TRAVAIL D'ÉTUDE ET DE RECHERCHE

ANNÉE 2022

AUTOUR DE LA FONCTION ZÊTA DE RIEMANN

Joana SICARD

Encadré par Eric DUMAS

Table des matières

Notations

On introduit les notations suivantes, qu'on utilisera dans tout le mémoire :

- $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres premiers.
- On ordonnera les nombres premiers en une suite strictement croissante qui tend vers $+\infty$:

$$\mathcal{P} = \{2 = p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots\}.$$

- $\pi(x) = \mathrm{Card}\left(\{p \in \mathcal{P} \,:\, 2 \leqslant p \leqslant x\}\right).$
- Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit l'ouvert $\Omega_x = \{s \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Re(s)} > \mathrm{x}\}$.
- Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{C})$, on notera la transformée de Fourier de f : $\mathscr{F}(f)$ ou $\hat{f}$.

1 Introduction

La très célèbre fonction zêta de Riemann est une fonction analytique complexe liée de façon essentielle aux nombres premiers, comme on aura l'occasion de le découvrir par la suite.

C'est au $18^{\text{ème}}$ siècle que Léonhard Euler introduit la fonction zêta (définie sur $]1,+\infty[$), qui sera plus tard étendue au domaine complexe par Riemann :

$$\forall s \in \Omega_1, \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Dans ce mémoire on s'intéressera principalement à deux grands sujets de recherche concernant la fonction zêta de Riemann : le théorème des nombres premiers et les zéros de cette fonction. On introduira alors un certain nombre de fonctions analytiques annexes qui permettront d'établir les principaux résultats.

Dans la première partie de ce rapport, nous nous intéresserons au théorème des nombres premiers. Ce célèbre résultat de la théorie analytique des nombres est conjecturé à la fin du $19^{\text{ème}}$ siècle par Legendre et Gauss qui énoncent que

$$\pi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}.$$

Cette conjecture est alors démontrée en 1896 par Hadamard et de La Vallée Poussin à l'aide de méthodes d'analyse complexe et en particulier grâce à la fonction zêta de Riemann. On étudiera ici une preuve due essentiellement a D.J. Newman qui fait intervenir ζ et d'autres fonctions holomorphes importantes.

Dans la deuxième partie du mémoire, on s'intéressera à la localisation des zéros de ζ. En 1859, Riemann conjecture que les zéros non triviaux de la fonction zêta de Riemann ont tous une partie réelle égale à $1/2$. Cette conjecture, appelée hypothèse de Riemann, constitue l'un des problèmes non résolus les plus importants des mathématiques du début du $21^{\text{ème}}$ siècle. Nous étudierons en détail les zéros triviaux de ζ, c'est-à-dire ceux hors de la bande critique $B = \{z \in \mathbb{C}; 0 < \mathrm{Re}(z) < 1\}$, notamment grâce à la fonction analytique Gamma. Puis nous discuterons du cas de la bande critique en essayant de trouver des asymptotiques plus précises en faisant des hypothèses du type hypothèse de Riemann.

Enfin, dans la dernière partie nous verrons deux méthodes asymptotiques qui permettront entre autres de prouver la formule de Stirling, laquelle est associée à la fonction Gamma étudiée dans la deuxième partie.

2 Le théorème des nombres premiers

Dans toute cette partie on étudiera la preuve du théorème des nombres premiers due à D.J. Newman en s'inspirant fortement du cheminement fait dans [1].

2.1 Énoncé du théorème

On énonce le théorème des nombres premiers ainsi qu'un corollaire important.

Théorème des nombres premiers. *On a l'équivalent suivant :*

$$\pi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}.$$

Corollaire. *On a l'équivalent suivant :*

$$p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n \ln n.$$

2.2 Lien entre ζ et les nombres premiers

Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que Re(s) > 1. On pose

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

Proposition. *La fonction zêta de Riemann ζ est une fonction holomorphe sur l'ouvert Ω_1.*

Preuve. Soit $s \in \Omega_1$, alors il existe $\delta > 0$ tel que Re(s) $\geqslant 1 + \delta$. On peut écrire,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \int_{\mathbb{N}} \frac{1}{n^s} \mathrm{d}\mu\ , \quad \text{où } \mu \text{ est la mesure de comptage sur } \mathbb{N}.$$

Par ailleurs, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on a :

$$\left|\frac{1}{n^s}\right| = |e^{-s \ln n}| = |e^{-\ln n(\mathrm{Re(s)} + \mathrm{iIm(s)})}| \leqslant \frac{1}{n^{1+\delta}}.$$

La fonction $n \mapsto \dfrac{1}{n^{1+\delta}}$ est indépendante de s et est intégrable sur $\mathbb{N}$ car $1 + \delta > 1$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $s \mapsto \dfrac{1}{n^s}$ est holomorphe sur Ω_1.
Ainsi par le théorème d'holomorphie sous l'intégrale, on a bien que ζ est holomorphe sur Ω_1.

