda$ , on montre que  $g$  vérifie l'équation de Loewner :

$$\partial_t g(z, t) = -g(z, t) \frac{1 + \kappa(t)g(z, t)}{1 - \kappa(t)g(z, t)} \quad (\text{L})$$

où on a posé  $\kappa = \bar{\lambda}$ .

En injectant  $g$  sous forme de série entière dans (L), on obtient les relations :

$$a'_n(t) = \kappa(t) e^{-t} \sum_{k=1}^n (a_k(t) a'_{n-k}(t) - 2a_k(t) a_{n-k}(t))$$

Pour  $n = 2, 3$ , ces relations sont facilement intégrables et conduisent aux cas correspondants de la conjecture de Bieberbach (on a  $a_n(t) \rightarrow a_n$  donc  $a_n = \int_0^\infty a'_n(t) dt$ ).

En revanche, dès  $n = 4$ , cela devient impossible. A titre d'exemple, voici la relation vérifiée par le quatrième coefficient :

$$a'_4(t) = -2\kappa(t)^3 e^{-3t} - 6\kappa(t)^2 e^{-2t} a_2(t) - 2\kappa(t) e^{-t} a_2^2(t) - 4\kappa(t) e^{-t} a_3(t)$$

Rentrons maintenant dans le vif du sujet.

## 6.2 Existence et unicité d'une chaîne de Loewner.

**Théorème 6.1** (de Loewner). *Soit  $f \in \mathcal{S}^*$ . Il existe une unique chaîne de Loewner  $(f_t)_{t \geq 0}$  avec  $f_0 = f$ .*

*Démonstration.* Par hypothèse,  $f(\mathbb{D})$  est un domaine *slit*. Soit  $\gamma : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{C}$  l'arc de Jordan "partant à l'infini" dont  $f(\mathbb{D})$  est le complémentaire. Pour tout  $t \geq 0$ , notons  $f_t$  la fonction univalente sur  $\mathbb{D}$  caractérisée de manière unique par  $f_t(0) = 0$ ,  $f_t'(0) > 0$  et  $f_t(\mathbb{D}) = \mathbb{C} \setminus \gamma([t, \infty[)$  (l'existence et l'unicité proviennent du théorème de représentation de Riemann).

On a  $f_0 = f$  et si  $t < s$ ,  $f_t(\mathbb{D}) \subsetneq f_s(\mathbb{D})$ .

Le but de la preuve est de montrer qu'on peut reparamétriser  $\gamma$  de manière à avoir  $f_t'(0) = e^t$ . Nous procéderons en quatre étapes :

i) Montrons que  $t \mapsto f_t'(0)$  est continue.

Soit  $t \in [0, \infty[$ , on considère  $(t_n)_N$  une suite de  $\mathbb{R}_+$  telle que  $t_n \rightarrow t$  quand  $n$  va à l'infini. On remarque que  $f_t(\mathbb{D})$  est le noyau de la suite  $(f_{t_n}(\mathbb{D}))_N$ , en effet si  $z \in f_t(\mathbb{D})$ , alors pour  $N$  suffisamment grand  $z$  est dans  $f_{t_n}(\mathbb{D})$  pour tout  $n \geq N$ . Donc  $f_{t_n}(\mathbb{D})$  converge vers  $f_t(\mathbb{D})$  au sens des noyaux.

Par le théorème des noyaux de Carathéodory,  $f_{t_n} \rightarrow f_t$  uniformément sur les compacts de  $\mathbb{D}$ . On a ensuite par le théorème de Weierstrass que  $f_{t_n}'$  converge uniformément sur les compacts vers  $f_t'$ , et en particulier  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{t_n}'(0) = f_t'(0)$  dès que  $t_n$  tend vers  $t$ . D'où la continuité.

Nous étendrons ce résultat juste après la preuve.

ii)  $t \mapsto f_t'(0)$  est strictement croissante par le principe de subordination.

iii) Bilan et reparamétrisation.

Comme  $f_0 = f$  et  $f'(0) = 1$ , on a  $f_0'(0) = 1$ . Comme  $t \mapsto f_t'(0)$  est strictement croissante, alors  $f_t'(0) > 0$  pour tout  $t$ . De plus, comme  $|\gamma(t)|$  tend vers  $+\infty$  quand  $t \rightarrow \infty$ , alors pour tout  $r > 0$  il existe un  $t$  tel que le disque de centre 0 et de rayon  $r$  soit inclus dans  $f_t(\mathbb{D})$ , donc le rayon conforme de  $f_t(\mathbb{D})$ , qui est minoré par  $r$ , tend vers l'infini, donc  $f_t'(0)$  diverge vers l'infini.

Finalement, on a montré que la fonction  $t \mapsto f_t'(0)$  est continue, strictement croissante, strictement positive, divergeant à l'infini quant  $t$  va à l'infini, et telle que  $f_0'(0) = 1$ . On a donc que cette fonction est bijective de  $[0, \infty[$  dans  $[1, \infty[$ .

On peut donc reparamétriser  $\gamma$  de sorte que  $f_t'(0) = e^t$ , et on aura construit une chaîne de Loewner commençant en  $f$ .

On prend une reparamétrisation  $\tilde{\gamma}$  de  $\gamma$  telle que  $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(\sigma(t))$ , et  $\tilde{f}_t = f_{\sigma(t)}$  la fonction associée, d'image  $\mathbb{C} \setminus \tilde{\gamma}([t, \infty[) = \mathbb{C} \setminus \gamma([\sigma(t), \infty[)$ .

On veut  $\tilde{f}_t'(0) = f_{\sigma(t)}'(0) = e^t$ , donc on prend  $\sigma(t) = (t \mapsto f_t'(0))^{-1}(e^t)$ , ce qui fait sens par bijectivité de la fonction comme dit plus haut.

On désignera toujours par  $\gamma$  la reparamétrisation de la courbe qu'on vient de décrire, qui s'appelle *paramétrisation standard* de  $\gamma$ .

iv) Montrons pour finir l'unicité.

Supposons qu'il existe deux chaînes de Loewner  $(f_t)$ ,  $(g_t)$  avec  $f_0 = g_0 = f$ .

Comme  $f(\mathbb{D})$  est contenu dans  $f_t(\mathbb{D})$  et  $g_t(\mathbb{D})$ , les complémentaires dans  $\mathbb{C}$  de  $f_t(\mathbb{D})$  et  $g_t(\mathbb{D})$  sont des portions de la courbe  $\gamma$ .

Comme  $\mathbb{C} \setminus f_t(\mathbb{D})$  et  $\mathbb{C} \setminus g_t(\mathbb{D})$  sont connexes et non bornés, ces portions de courbe sont de la forme  $\gamma([T, \infty[)$  avec  $T \geq 0$ , et sont donc incluses l'une dans l'autre.

Ainsi, seules ces deux configurations sont possibles : soit on a  $f_t(\mathbb{D}) \subset g_t(\mathbb{D})$ , soit l'inverse.

Si  $f_t(\mathbb{D}) \subset g_t(\mathbb{D})$ , alors  $g_t^{-1} \circ f_t$  va de  $\mathbb{D}$  dans  $\mathbb{D}$  avec  $g_t^{-1} \circ f_t(0) = 0$ , et :

$$(g_t^{-1} \circ f_t)'(0) = f_t'(0)(g_t^{-1})' \circ f_t(0) = \frac{1}{g_t' \circ g_t^{-1}}(0) = 1$$

Par le lemme de Schwarz, il existe  $\lambda \in \partial\mathbb{D}$  tel que  $g_t' \circ f_t(z) = \lambda z$  et donc  $g_t = f_t$ .

Le rôle des deux chaînes étant symétrique, le même argument s'applique dans l'autre sens, et on a ainsi terminé la preuve du théorème de Loewner.  $\square$

**Proposition 6.2.** Soit  $f \in \mathcal{S}^*$  et soit  $(f_t)$  la chaîne de Loewner telle que  $f_0 = f$ . Alors les coefficients de Taylor de  $f_t$  sont continus en  $t$ .

*Démonstration.* On raisonne de la même manière que dans le i) de la preuve : si  $t_n$  tend vers  $t$ , la suite  $(f_{t_n}(\mathbb{D}))$  converge vers son noyau  $f_t(\mathbb{D})$ , donc  $f_{t_n} \rightarrow f_t$  uniformément sur les compacts de  $\mathbb{D}$  par le théorème de Carathéodory. Par le théorème de Weierstrass, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{t_n}^{(k)} = f_t^{(k)}$$

et en particulier les dérivées convergent ponctuellement en 0, d'où la continuité des coefficients.  $\square$

On aura besoin pour la suite des deux résultats suivants, qu'on donne sans preuve.

**Théorème 6.3** (des accroissements finis généralisé). Pour toutes fonctions  $f, g$  continues sur un intervalle  $[a, b]$ , avec  $g$  de signe constant, il existe  $c \in (a, b)$  tel que :

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx$$

**Théorème 6.4** (de prolongement de Carathéodory). Soit  $U$  un ouvert simplement connexe de  $\mathbb{C}$  et  $f$  une bijection conforme de  $\mathbb{D}$  dans  $U$ . Alors  $f$  se prolonge en un homéomorphisme de  $\overline{\mathbb{D}}$  dans  $\overline{U}$  (avec  $f(\partial\mathbb{D}) = \partial U$ ), si et seulement si  $\partial U$  est une courbe de Jordan.