□

Le lien entre cette fonction et les nombres premiers a été découvert par Euler et est résumé dans la proposition suivante.

Proposition 2.2.1. *Pour $s \in \Omega_1$, on a les propriétés suivantes :*

(i) *Le produit infini* $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{{p_n}^s}\right)$ *est convergent. On le note* $\Pi(s)$.

(ii) $\Pi(s) \neq 0$.

(iii) $\zeta(s) = \dfrac{1}{\Pi(s)}$.

Pour démontrer cette proposition on utilisera les résultats suivants.

Lemme 2.2.2. *Soit u_n le terme général d'une série absolument convergente dans $\mathbb{C}$ et $(A_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ une suite croissante de sous-ensembles de $\mathbb{N}^*$ telle que $\mathbb{N}^* = \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j$. Alors,*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \lim_{j\to+\infty} \sum_{n\in A_j} u_n.$$

Preuve. La série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est absolument convergente donc le reste tend vers 0, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=N}^{+\infty} |u_n| < \varepsilon.$$

Soient donc $\varepsilon > 0$ et $N_0 \geqslant 1$ tels que $\sum_{n=N_0+1}^{+\infty} |u_n| < \varepsilon$. Posons $A = \{1, 2, \dots, N_0\}$. Par hypothèse, il existe j_0 tel que $A \subset A_{j_0}$ et donc $A \subset A_j$ pour $j \geqslant j_0$, de sorte que $A_j^c \subset \{N_0 + 1, \dots\}$ pour $j \geqslant j_0$. Alors

$$\Big| \sum_{n=1}^{+\infty} u_n - \sum_{n\in A_j} u_n \Big| = \Big| \sum_{n\in A_j^c} u_n \Big| \leqslant \sum_{n=N_0+1}^{+\infty} |u_n| < \varepsilon.$$

□

Rappels sur les produits infinis : Énonçons quelques résultats sur les produits infinis, expliqués plus en détail dans [2].

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{C}$.

Définition 2.1. *On dit que le produit infini $\prod_{n=1}^{+\infty} a_n$*
- converge *s'il existe un nombre $P \in \mathbb{C}$ tel que les produits partiels*

$$P_N = \prod_{n=1}^{N} a_n = a_1 a_2 \dots a_N$$

tendent vers P quand $N \longrightarrow \infty$.
- converge strictement *si de plus $P \neq 0$.*

De même que pour la convergence des séries, on a une condition nécessaire de convergence stricte :

Proposition 2.2.3. *Si le produit infini $\prod_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge strictement, alors $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$.*

Preuve. Pour montrer que les a_n ne s'annulent pas en cas de convergence stricte, raisonnons par contraposition. Supposons que l'un des a_n est nul alors cela entraine $P_N = 0$ pour tout $N \geqslant n$, et donc $P = 0$ ce qui contredit la convergence stricte. De plus si $P \neq 0$, aucun a_n et aucun P_n ne sont nuls et on a alors

$$a_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} \longrightarrow \frac{P}{P} = 1.$$

□

Théorème 2.2.4. *Si tous les u_n sont dans $]-1,+\infty[$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) Le produit infini $\prod_{n=1}^{+\infty}(1+u_n)$ converge strictement.

(ii) La série $\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(1+u_n)$ converge.

(iii) La série $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ converge.

Preuve. $(i) \Leftrightarrow (ii)$: On a l'équivalence entre ces deux propriétés car la fonction ln est un isomorphisme et un homéomorphisme du groupe multiplicatif $]0,+\infty[$ sur le groupe additif $\mathbb{R}$.

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$: Si la série $\sum \ln(1+u_n)$ converge, ou si $\sum u_n$ converge, alors le terme général tend vers 0 quand $n \to +\infty$ c'est-à-dire dans les deux cas, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ d'où $\ln(1+u_n)$ est équivalent à u_n lorsque $n \to +\infty$. Ainsi la convergence de $\sum \ln(1+u_n)$ équivaut à celle de $\sum u_n$ car les termes généraux sont équivalents et de signe constant, d'où l'équivalence entre ces deux propriétés.