On a construit une chaîne de Loewner unique  $(f_t)_{t \geq 0}$  avec  $f_0 = f$ , où  $f \in \mathcal{S}^*$ , en utilisant la paramétrisation standard de  $\gamma$  (par la fonction  $\sigma$ ).

On a donc  $f_0 = f$ ,  $f_t(0) = 0$  et  $f_t'(0) = e^t$ .

On note

$$f_t(z) = e^t \left( z + \sum_{n \geq 2} b_n(t)z^n \right)$$

on a montré qu'alors les  $b_n$  étaient continus en  $t$ .

Considérons la fonction

$$g : \mathbb{D} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{D} \\ (z, t) \mapsto f_t^{-1}(f(z)) .$$

Vu l'emboîtement des domaines *slit*  $f_t(\mathbb{D})$  et  $f(\mathbb{D})$ ,  $g$  est bien définie. De plus,  $g$  est holomorphe en  $z$  et continue en  $t$ , et on a :

$$\frac{\partial}{\partial z} g(z, t)|_{z=0} = f'(0)(f_t^{-1})'(f(0)) = e^{-t}$$

On peut donc écrire :

$$g(z, t) = e^{-t} \left( z + \sum_{n \geq 2} a_n(t)z^n \right)$$

On a  $g(z, 0) = z$ . De plus :

**Proposition 6.5.** Soit  $g$  définie comme ci-dessus, alors ses coefficients de Taylor  $a_n(t)$  sont continus en  $t$ .

*Démonstration.* Il s'agit de montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{\partial^k}{\partial z^k} g(z, t)|_{z=0}$  est continue en  $t$ .

Par définition,  $g(z, t) = f_t^{-1}(f(z))$ , on a donc

$$\partial_z g(z, t) = (f_t^{-1} \circ f)'(z) = \frac{f'(z)}{f_t'(g(z, t))}$$

d'où en  $z = 0$  :  $\partial_z g(z, t)|_{z=0} = e^{-t} = 1/f'_t(0)$ .

Supposons qu'au rang  $k \in \mathbb{N}$  on ait :

$$\frac{\partial^k}{\partial z^k} g(z, t) = \frac{P}{f'_t(g(z, t))^m}$$

avec  $m \in \mathbb{N}$ , et où  $P$  est une combinaison polynomiale de  $f^{(k)}(z)$  et des  $f_t^{k-1}(g(z, t)), \dots, f_t(g(z, t)), 1$ .

Alors :

$$\frac{\partial^{k+1}}{\partial z^{k+1}} g(z, t) = \frac{\tilde{P}}{f'_t(g(z, t))^{2m}}$$

où  $\tilde{P}$  est une combinaison polynomiale de  $f^{(k+1)}(z)$ , et des  $f_t^k(g(z, t)), \dots, f_t(g(z, t)), 1$ .

En prenant  $z = 0$ , on obtient au numérateur  $\tilde{P}(0)$  continue en  $t$ , et au dénominateur :

$$f'_t(g(0, t))^{2m} = f'_t(0)^{2m} = e^{2mt}$$

continue en  $t$  et ne s'annulant pas. □

### 6.3 Équation de Loewner, cas $n = 3$ .

On peut maintenant énoncer le théorème le plus important de cette partie.

**Théorème 6.6** (Équation de Loewner). *La fonction  $g$  est dérivable en  $t$  et vérifie l'équation différentielle :*

$$\partial_t g(z, t) = -g(z, t) \frac{1 + \kappa(t)g(z, t)}{1 - \kappa(t)g(z, t)} \quad (\text{L})$$

où  $\kappa$  est continue de module 1.

De plus,  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^t g(\cdot, t) = f$  et la convergence est uniforme sur les compacts de  $\mathbb{D}$ .

*Démonstration.* La preuve est un peu longue, divisée en six parties.

i) Montrons que  $e^t f_t^{-1}$  tend vers l'identité quand  $t$  va à l'infini. On aura alors la dernière assertion du théorème.

Par le théorème de distorsion de Koebe, on a pour tout  $z$  dans  $\mathbb{D}$  :

$$\frac{e^t |z|}{(1 + |z|)^2} \leq |f_t(z)| \leq \frac{e^t |z|}{(1 - |z|)^2}$$

Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{C}$ . Si  $w \in K$ ,  $z = f_t^{-1}(w)$  est bien défini dès que  $t$  est assez grand ( $\exists T : \forall t \geq T, K \subset f_t(\mathbb{D})$ ) et par changement de variable :

$$\frac{e^t |f_t^{-1}(w)|}{(1 + |f_t^{-1}(w)|)^2} \leq |w| \leq \frac{e^t |f_t^{-1}(w)|}{(1 - |f_t^{-1}(w)|)^2}$$

soit,

$$(1 - |f_t^{-1}(w)|)^2 \leq e^t \frac{|f_t^{-1}(w)|}{|w|} \leq (1 + |f_t^{-1}(w)|)^2$$

En particulier,

$$|f_t^{-1}(w)| \leq e^{-t} |w| (1 + |f_t^{-1}(w)|)^2 \leq 4|w|e^{-t} \leq 4 \sup_K |w| e^{-t}$$

Donc  $f_t^{-1}(w) \rightarrow 0$  uniformément sur  $K$  quand  $t \rightarrow \infty$ .

On obtient en reprenant les inégalités précédentes que  $\left| e^t \frac{f_t^{-1}(w)}{w} \right| \rightarrow 1$  uniformément sur  $K$ .

La famille  $\left( w \mapsto \left| e^t \frac{f_t^{-1}(w)}{w} \right| \right)$  est alors uniformément bornée pour  $t$  assez grand, donc par le théorème de Montel, pour toute suite  $(t_n)$  tendant vers l'infini, on peut extraire une sous-suite  $(t_{n_k})$  telle que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( w \mapsto e^{t_{n_k}} \frac{f_{t_{n_k}}^{-1}(w)}{w} \right) = F$$

où  $F$  est holomorphe et où la convergence est uniforme sur  $K$ .

On a  $|F(w)| = 1$  pour tout  $w \in K$  et comme  $f_{t_{n_k}}^{-1}(w) \sim e^{-t_{n_k}} w$  au voisinage de  $w = 0$ , alors  $F(0) = 1$ , donc  $F$  est constante égale à 1 (une fonction holomorphe de module constant sur un ouvert est constante).

Comme  $F$  est indépendante de  $(t_n)$ , on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( w \mapsto e^t \frac{f_t^{-1}(w)}{w} \right) = 1$$

Ceci étant vrai pour tout  $K$  compact, on a que  $e^t f_t^{-1} \rightarrow \text{Id}_{\mathbb{C}}$  uniformément sur les compacts.

ii) Définition de la fonction  $\lambda$  (regarder la figure qui suit) :

On considère pour  $0 \leq s < t < \infty$  la fonction  $h_{s,t} = f_t^{-1} \circ f_s$ . C'est une bijection conforme de  $\mathbb{D}$  dans  $\mathbb{D} - J_{s,t}$ , où  $J_{s,t}$  est l'image par  $f_t^{-1}$  de la portion de la courbe  $\gamma$  de  $s$  à  $t$ , c'est un arc de Jordan partant de la frontière de  $\mathbb{D}$  vers l'intérieur.

Par le théorème de prolongement de Carathéodory, on prolonge  $f_s^{-1}$  par continuité aux deux faces de la portion de courbe entre  $s$  et  $t$ , on a ainsi un arc  $B_{s,t} \subset \partial\mathbb{D}$  tel que  $h_{s,t}(B_{s,t}) = J_{s,t}$ , notons  $\lambda(s)$  le point  $f_s^{-1}(\gamma(s))$ .

On prolonge de même  $f_t^{-1}$  à  $\gamma(t)$  et on note  $\lambda(t)$  le point  $f_t^{-1}(\gamma(t)) \in \partial\mathbb{D}$  : c'est l'extrémité de  $J_{s,t}$ .

Par continuité de  $f_s^{-1}$  (prolongée), on voit que  $B_{s,t}$  se contracte sur  $\lambda(s)$  quand  $t \searrow s$ , et de même  $J_{s,t}$  se contracte sur  $\lambda(t)$  quand  $s \nearrow t$ .

iii) Prolongement de la fonction  $h$  :

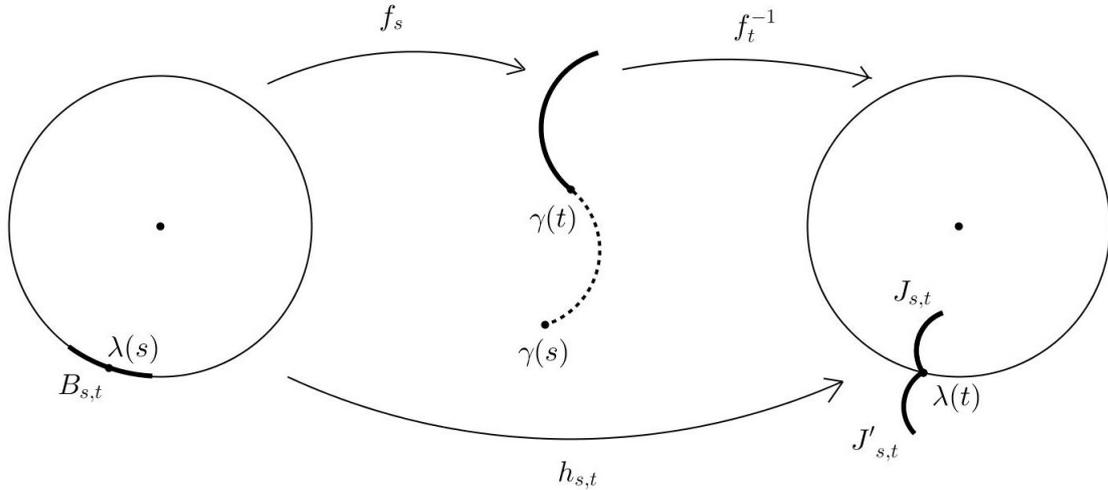


FIGURE 6 – La fonction de transition  $h_{s,t}$

On souhaite maintenant étendre  $h_{s,t}$  à  $\mathbb{C} \setminus B_{s,t}$ .

Par le théorème de Carathéodory,  $h_{s,t}$  se prolonge par continuité à  $B'_{s,t}$  qui est le complémentaire de  $B_{s,t}$  dans le cercle unité. L'image de  $B'_{s,t}$  par  $h_{s,t}$  est alors le cercle unité privé de  $\lambda(t)$ .

Posons pour  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$  :

$$h_{s,t}(z) = \frac{1}{\overline{h_{s,t}(1/\bar{z})}}$$

la définition fait sens et les deux définitions de  $h_{s,t}$  coïncident sur  $\partial\mathbb{D} \setminus B_{s,t}$ .

La fonction  $h_{s,t}$  est holomorphe sur  $\mathbb{D}$  et  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ , par le principe du prolongement analytique, elle est holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus B_{s,t}$ , et réalise une bijection conforme de ce domaine sur  $\mathbb{C} \setminus (J_{s,t} \cup J'_{s,t})$ , où  $J'_{s,t}$  est l'image de  $J_{s,t}$  par la fonction  $z \mapsto 1/\bar{z}$ . En effet,  $J_{s,t}$  est la "petite" déchirure correspondant à l'image

du bord intérieur de  $B_{s,t}$  par  $h_{s,t}$ , l'image du bord extérieur étant  $J'_{s,t}$ .

iv) Montrons que  $h_{s,t}$  converge uniformément vers l'identité sur les compacts ne contenant pas  $\lambda(s)$ . Par le théorème du quart de Koebe,  $h_{s,t}(\mathbb{D})$  contient le disque

$$|z| \leq \frac{1}{4} h'_{s,t}(0) = \frac{1}{4} f'_s(0) (f_t^{-1})'(f_s(0)) = \frac{1}{4} e^{s-t}$$

donc  $J_{s,t}$  est en dehors de ce disque, et  $J'_{s,t}$  est contenu dans le disque  $|z| \leq 4e^{t-s}$ .

On a de plus :

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{h_{s,t}(z)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{h_{s,t}(z)} = \frac{1}{h'_{s,t}(0)} = e^{t-s}$$

On a alors besoin du :

**Lemme.** Pour tout  $z$  dans  $\mathbb{C} \setminus B_{s,t}$ ,

$$\left| \frac{h_{s,t}(z)}{z} \right| \leq 4e^{t-s}$$

*Preuve du lemme (voir figure ci-dessous).* Soit  $K$  un compact contenant  $B_{s,t}$  en son intérieur, avec  $d(\partial K, B_{s,t}) \leq \epsilon$ ,  $\epsilon > 0$ . Par exemple, on pourra prendre  $K = \{z : d(z, B_{s,t}) \leq \epsilon\}$ .

Soit  $C_r$  le cercle centré en l'origine et de rayon  $r > 0$ . On prend  $r$  assez grand pour que  $C_r$  entoure  $K$ .

Soit  $M(r) := \sup_{z \in C_r} |h_{s,t}(z)/z|$  et  $m(\epsilon) := \sup_{z \in \partial K} |h_{s,t}(z)/z|$ .

Soit  $U$  le domaine ouvert délimité par  $C_r$  et  $\partial K$ , c'est-à-dire  $D(0, r) \setminus K$ .  $U$  est borné, on a donc par le principe du maximum que, sur  $U$ ,  $|h_{s,t}(z)/z| \leq \max(M(r), m(\epsilon))$ .

Premièrement,  $M$  est par le principe du maximum une fonction croissante de  $r$ . On a de plus que :

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{h_{s,t}(z)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{h_{s,t}(z)} = \frac{1}{h'_{s,t}(0)} = e^{t-s}$$

Donc  $M(r) \rightarrow e^{t-s}$  quand  $r \rightarrow \infty$ .

Deuxièmement, notons  $\eta := \sup_{z \in \partial K} d(h_{s,t}(z)/z, J_{s,t} \cup J'_{s,t})$ . Quand  $\epsilon$  tend vers 0,  $|z|$  tend vers 1 sur  $\partial K$  et  $d(h_{s,t}(z), J_{s,t} \cup J'_{s,t})$  tend vers 0, donc  $\eta$  tend également vers 0.

De plus,  $J_{s,t} \cup J'_{s,t} \subset D(0, 4e^{t-s})$ , donc par uniforme continuité de  $h_{s,t}$  sur  $\bar{\mathbb{D}}$ , pour tout  $\delta > 0$  il existe  $\epsilon_0$  tel que pour tout  $\epsilon \leq \epsilon_0$ ,  $m(\epsilon) \leq 4e^{t-s} + \delta$ , donc  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} m(\epsilon) \leq 4e^{t-s}$ .

Finalement, on voit que

$$\left| \frac{h_{s,t}(z)}{z} \right| \leq \max\left(\lim_{r \rightarrow \infty} M(r), \lim_{\epsilon, \delta \rightarrow 0} m(\epsilon)\right) \leq 4e^{t-s}$$

pour tout  $z \in \mathbb{C} \setminus B_{s,t}$ . □

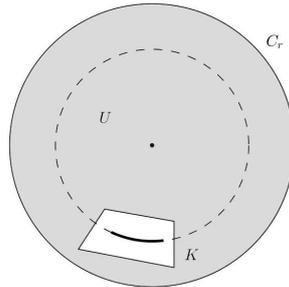


FIGURE 7 – Application du principe du maximum (lemme).

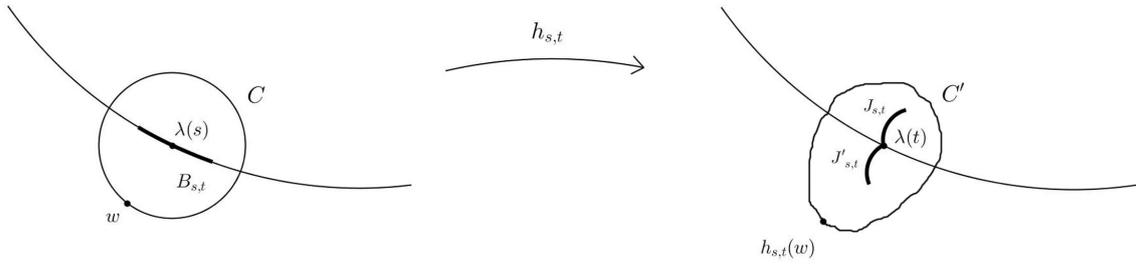


FIGURE 8 – Continuité de la fonction  $\lambda$ .

Si  $(t_n)$  est une suite de points tendant vers  $s$  par valeurs supérieures, alors l'arc  $B_{s,t_n}$  se contracte sur  $\lambda(s)$  quand  $n$  devient très grand.

La famille de fonctions  $\left(z \mapsto \frac{h_{s,t_n}(z)}{z}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  étant uniformément bornée, par le théorème de Montel on peut en extraire une sous-suite qui converge uniformément sur les compacts qui ne contiennent pas  $\lambda(s)$  vers une fonction holomorphe  $\Psi$ .

Comme  $\Psi$  est bornée au voisinage de  $\lambda(s)$ , on peut la prolonger à  $\lambda(s)$  et alors  $\Psi$  est bornée sur  $\mathbb{C}$  donc constante par le théorème de Liouville.

Comme  $\Psi(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{z \rightarrow 0} h_{s,t_n}(z)/z = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{t_n - s} = 1$ ,  $\Psi$  est constante égale à 1.

Ceci étant vrai pour toute suite  $(t_n)$  tendant vers  $s$  par valeurs supérieures, on conclut que  $h_{s,t} \rightarrow \text{Id}_{\mathbb{C}}$  uniformément sur les compacts ne contenant pas  $\lambda(s)$ , quand  $t$  tend vers  $s$  par valeurs supérieures.

v) Montrons que  $\lambda$  est continue.