$\square$

Énonçons un dernier théorème sur les produits infinis :

Théorème 2.2.5. *La convergence absolue de la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ entraine la convergence du produit infini $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ (strictement si de plus $u_n \neq -1$ pour tout n).*

Preuve. L'hypothèse entraîne $u_n \to 0$, les points $1+u_n$ sont donc voisins de 1 pour n assez grand. Cela permet d'utiliser la détermination principale du logarithme complexe. Comme $\frac{\ln(1+z)}{z}$ tend vers 1 lorsque z tend vers 0, il existe C et $r \in]0,1[$ tels que $|z| \leqslant r$. Cela entraîne alors,

$$|\ln(1+z)| \leqslant C|z|.$$

Il existe N tel que $|u_n| \leqslant r$ pour $n \geqslant N$, d'où $|\ln(1+u_n)| \leqslant C|u_n|$ et donc la convergence absolue de la série $\sum_{n=N}^{\infty}\ln(1+u_n)$. En passant à l'exponentielle, on en déduit la convergence stricte de $\prod_{n=N}^{\infty}(1+u_n)$, et finalement la convergence (stricte si aucun des N premiers facteurs n'est nul) de $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$.

$\square$

Démontrons maintenant la Proposition 2.2.1 grâce aux rappels faits ci-dessus.

Preuve de la Proposition 2.2.1.

(i) On pose, pour $s \in \Omega_1$, $u_n = -\frac{1}{{p_n}^s}$. Alors la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge absolument. En effet, $p_n \geqslant n$ donc $|u_n| \leqslant \frac{1}{n^{\mathrm{Re}(s)}}$ et $\mathrm{Re}(s) > 1$ donc $\frac{1}{n^{\mathrm{Re}(s)}}$ est le terme général d'une série convergente. Ainsi par le Théorème 2.2.5, comme $u_n \neq -1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, le produit infini $\Pi(s) = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{{p_n}^s}\right)$ converge strictement.

(ii) On a montré juste avant que $\Pi(s)$ converge strictement donc par définition, $\Pi(s)$ est non nul.

(iii) Pour $j \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}$, on pose $A_{j,k} = \{n \in \mathbb{N}^* \,:\, n = p_1^{k_1}p_2^{k_2}\dots p_j^{k_j} \text{ avec } k_1+\dots+k_j = k\}$ et $A_j = \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_{j,k}$. Pour j fixé, on a $A_{j,k} \cap A_{j,k'} = \emptyset$ si $k \neq k'$, car si $p_1^{k_1}p_2^{k_2}\dots p_j^{k_j} = p_1^{k'_1}p_2^{k'_2}\dots p_j^{k'_j}$ on a nécessairement $k_l = k_l'$ pour $l = 1, \dots, j$, puisque les p_l sont premiers et différents. Ensuite $A_j \subset A_{j+1}$ car on peut écrire $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_j^{k_j} = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_j^{k_j} p_{j+1}^0$. Puis, comme tout entier admet une décomposition en produit de nombres premiers, on peut écrire $\mathbb{N}^* = \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j$. Pour $s \in \Omega_1$, on peut alors appliquer le Lemme 2.2.2 à $u_n = \frac{1}{n^s}$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} &= \lim_{j\to+\infty} \sum_{n\in A_j} \frac{1}{n^s} \\
&= \lim_{j\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n\in A_{j_k}} \frac{1}{n^s} \\
&= \lim_{j\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{k_1+\dots+k_j=k} \frac{1}{p_1^{k_1 s} \dots p_j^{k_j s}} \\
&\overset{(*)}{=} \lim_{j\to+\infty} \left[\left(\sum_{k_1=0}^{+\infty} \frac{1}{p_1^{k_1 s}} \right) \dots \left(\sum_{k_j=0}^{+\infty} \frac{1}{p_j^{k_j s}} \right) \right] \\
&= \lim_{j\to+\infty} \left[\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_1^s}} \right) \dots \left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_j^s}} \right) \right] \\
&= \lim_{j\to+\infty} \frac{1}{\prod_{n=1}^{j} (1-\frac{1}{p_n^s})} \\
&= \frac{1}{\Pi(s)}.
\end{aligned}$$

Justifions le point $(*)$:
Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété suivante :

$$\mathcal{P}_n : \quad \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{k_i=0}^{+\infty} \alpha_i^{k_i} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{k_1+\dots+k_n=k} \alpha_1^{k_1} \dots \alpha_n^{k_n}.$$

Initialisation : l'égalité est triviale pour $n = 1$.
Hérédité : Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons $\mathcal{P}_{n+1}$.