Fixons  $s \geq 0$  et  $\epsilon > 0$ .

Lorsque  $t$  est suffisamment proche de  $s$ , le cercle  $C$  de centre  $\lambda(s)$  et de rayon  $\epsilon$  contient l'arc  $B_{s,t}$ , et l'image  $C'$  de  $C$  par  $h_{s,t}$  est un lacet de Jordan contenant  $J_{s,t} \cup J'_{s,t}$ , et en particulier contenant  $\lambda(t)$ . Soit  $w \in C$ , on a  $|\lambda(s) - w| = \epsilon$ .

Comme  $h_{s,t} \rightarrow \text{Id}_{\mathbb{C}}$  uniformément sur les compacts ne contenant pas  $\lambda(s)$ , on a  $|w - h_{s,t}(w)| \leq \epsilon$  dès que  $t$  est assez proche de  $s$  ( $C$  est un compact ne contenant pas  $\lambda(s)$ ).

On a également  $|h(w) - \lambda(t)| \leq 4\epsilon$ . En effet, cette distance est majorée par le diamètre de  $C'$  et on a :

$$\begin{aligned} \text{diam}(C') &= \sup_{z, z' \in C} |h(z) - h(z')| \\ &\leq \sup_{z, z' \in C} (|h(z) - z| + |z - z'| + |z' - h(z')|) \\ &= \epsilon + 2\epsilon + \epsilon \\ &= 4\epsilon \end{aligned}$$

Finalement, pour  $t$  assez proche de  $s$  on a :

$$|\lambda(s) - \lambda(t)| \leq |\lambda(s) - w| + |w - h(w)| + |h(w) - \lambda(t)| \leq 6\epsilon$$

Ceci étant vrai pour tout  $\epsilon > 0$ , on a montré la continuité à droite de  $\lambda$ .

En imposant pour  $s$  suffisamment proche de  $t$  que  $J_{s,t} \cup J'_{s,t}$  soit contenu dans un cercle de centre  $\lambda(t)$  et de rayon  $\epsilon$ , on conclut de manière similaire la continuité à gauche.

vi) Montrons enfin que  $g$  vérifie l'équation de Loewner.

On rappelle qu'on a :

$$g(z, t) = f_t^{-1}(f(z)) = e^{-t} \left( z + \sum_{n \geq 2} a_n(t) z^n \right)$$

Posons

$$\Phi = \log\left(\frac{h_{s,t}(z)}{z}\right)$$

un logarithme tel que  $\Phi(0) = s - t$  (on a alors que le logarithme coïncide avec  $\ln$  sur  $(0, \infty)$ ).  $\Phi$  est holomorphe sur  $\mathbb{D}$  et continue sur  $\overline{\mathbb{D}}$ .

On a que :

- si  $z \in B_{s,t}$ , alors  $|h_{s,t}(z)| < 1$  et  $|z| = 1$ , donc  $\Re\Phi(z) = \ln\left|\frac{h_{s,t}(z)}{z}\right| < 0$

- si  $z \in \partial\mathbb{D} - B_{s,t}$ ,  $\left|\frac{h_{s,t}(z)}{z}\right| = 1$  donc  $\Re\Phi(z) = 0$ .

La formule de Poisson sur  $\mathbb{D}$  donne :

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Re\Phi(e^{i\theta}) \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\theta$$

On a  $\Phi(0) = s - t \in \mathbb{R}$ . De plus,  $\Re\Phi(z) = 0$  ailleurs que sur  $B_{s,t}$ , donc si  $e^{i\alpha}$  et  $e^{i\beta}$  sont les extrémités de  $B_{s,t}$  :

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_\alpha^\beta \Re\Phi(e^{i\theta}) \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\theta$$

Et en particulier :

$$\Phi(0) = \frac{1}{2\pi} \int_\alpha^\beta \Re\Phi(e^{i\theta}) d\theta$$

Comme  $h_{s,t}(g(z, s)) = f_t^{-1} \circ f_s \circ f_s^{-1} \circ f(z) = f_t^{-1} \circ f(z) = g(z, t)$ , l'équation se réécrit :

$$\log\left(\frac{g(z, t)}{g(z, s)}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_\alpha^\beta \Re\Phi(e^{i\theta}) \frac{e^{i\theta} + g(z, s)}{e^{i\theta} - g(z, s)} d\theta$$

On applique le théorème des accroissements finis généralisé séparément à la partie réelle et la partie imaginaire du membre de droite : comme  $\Re\Phi(e^{i\theta})$  est de signe constant sur  $[\alpha, \beta]$ , il existe  $\sigma, \tau \in ]\alpha, \beta[$  tels que :

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{g(z, t)}{g(z, s)}\right) &= \left[ \Re\left(\frac{e^{i\sigma} + g(z, s)}{e^{i\sigma} - g(z, s)}\right) + i\Im\left(\frac{e^{i\tau} + g(z, s)}{e^{i\tau} - g(z, s)}\right) \right] \frac{1}{2\pi} \int_\alpha^\beta \Re\Phi(e^{i\theta}) d\theta \\ &= (s - t) \left[ \Re\left(\frac{e^{i\sigma} + g(z, s)}{e^{i\sigma} - g(z, s)}\right) + i\Im\left(\frac{e^{i\tau} + g(z, s)}{e^{i\tau} - g(z, s)}\right) \right] \end{aligned}$$

Puis, en divisant par  $t - s$  :

$$\frac{\log g(z, t) - \log g(z, s)}{t - s} = - \left[ \Re\left(\frac{e^{i\sigma} + g(z, s)}{e^{i\sigma} - g(z, s)}\right) + i\Im\left(\frac{e^{i\tau} + g(z, s)}{e^{i\tau} - g(z, s)}\right) \right]$$

En faisant tendre  $t$  vers  $s$ , l'arc  $B_{s,t}$  se contracte sur le point  $\lambda(s)$  et on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial s} \log g(z, s) = - \frac{\lambda(s) + g(z, s)}{\lambda(s) - g(z, s)}$$

Soit en posant  $\kappa(t) := \overline{\lambda(t)} = 1/\lambda(t)$  :

$$\partial_t g(z, t) = -g(z, t) \frac{1 + \kappa(t)g(z, t)}{1 - \kappa(t)g(z, t)} \quad (\text{Li})$$

où  $\kappa$  est bien continue à valeurs dans  $\partial\mathbb{D}$ . □

Nous pouvons maintenant prouver la conjecture de Bieberbach pour le troisième coefficient.

**Théorème 6.7** (Conjecture de Bieberbach - cas  $n = 3$ ). *Soit  $f$  une fonction schlicht avec  $f(z) = z + \sum_{n \geq 2} a_n z^n$ . Alors  $|a_3| \leq 3$ .*

Nous aurons besoin du :

**Lemme.** Pour tout nombre complexe  $z$ ,  $\Re(z^2) \leq \Re(z)^2$ .

*Preuve du lemme.* On écrit  $z = a + ib$ , alors  $\Re(z)^2 = a^2$  et  $\Re(z^2) = a^2 - b^2$ .  $\square$

*Preuve du théorème.* On suppose dans un premier temps  $f \in \mathcal{S}^*$ , on se ramènera ensuite au cas général par densité.

Remarquons ensuite qu'il suffit de montrer que  $\Re(a_3) \leq 3$ , c'est-à-dire qu'on peut supposer  $a_3$  réel et positif. En effet si ce n'est pas le cas on remplace  $f$  par la fonction

$$z \mapsto e^{i\theta} f(ze^{-i\theta}) = z + e^{-i\theta} a_2 z^2 + e^{-2i\theta} a_3 z^3 + \dots$$

où  $\theta \in \mathbb{R}$  est choisi de sorte que  $e^{-2i\theta} a_3 \in \mathbb{R}_+$ .

On construit la fonction  $g$  comme précédemment, on a donc :

- $g(z, t) = e^{-t} \left( z + \sum_{n \geq 2} a_n(t) z^n \right) = \sum_{n \geq 1} e^{-t} a_n(t) z^n$  en posant  $a_1 \equiv 1$ ,
- $\lim_{t \rightarrow \infty} e^t g(z, t) = f(z)$  et la limite est uniforme sur les compacts de  $\mathbb{D}$ ,
- $g(z, 0) = 0$ ,
- $g$  vérifie l'équation de Loewner (L)

On a ainsi  $\lim_{t \rightarrow \infty} a_n(t) = a_n$  et  $a_n(0) = 0$  pour tout  $n \geq 2$ .

En injectant l'expression de  $g$  dans (L), on obtient :

$$\begin{aligned} & \left( 1 - \sum_{n \geq 1} \kappa(t) e^{-t} a_n(t) z^n \right) \left( \sum_{n \geq 1} e^{-t} (a'_n(t) - a_n(t)) z^n \right) \\ &= - \sum_{n \geq 1} e^{-t} a_n(t) z^n - \left( \sum_{n \geq 1} e^{-t} a_n(t) z^n \right) \left( \sum_{n \geq 1} \kappa(t) e^{-t} a_n(t) z^n \right) \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} & \sum_{n \geq 1} e^{-t} (a'_n(t) - a_n(t)) z^n - \sum_{n \geq 1} \left( \sum_{k=1}^n \kappa(t) e^{-2t} a_k(t) (a'_{n-k}(t) - a_{n-k}(t)) \right) z^n \\ &= - \sum_{n \geq 1} e^{-t} a_n(t) z^n - \sum_{n \geq 1} \left( \sum_{k=1}^n \kappa(t) e^{-2t} a_k(t) a_{n-k}(t) \right) z^n \end{aligned}$$

D'où :

$$a'_n(t) = \kappa(t) e^{-t} \sum_{k=1}^n (a_k(t) a'_{n-k}(t) - 2a_k(t) a_{n-k}(t))$$

En particulier pour  $n = 2$  :

$$a'_2(t) = -2\kappa(t) e^{-t}$$

Et pour  $n = 3$  :

$$\begin{aligned} a'_3(t) &= \kappa(t) e^{-t} (a'_2(t) - 4a_2(t)) \\ &= -2\kappa(t)^2 e^{-2t} - 4\kappa(t) e^{-t} a_2(t) \end{aligned}$$

Puis comme  $a_2(0) = 0$  et  $\lim_{t \rightarrow \infty} a_2(t) = a_2$  :

$$a_2 = \int_0^\infty a'_2(t) dt = -2 \int_0^\infty \kappa(t) e^{-t} dt$$

Et comme  $|\kappa(t)| = 1$  :

$$|a_2| \leq 2 \int_0^\infty e^{-t} dt = 2$$

D'autre part,

$$a_3'(t) = -2\kappa(t)^2 e^{-2t} + 2a_2(t)a_2'(t)$$

D'où :

$$\begin{aligned} a_3 &= -2 \int_0^\infty \kappa(t)^2 e^{-2t} dt + a_2^2 \\ &= -2 \int_0^\infty \kappa(t)^2 e^{-2t} dt + 4 \left( \int_0^\infty \kappa(t) e^{-t} dt \right)^2 \end{aligned}$$

On pose  $\kappa(t) = e^{i\theta(t)}$ .

En prenant la partie réelle et grâce au lemme, on a :

$$\begin{aligned} \Re(a_3) &= -2 \int_0^\infty e^{-2t} \Re(e^{2i\theta(t)}) dt + 4 \Re \left[ \left( \int_0^\infty e^{i\theta(t)} e^{-t} dt \right)^2 \right] \\ &\leq -2 \int_0^\infty e^{-2t} \cos(2\theta(t)) dt + 4 \left( \int_0^\infty e^{-t} \cos \theta(t) dt \right)^2 \\ &= 2 \int_0^\infty e^{-2t} (1 - 2 \cos^2 \theta(t)) dt + 4 \left( \int_0^\infty e^{-t} \cos \theta(t) dt \right)^2 \\ &= 1 - 4 \int_0^\infty e^{-2t} \cos^2 \theta(t) dt + 4 \left( \int_0^\infty e^{-t} \cos \theta(t) dt \right)^2 \end{aligned}$$

Puis grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux fonctions  $t \mapsto e^{-t/2}$  et  $t \mapsto e^{-t/2} \cos \theta(t)$  :

$$\begin{aligned} \Re(a_3) &\leq 1 - 4 \int_0^\infty e^{-2t} \cos^2 \theta(t) dt + 4 \left( \int_0^\infty e^{-t} dt \right) \left( \int_0^\infty e^{-t} \cos^2 \theta(t) dt \right) \\ &= 1 + 4 \int_0^\infty (e^{-t} - e^{-2t}) \cos^2 \theta(t) dt \\ &\leq 1 + 4 \int_0^\infty (e^{-t} - e^{-2t}) dt \\ &= 1 + 2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

On rappelle que modulo une rotation, on a montré que pour toute fonction de  $\mathcal{S}^*$ , on a  $|a_3| \leq 3$ .

$\mathcal{S}^*$  est dense dans  $\mathcal{S}$  par le théorème d'approximation de Loewner. Supposons que  $f$  soit une fonction *schlicht* et qu'on ait une suite  $(f_n)$  de fonctions de  $\mathcal{S}^*$  convergeant uniformément sur les compacts vers  $f$ . Notons  $a_i^n$  les coefficients de la fonction  $f_n$ .

Alors par le théorème de Weierstrass :

$$6a_3^n = f_n^{(3)}(0) \rightarrow f^{(3)}(0) = 6a_3$$

quand  $n \rightarrow \infty$ .

Donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_3^n = a_3$ , et comme  $|a_3^n| \leq 3$  pour tout  $n$ , alors  $|a_3| \leq 3$ . □

## 7 Équations de Loewner et courbes du plan complexe.

Dans cette section nous allons revenir un petit peu en arrière et nous intéresser de plus près aux chaînes de Loewner d'images des domaines *slit*, aux courbes du plan complexe qui leur correspondent, et aux équations qu'elles vérifient. L'idée générale est la suivante : à chaque courbe simple  $\gamma$  dans un ensemble  $D$ , qui peut être le plan, le demi-plan  $\mathbb{H}$  ou le disque unité  $\mathbb{D}$ , correspond une fonction  $\lambda$  continue en  $t$ , à valeurs dans le cercle unité ou dans l'axe réel. On peut alors décrire l'évolution d'une famille  $(f_t)_{t \geq 0}$  de transformations conformes de  $\mathbb{D}$  ou  $\mathbb{H}$  dans  $D \setminus \gamma$ , grâce à une équation différentielle, impliquant  $\lambda$ . Réciproquement, cette équation différentielle permet d'identifier la famille  $(f_t)$  et, si on suppose les images *slit*, la courbe  $\gamma$ .

Nous commencerons par rappeler ce que nous avons déjà découvert sur le sujet à la section précédente, puis nous montrerons dans ce cas-ci comment partir "à l'envers" et retrouver les fonctions à partir de l'équation. Nous ne détaillerons pas ce qui se passe lorsqu'on change  $\mathbb{D}$  pour un autre domaine, mais nous évoquerons les idées générales de ces extensions fort utiles dans beaucoup de domaines.

### 7.1 Équation de Loewner Radiale

On rappelle qu'étant donné un arc de Jordan  $\gamma$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , défini sur l'intervalle  $[0, \infty[$ , on avait obtenu une chaîne de Loewner unique  $(f_t)_{t \geq 0}$ , vérifiant :

- $f_t(\mathbb{D}) = \mathbb{C} \setminus \gamma$
- $f'_t(0) = e^t$  pour tout  $t \in [0, \infty[$

Le deuxième point étant dû à une reparamétrisation de la courbe  $\gamma$  appelée *paramétrisation standard*. Nous avons ensuite considéré la famille de fonctions  $(g_t)_{t \geq 0}$  définie sur  $\mathbb{D}$  par  $g_t(z) = f_t^{-1}(f(z))$ . Ces fonctions envoient  $\mathbb{D}$  dans lui-même privé d'un petit arc partant de sa frontière, qui est en fait l'arc  $f_t^{-1}(\gamma([0, t])$ .

En notant  $\lambda(t)$  le point  $f_t^{-1}(\gamma(t)) \in \partial\mathbb{D}$ , on obtenait alors que la fonction  $\lambda$  était continue, et que la famille  $(g_t)$  vérifiait l'équation :

$$\partial_t g_t(z) = -g_t(z) \frac{\lambda(t) + g_t(z)}{\lambda(t) - g_t(z)} \quad (\mathbf{R}_t)$$

avec  $g_0(z) = z$ .

On appellera dorénavant cette équation *Équation de Loewner Radiale*, et la famille  $(g_t)$  une *chaîne de Loewner radiale*.

#### 7.1.1 Sens inverse

Réciproquement, on montre qu'à partir de l'équation  $(\mathbf{R}_t)$ , on peut retrouver la fonction  $f$  :

**Théorème 7.1.** *L'équation  $(\mathbf{R}_t)$  définit de manière unique une fonction  $f$  univalente sur  $\mathbb{D}$  et une chaîne de Loewner  $(f_t)$  telles que pour tout  $t$ ,  $g_t = f_t^{-1} \circ f$ .*

*De plus, si on suppose que l'image de  $f$  est slit, alors l'équation permet de retrouver la déchirure.*

*Démonstration.* La preuve se fait en plusieurs étapes.

i) Montrons que le problème de Cauchy  $(\mathbf{R}_t)$  admet une solution sur  $\mathbb{R}_+$ .