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n+1} \left(\sum_{k_i=0}^{+\infty} \alpha_i^{k_i} \right) &= \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{k_i=0}^{+\infty} \alpha_i^{k_i} \right) \times \sum_{k_{n+1}=0}^{+\infty} \alpha_{n+1}^{k_{n+1}} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{k_1+\dots+k_j=k} \alpha_1^{k_1} \dots \alpha_j^{k_j} \right) \times \sum_{k_{n+1}=0}^{+\infty} \alpha_{n+1}^{k_{n+1}} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} \left(\sum_{k_1+\dots+k_j=i} \alpha_1^{k_1} \dots \alpha_j^{k_j} \times \alpha_{n+1}^{k-i} \right) \right) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{k_{n+1}+i=k} \left(\alpha_{n+1}^{k_{n+1}} \times \sum_{k_1+\dots+k_j=i} \alpha_1^{k_1} \dots \alpha_j^{k_j} \right) \right) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{k_1+\dots+k_{n+1}=k} \alpha_1^{k_1} \dots \alpha_{n+1}^{k_{n+1}}.
\end{aligned}$$

La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée.
Donc $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

□

Puisque $\Pi(s)$ est convergent pour tout $s \in \Omega_1$, alors on a :

Corollaire 2.2.6. *La fonction ζ ne s'annule pas dans l'ensemble Ω_1.*

Proposition 2.2.7. *La fonction de Ω_1 dans $\mathbb{C}$, $s \mapsto \zeta(s) - \frac{1}{s-1}$, se prolonge en une fonction holomorphe dans l'ouvert Ω_0.*

Preuve. Pour $s \in \Omega_1$, on a $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^s} = \frac{1}{s-1}$ donc on peut écrire :

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s}\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(s). \tag{2.1}$$

Considérons, la fonction f telle que $f(t) = \frac{1}{t^s}$ pour $t \in [1, +\infty[$. On a alors $f'(t) = \frac{-s}{t^{s+1}}$. Pour $x \in [n, n+1]$, on applique le théorème des accroissements finis à f :

$$|f(n) - f(x)| \leqslant |n - x| \sup_{n \leqslant t \leqslant x} |f'(t)| \leqslant \left|\frac{s}{n^{s+1}}\right| \leqslant \frac{|s|}{n^{\mathrm{Re}(s)+1}}.$$

D'où on obtient :

$$|v_n(s)| = \left|\int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s}\right)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_n^{n+1} \frac{|s|}{n^{\mathrm{Re}(s)+1}}\mathrm{d}x = \frac{|s|}{n^{\mathrm{Re}(s)+1}}.$$

Donc $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n(s)$ converge absolument dans Ω_0. De plus, cette série converge normalement dans l'ensemble $\{s \in \mathbb{C} : |s| \leqslant M, \mathrm{Re}(s) \geqslant \delta\}$ où $M > 0$, $\delta > 0$ et par le théorème de convergence dominée pour les fonctions holomorphes, chaque v_n est une fonction entière. Il en résulte alors que $s \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n(s)$ est holomorphe dans Ω_0, ce qui prouve la proposition, compte tenu de (2.1) .

□

Corollaire 2.2.8. *La fonction ζ définie dans Ω_1 se prolonge en une fonction méromorphe dans Ω_0 qui a un seul pôle simple en $s = 1$, de résidu égal à 1. On note encore ζ la fonction prolongée à Ω_0.*

Preuve. Cela résulte de l'égalité $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + v(s)$ et de la Proposition 2.2.7. □

Remarque 2.2.9. Dans Ω_0 on a $\overline{\zeta(s)} = \zeta(\overline{s})$, en effet ceci est vérifié pour $u(s) = \frac{1}{s-1}$ et pour $v(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s}\right)\mathrm{d}x$ car $\overline{e^{-s\ln t}} = e^{-\overline{s}\ln t}$ pour $t \geqslant 1$. Par conséquent si la fonction ζ s'annule à l'ordre $k \in \mathbb{N}$ en un point s_0 de Ω_0, le point $\overline{s_0}$ est aussi un zéro de ζ du même ordre.

2.3 Les fonctions φ et Φ

On introduit les fonctions φ et Φ, définies pour $x \geqslant 2$ et $s \in \Omega_1$, par :

$$\varphi(x) = \sum_{p_n \leqslant x} \ln p_n, \quad \Phi(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln p_n}{p_n^s}.$$

La fonction Φ est holomorphe dans Ω_1.