On aura besoin du

**Lemme.** *Pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  et pour tout  $w \in \mathbb{D}$ ,*

$$\Re \frac{e^{i\theta} + w}{e^{i\theta} - w} > 0$$

*Preuve du lemme.* On calcule :

$$\begin{aligned} \frac{e^{i\theta} + w}{e^{i\theta} - w} &= \frac{(e^{i\theta} + w)(e^{-i\theta} - \bar{w})}{|e^{i\theta} - w|^2} \\ &= \frac{1}{|e^{i\theta} - w|^2} (1 - |w|^2 + (a + ib)(\cos \theta - i \sin \theta) - (a - ib)(\cos \theta + i \sin \theta)) \text{ en notant } w = a + ib \\ &= \frac{1 - |w|^2}{|e^{i\theta} - w|^2} + 2i \frac{b \cos \theta - a \sin \theta}{|e^{i\theta} - w|^2} \end{aligned}$$

D'où le résultat puisque  $|w| < 1$ . □

La fonction  $x \rightarrow -x \frac{\lambda(t)+x}{\lambda(t)-x}$  est  $C^1$  donc localement lipschitzienne. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, le problème de Cauchy  $(R_t)$  admet une unique solution définie sur un intervalle maximal d'existence  $I$ .

Soit  $(g_t)$  cette solution, et  $z \in \mathbb{D}$ . On note  $\psi(t) = |g_t(z)|^2$ ,  $\psi$  est dérivable, de dérivée :

$$\begin{aligned}\psi'(t) &= \partial_t(\Re g_t(z))^2 + \partial_t(\Im g_t(z))^2 \\ &= 2\Re \partial_t g_t(z) \Re g_t(z) + 2\Im \partial_t g_t(z) \Im g_t(z) \\ &= 2\Re \left( -g_t(z) \frac{\lambda(t) + g_t(z)}{\lambda(t) - g_t(z)} \right) \Re g_t(z) + 2\Im \left( -g_t(z) \frac{\lambda(t) + g_t(z)}{\lambda(t) - g_t(z)} \right) \Im g_t(z) \\ &= -2|g_t(z)|^2 \Re \frac{\lambda(t) + g_t(z)}{\lambda(t) - g_t(z)}\end{aligned}$$

en utilisant les formules pour les parties réelle et imaginaire d'un produit de nombres complexes.

Or, par le lemme, la dérivée  $\psi'(t)$  est négative, donc  $\psi$  décroît. Ainsi  $g_t(z) \in \mathbb{D}$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ . Le seul problème pour la définition de  $g_t$  étant sur le bord du disque, on obtient que  $I = \mathbb{R}_+$ .

ii) Montrons que  $g_t$  est univalente.

Soit  $\Delta_t(z, w) = g_t(z) - g_t(w)$  pour  $z, w \in \mathbb{D}$ . Alors,

$$\begin{aligned}\partial_t \Delta_t(z, w) &= g_t(w) \frac{\lambda(t) + g_t(w)}{\lambda(t) - g_t(w)} - g_t(z) \frac{\lambda(t) + g_t(z)}{\lambda(t) - g_t(z)} \\ &= \frac{g_t(w)(\lambda(t) + g_t(w))(\lambda(t) - g_t(z)) - g_t(z)(\lambda(t) + g_t(z))(\lambda(t) - g_t(w))}{(\lambda(t) - g_t(w))(\lambda(t) - g_t(z))} \\ &= \frac{\lambda^2(t)(g_t(w) - g_t(z)) + \lambda(t)(g_t^2(w) - g_t^2(z)) + g_t(w)g_t^2(z) - g_t(z)g_t^2(w)}{(\lambda(t) - g_t(w))(\lambda(t) - g_t(z))} \\ &= -\Delta_t(z, w) \frac{\lambda^2(t) + \lambda(t)(g_t(z) + g_t(w)) - g_t(z)g_t(w)}{(\lambda(t) - g_t(w))(\lambda(t) - g_t(z))}\end{aligned}$$

On peut intégrer cette équation différentielle ordinaire et en remarquant que  $\Delta_0(z, w) = (z - w)$  on obtient :

$$\Delta_t(z, w) = (z - w) \exp \left( - \int_0^t \frac{\lambda^2(s) + \lambda(s)(g_s(z) + g_s(w)) - g_s(z)g_s(w)}{(\lambda(s) - g_s(w))(\lambda(s) - g_s(z))} ds \right) \quad (\star)$$

On a :

$$|\lambda^2(s) + \lambda(s)(g_s(z) + g_s(w)) - g_s(z)g_s(w)| \leq 1 + |g_s(z) + g_s(w)| + |g_s(z)||g_s(w)| \leq 4$$

Et,

$$|(\lambda(s) - g_s(w))(\lambda(s) - g_s(z))| \geq (1 - |g_s(w)|)(1 - |g_s(z)|)$$

puis par décroissance de  $|g_s|$  en  $s$  :

$$|(\lambda(s) - g_s(w))(\lambda(s) - g_s(z))| \geq (1 - |w|)(1 - |z|)$$

et en prenant  $w \in D(z, \frac{1}{2}(1 - |z|))$  :

$$|(\lambda(s) - g_s(w))(\lambda(s) - g_s(z))| \geq \frac{1}{2}(1 - |z|)^2 > 0$$

On peut alors appliquer le théorème de convergence dominée et intervertir limite quand  $w \rightarrow z$  et intégrale, et on obtient :

$$g_t'(z) = \exp \left( - \int_0^t \frac{\lambda^2(s) + 2g_s(z)\lambda(s) - g_s^2(z)}{(\lambda(s) - g_s(z))^2} ds \right)$$

Donc  $g_t$  est holomorphe sur  $\mathbb{D}$ . De plus, par  $(\star)$ ,  $g_t(z) = g_t(w)$  implique  $z = w$ , donc  $g_t$  est injective.

iii) Montrons à présent que  $e^t g_t$  admet une limite univalente  $f$  quand  $t$  tend vers l'infini, et retrouvons la fonction  $f$ .

En intégrant l'équation  $(R_t)$ , on obtient :

$$g_t(z) = g_0(z) \exp \left( - \int_0^t \frac{\lambda(s) + g_s(z)}{\lambda(s) - g_s(z)} ds \right) = z \exp \left( - \int_0^t \frac{\lambda(s) + g_s(z)}{\lambda(s) - g_s(z)} ds \right)$$

D'où,

$$e^t g_t(z) = z \exp \left( -2 \int_0^t \frac{g_s(z)}{\lambda(s) - g_s(z)} ds \right)$$

On a que  $g_t(0) = 0$ , et  $g'_t(0) = e^{-t}$  par la formule obtenue au point précédent. On a déjà obtenue l'univalence, on en conclut donc que  $e^t g_t$  est *schlicht*. On a alors le théorème de croissance de Koebe :

$$\forall z \in \mathbb{D}, |g_t(z)| \leq \frac{e^{-t}|z|}{(1-|z|)^2}$$

Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{D}$ , alors il existe  $0 < r < 1$  tel que si  $z \in K$ ,  $z \in \overline{D}(0, r)$ , donc pour  $z \in K$ ,

$$|g_t(z)| \leq \frac{e^{-t}r}{(1-r)^2}$$

et,

$$|\lambda(t) - g_t(z)| \geq 1 - \frac{e^{-t}r}{(1-r)^2} > 0 \text{ pour } t \text{ assez grand}$$

Donc

$$\frac{|g_s(z)|}{|\lambda(s) - g_s(z)|} \leq \frac{e^{-s}r}{(1-r)^2 - e^{-s}r}$$

Donc  $\int_0^t \frac{g_s(z)}{\lambda(s) - g_s(z)} ds$  converge uniformément sur les compacts de  $\mathbb{D}$  quand  $t \rightarrow \infty$ , donc  $e^t g_t$  également, on note la limite  $f$ .

Par le théorème de Weierstrass,  $f$  est holomorphe sur  $\mathbb{D}$  et par celui de Hurwitz, elle est soit injective soit constante. Par la dernière expression pour  $g_t(z)$ , on voit que  $g_t(0) = 0$  et donc si  $f$  est constante, elle est identiquement nulle sur  $\mathbb{D}$ . Or ceci est impossible puisqu'on a :

$$f(z) = z \exp \left( -2 \int_0^\infty \frac{g_s(z)}{\lambda(s) - g_s(z)} ds \right)$$

qui est non nul dès que  $z \neq 0$ . Donc  $f$  est univalente. On a ainsi retrouvé la fonction  $f$ .

iv) Retrouvons la chaîne de Loewner  $(f_t)$ .

On pose pour  $s \geq 0$  fixé,  $\lambda_s(t) = \lambda(s+t)$ , et on considère l'équation :

$$\partial_t g_t(z) = -g_t(z) \frac{\lambda_s(t) + g_t(z)}{\lambda_s(t) - g_t(z)} \quad (R_{s,t})$$

avec condition initiale  $g_0(z) = z$ .

Pour les mêmes raisons que précédemment,  $(R_{s,t})$  admet une unique solution univalente qu'on note  $g_{s,t}$ . De plus,  $e^t g_{s,t}$  admet une limite univalente en  $t \rightarrow \infty$ , qu'on note  $e^{-s} f_s$  (on peut toujours écrire une fonction sous cette forme).

En  $t = 0$ , on a  $g_{s+0} = g_s = g_{s,0} \circ g_s$ , donc par unicité des solutions, pour tout  $t$  et pour tout  $s$ , on a :

$$g_{s+t} = g_{s,t} \circ g_s$$

D'où  $e^{s+t} g_{s+t} = e^s e^t g_{s,t} \circ g_s$ , et quand  $t \rightarrow \infty$  :

$$f = f_s \circ g_s$$

On a donc retrouvé la famille  $(f_t)$  (on remarque qu'on a bien  $g_s = f_s^{-1} \circ f$ , ce qui est la définition de  $g_s$  qu'on avait utilisée initialement).

v) Si  $s, t, v$  sont trois temps, alors en  $t = 0$  on obtient  $g_{s+0, v} \circ g_{s, 0} = g_{s, v} = g_{s, 0+v}$ , d'où toujours par unicité des solutions :

$$g_{s+t, v} \circ g_{s, t} = g_{s, t+v}$$

pour tous  $s, t$  et  $v$ . On a donc  $e^t e^v g_{s+t, v} \circ g_{s, t} = e^{t+v} g_{s, t+v}$ , puis en faisant tendre  $v$  vers  $\infty$  :

$$e^t e^{-(s+t)} f_{s+t} \circ g_{s, t} = e^{-s} f_s$$

c'est-à-dire,

$$f_{s+t} \circ g_{s, t} = f_s$$

Donc  $f_{s+t}(g_{s, t}(\mathbb{D})) = f_s(\mathbb{D})$  et on a l'emboîtement des images :

$$f_s(\mathbb{D}) \subset f_{s+t}(\mathbb{D})$$

Mais par le point précédent, on a  $f(\mathbb{D}) = f_s(g_s(\mathbb{D}))$ , donc finalement, pour tout  $s$  et pour tout  $t$  :

$$f(\mathbb{D}) \subset f_s(\mathbb{D}) \subset f_{s+t}(\mathbb{D})$$

C'est-à-dire que les images de  $\mathbb{D}$  par la famille  $(f_t)_{t \geq 0}$  sont croissantes en  $t$  (en remarquant que  $f_0 = f$ ). Comme les fonctions  $f_t$  sont univalentes, ce sont des bijections conformes de  $\mathbb{D}$  sur  $f_t(\mathbb{D})$ , en particulier pour tout  $t$ ,  $f_t(\mathbb{D})$  est simplement connexe.

Supposons que  $f(\mathbb{D}) = \mathbb{C} \setminus \gamma$  où  $\gamma$  est une courbe. Alors on a  $\gamma(t) = f_t(\lambda(t))$ . □

**Remarque.** *Le fait que l'image de  $f$  soit un domaine slit ne provient pas directement de l'équation. En effet, selon les propriétés de la fonction  $\lambda$  l'image de  $\mathbb{D}$  par  $f$  peut-être beaucoup plus compliquée.*

### 7.1.2 Équation radiale pour les inverses

On revient maintenant à la chaîne de Loewner  $(f_t)$ , et on va montrer qu'elle vérifie une certaine équation aux dérivées partielles, qui est parfois donnée comme étant l'équation de Loewner radiale.

**Théorème 7.2** (Équation de Loewner pour les fonctions inverses). *Soit  $(f_t)_{t \geq 0}$  une chaîne de Loewner avec  $f_0 = f \in \mathcal{S}^*$ . Alors  $f_t$  est continûment différentiable et satisfait l'équation :*

$$\partial f_t(z) = z f_t'(z) \frac{\lambda(t) + z}{\lambda(t) - z} \tag{R'_t}$$

où  $\lambda$  est continue à valeurs dans le cercle unité.

*Démonstration.* On va transformer l'équation  $(R'_t)$  vérifiée par la fonction  $g : (z, t) \mapsto f_t^{-1}(f(z))$  (pour des raisons de clarté on ne notera temporairement plus le temps en indice).

i) Montrons que  $f_t$  est dérivable en  $t$  :

Soit  $F$  la fonction définie sur  $\mathbb{D} \times [0, \infty[$  par

$$F(z, t) = (f_t(z), t)$$

En notant  $\gamma_t$  l'arc complémentaire dans  $\mathbb{C}$  de  $f_t(\mathbb{D})$  on voit que

$$F(\mathbb{D} \times (0, \infty)) = \bigcup_{t > 0} [(\mathbb{C} \setminus \gamma_t) \times ]t, \infty[$$

qui est un ensemble ouvert comme réunion d'ouverts produits.

Soit  $(\zeta_0, t_0) \in F(\mathbb{D} \times ]0, \infty[)$ , alors il existe  $t$  tel que  $(\zeta_0, t_0) \in (\mathbb{C} \setminus \gamma_t) \times ]t, \infty[$ , et il existe un voisinage

ouvert  $D$  de  $(\zeta_0, t_0)$  tel que  $D \subset (\mathbb{C} \setminus \gamma_t) \times ]t, \infty[$ .

Soit  $\tilde{g} : (z, s) \mapsto f_s^{-1}(f_t(z))$  pour  $s \geq t$ , alors  $F$  restreinte à l'arrivée à  $D$  est bijective d'inverse :

$$F^{-1} : (\zeta, s) \mapsto (\tilde{g}(f_t^{-1}(\zeta), t), t)$$

$F^{-1}$  est continûment différentiable car  $\tilde{g}$  et  $f_t^{-1}$  le sont. Son jacobien est donné par :

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial_z \tilde{g}(f_t^{-1}(\zeta), t)}{f_t'(f_t^{-1}(\zeta))} & 0 \\ \partial_t \tilde{g}(f_t^{-1}(\zeta), t) & 1 \end{bmatrix} = \frac{\partial_z \tilde{g}(f_t^{-1}(\zeta), t)}{f_t'(f_t^{-1}(\zeta))}$$

et ne s'annule jamais par injectivité de  $\tilde{g}$ .

Donc  $F$  est continûment différentiable par le théorème d'inversion locale, et donc  $\partial_t f_t$  existe et est continue.

ii) Établissons maintenant l'équation  $(R'_t)$  :

On remarque qu'on a :

$$f(\zeta) = f_t(g(\zeta, t))$$

D'où en dérivant par rapport à  $t$  :

$$0 = f_t'(g(\zeta, t)) \partial_t g(\zeta, t) + (\partial_t f_t)(g(\zeta, t))$$

D'où :

$$(\partial_t f_t)(g(\zeta, t)) = -f_t'(g(\zeta, t)) \partial_t g(\zeta, t)$$

D'où en posant  $z = g(\zeta, t)$ , et en injectant  $(R_t)$  :

$$\begin{aligned} \partial_t f_t(z) &= -f_t'(z) \partial_t g(\zeta, t) \\ &= f_t'(z) g(\zeta, t) \frac{\lambda(t) + g(\zeta, t)}{\lambda(t) - g(\zeta, t)} \\ &= z f_t'(z) \frac{\lambda(t) + z}{\lambda(t) - z} \end{aligned}$$

□

### 7.1.3 L'exemple des chaînes de Koebe

Voici maintenant un exemple concret de résolution de l'équation de Loewner.

**Définition 7.1.** On définit pour  $\theta \in \mathbb{R}$  les chaînes de Koebe  $(k_{t,\theta})$  par :

$$k_{t,\theta}(z) = e^t \frac{z}{(1 - e^{i\theta} z)^2}$$

**Proposition 7.3.** La chaîne de Koebe  $k_{t,\theta}$  est solution de l'équation de Loewner pour  $\kappa \equiv 1/\lambda \equiv -e^{i\theta}$ .

*Démonstration.* On a  $\partial_t k_{t,\theta} = k_{t,\theta}$  et :

$$\begin{aligned} k'_{t,\theta}(z) &= e^t \frac{(1 - e^{i\theta} z)^2 + 2e^{i\theta} z(1 - e^{i\theta} z)}{(1 - e^{i\theta} z)^4} \\ &= e^t \frac{1 + e^{i\theta} z}{(1 - e^{i\theta} z)^3} \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} z k'_{t,\theta}(z) \frac{1 - e^{i\theta} z}{1 + e^{i\theta} z} &= e^t z \frac{1 + e^{i\theta} z}{(1 - e^{i\theta} z)^3} \frac{1 - e^{i\theta} z}{1 + e^{i\theta} z} \\ &= e^t \frac{z}{(1 - e^{i\theta} z)^2} \\ &= \partial_t k_{t,\theta}(z) \end{aligned}$$

□

## 7.2 Équation de Loewner Cordale

Cette partie vise à compléter les notions qui ont été abordées, et ne sera pas détaillée.

Considérons, une courbe de Jordan  $\gamma$  dans  $\mathbb{C}$  partant à l'infini, de sorte que  $\gamma(0) \in \mathbb{R}$ , et que  $\gamma(t) \in \mathbb{H}$  le demi-plan supérieur ouvert, pour tout  $t > 0$ . Alors, le théorème de représentation de Riemann nous dit (nous ne détaillerons pas l'argument précis) que pour tout  $t$  il existe une unique transformation conforme  $f_t$  envoyant  $H_t = \mathbb{H} \setminus \gamma([0, t])$  sur  $\mathbb{H}$ , vérifiant  $f_t(z) - z \rightarrow 0$  quand  $z \rightarrow \infty$ .

On montre alors que  $f_t$  est dérivable en  $t$ , et qu'il existe une fonction  $U : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue, et une reparamétrisation de  $\gamma$ , telles que la famille  $(f_t)_{t \geq 0}$  vérifie l'équation :

$$\partial_t f_t = \frac{2}{f_t(z) - U(t)} \quad (\text{C}_t)$$

appelée *Équation de Loewner Cordale*. La famille  $(f_t)$  est alors appelée une *Chaîne de Loewner cordale*. De manière similaire au travail effectué dans le disque, on peut montrer que les fonctions inverses vérifient une certaine équation aux dérivées partielles, et on peut également à partir de l'équation  $(\text{C}_t)$ , retrouver les fonctions  $f_t$ .

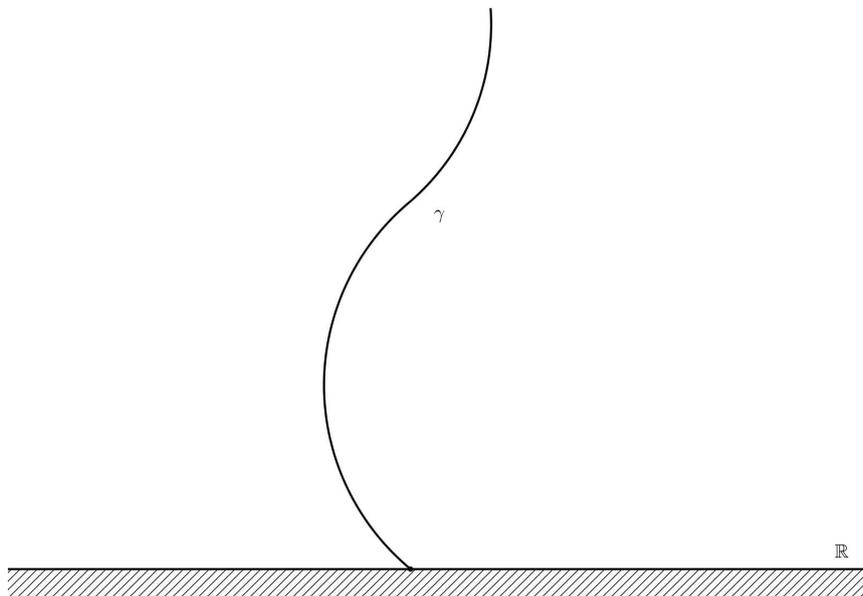


FIGURE 9 – Une déchirure du demi-plan.

## 7.3 Autres généralisations et applications

Il existe beaucoup d'autres généralisations ou variantes de l'équation de Loewner, telles que l'équation du plan complet (qui est en fait assez proche de l'équation radiale), ou même certaines formes de l'équation dans des domaines qui ne sont pas simplement connexes comme des anneaux...

La généralisation la plus intéressante ne concerne en fait pas vraiment les domaines dans lesquels on se place, mais plutôt la forme des images des fonctions. Dans ce mémoire, nous n'avons considéré que des domaines *slit*, mais il est en fait possible de généraliser. La méthode générale consiste à considérer non pas une courbe mais n'importe quelle collection croissante pour l'inclusion de domaines simplement connexes intersectant le bord du domaine considéré ( $\mathbb{H}$  ou  $\mathbb{D}$ ). Par exemple, on pourrait dans le cas cordal autoriser la courbe  $\gamma$  à intersecter l'axe réel à d'autres instants qu'en 0, et considérer les transformations conformes envoyant le demi-plan sur lui-même privé de l'union des parties bornées de  $\mathbb{H} \setminus \gamma$ , c'est-à-dire sur tous les points de  $\mathbb{H}$  encore reliés à l'infini sans croiser  $\gamma$ .

Les applications de la théorie initiée par Loewner sont nombreuses, la première étant bien sûr la preuve de la conjecture de Bieberbach par Louis de Branges en 1985. Ce dernier se servit des chaînes de Loewner mais pas seulement, on a vu lors de la preuve du cas  $n = 3$  que les équations exhibées devenaient

impossible à exploiter directement dès le cas  $n = 4$ . Sans rentrer dans les détails, disons que les autres méthodes utilisées sont très techniques, en particulier des résultats sur les fonction hypergéométriques obtenus par Askey et Gasper lors de travaux sur les polynômes de Jacobi.

Pour aborder une autre application beaucoup plus récente et très féconde, citons le processus SLE, pour *Schramm-Loewner Evolution*. Il s'agit d'un processus stochastique à temps continu, à valeurs dans le plan complexe, obtenu comme solution des équations de Loewner en prenant pour la fonction paramètre un mouvement Brownien. Ce processus a permis très récemment des avancées considérables en physique statistique, citons comme fondateurs de la théorie Oded Schramm, Wendelin Werner et Gregory Lawler. Une des raisons principales de l'intérêt de ce processus est qu'il apparaît comme limite d'échelle de nombreux modèles discrets, tels que la percolation critique sur le réseau triangulaire, ou les marches aléatoires à boucles effacées. Les techniques impliquées dans l'étude du SLE sont, pour en citer quelques-unes, le calcul stochastique, les équations aux dérivées partielles, en plus bien sûr de l'analyse complexe dont nous avons parlé dans ce mémoire.

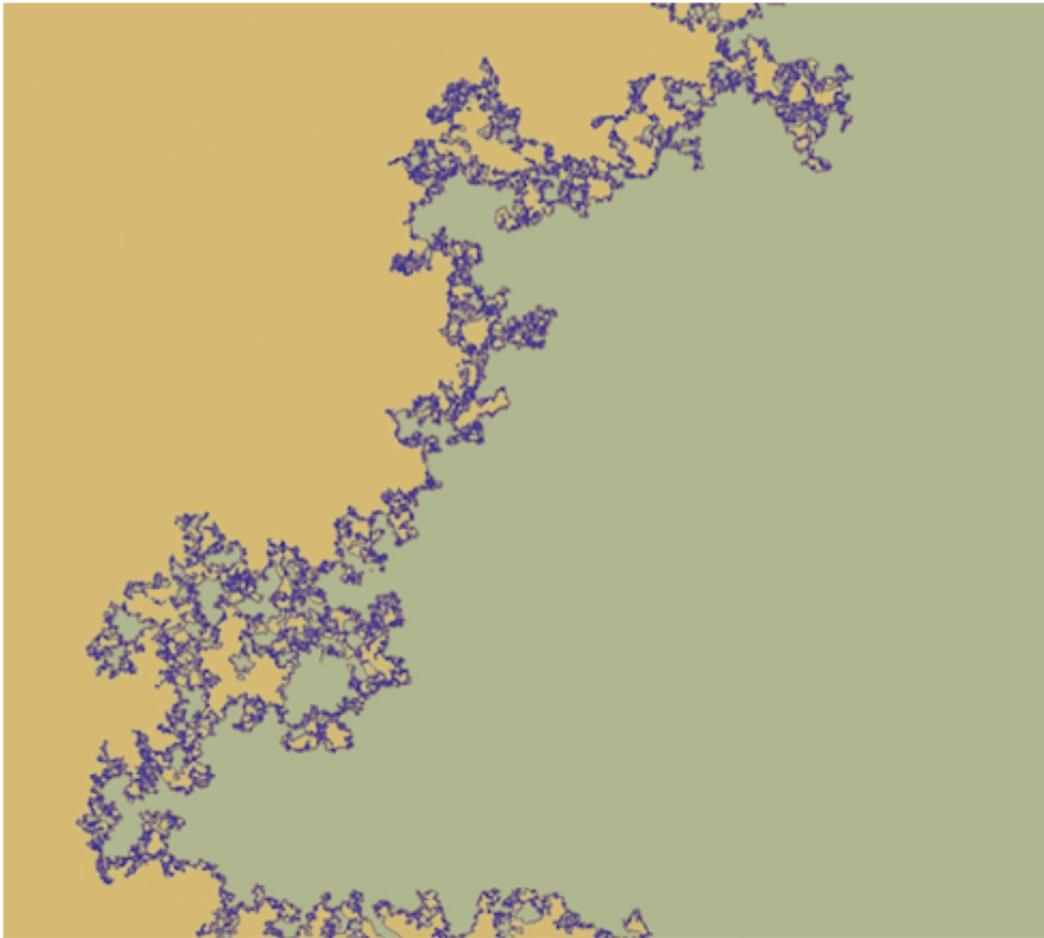


FIGURE 10 – Une simulation du  $SLE_6$  par Vincent Beffara

## Références

- [1] Terence Tao. Univalent functions, the Loewner Equation, and the Bieberbach conjecture. <https://terrytao.wordpress.com/>, 2018.
- [2] Manon Césaire. La conjecture de Bieberbach. Master's thesis, Université Paris Saclay, 2017.
- [3] Gregory Lawler. *Conformally Invariant Processes In The Plane*. American Mathematical Society, 2005.
- [4] Joseph Oesterlé. Démonstration de la conjecture de Bieberbach. *Séminaire Bourbaki (exp. n° 649, p319-334)*.
- [5] Sébastien Leurent et Samuel Pocchiola. L'équation de Loewner et la conjecture de Bieberbach. Exposé de l'ENS, juin 2006.