Proposition 2.3.1.

(i) Il existe une fonction h holomorphe dans $\Omega_{1/2}$ telle que, pour $s \in \Omega_1$, on ait $\Phi(s) = -\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + h(s)$.

(ii) Pour tout $s \in \overline{\Omega_1} \setminus \{1\}$, on a $\zeta(s) \neq 0$.

(iii) La fonction définie sur Ω_1 par $s \mapsto \Phi(s) - \dfrac{1}{s-1}$ se prolonge en une fonction holomorphe sur un voisinage de l'ensemble $\overline{\Omega_1} = \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) \geqslant 1\}$.

Preuve. (i) Posons $f_n(s) = \left(1 - \dfrac{1}{p_n^s}\right)^{-1}$. D'après la Proposition 2.2.1, on a $\zeta(s) = \lim\limits_{N\to+\infty} \prod\limits_{n=1}^{N} f_n(s)$, où la convergence est uniforme sur tout compact de Ω_1 (vient de la convergence uniforme de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{p_n^s}$ qui entraine alors celle du produit). Par conséquent

$$\zeta'(s) = \lim_{N\to+\infty} \left(\prod_{k=1}^{N} f_n(s)\right)' = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} f_k'(s) \prod_{\substack{n=1\\ n\neq k}}^{N} f_n(s).$$

On en déduit que pour $s \in \Omega_1$, on a :

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{f_k'(s)}{f_k(s)} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} \left(1-\frac{1}{p_k^s}\right)\left(-\frac{p_k^{-s}\ln p_k}{\left(1-\frac{1}{p_k^s}\right)^2}\right) = \lim_{N\to+\infty} \left(-\sum_{k=1}^{N} \frac{\ln p_k}{p_k^s - 1}\right) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln p_k}{p_k^s - 1}.$$

Il résulte donc que dans Ω_1, on a

$$\Phi(s) + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\ln p_k}{p_k^s} - \frac{\ln p_k}{p_k^s - 1}\right) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln p_k}{p_k^s(p_k^s - 1)} = h(s).$$

La série définissant h converge normalement dans $A = \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) \geqslant \frac{1}{2} + \delta, \delta > 0\}$. En effet pour k assez grand, on a, par croissance comparée, $\ln p_k \leqslant p_k^s$ et on a également $p_k \geqslant k$. De plus pour $s \in A$ tel que $s = \frac{1}{2} + \delta$ on a

$$\frac{|p_k^s|}{2^\delta} \geqslant \frac{p_k^{\frac{1}{2}+\delta}}{2^\delta} \geqslant \frac{2^{\frac{1}{2}+\delta}}{2^\delta} \geqslant 1.$$

Donc finalement, il vient que :

$$\left|\frac{\ln p_k}{p_k^s(p_k^s - 1)}\right| \leqslant \frac{1}{p_k^{Res-\delta}(|p_k^s| - 1)} \leqslant \frac{C}{p_k^{Res-\delta} p_k^{Res}} \leqslant \frac{C}{k^{2Res-\delta}} \leqslant \frac{C}{k^{1+\delta}}.$$

La majoration obtenue est alors le terme général d'une série convergente car $\delta > 0$. Donc finalement, par holomorphie du terme général de la série définissant h, on a bien que h est holomorphe, d'où (i).

(ii) Supposons que ζ ait un zéro d'ordre m au point $s = 1 + ib$ avec $b \in \mathbb{R}^*$. Alors, d'après la Remarque 2.2.9, $\overline{s} = 1 - ib$ est aussi un zéro d'ordre m de ζ. Notons $n \geqslant 0$ l'ordre du zéro au point $1 + 2ib$ (et donc celui au point $1 - 2ib$).
D'une part, on a vu dans le Corollaire 2.2.8 que ζ a un pôle simple en 1 de résidu égal à 1. C'est-à-dire qu'on peut écrire pour s dans un voisinage de 1, $\zeta(s) = \dfrac{g(s)}{s-1}$ où g est holomorphe au voisinage de 1 et $g(1) \neq 0$. Alors on a :

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{-1}{s-1} + t(s)\,, \quad \text{où } t \text{ est holomorphe au voisinage de 1.}$$

Ainsi, 1 est un pôle simple de $\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ de résidu -1, donc

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon\frac{\zeta'(1+\varepsilon)}{\zeta(1+\varepsilon)} = -1.$$

Puis d'après (i), on a $\Phi(s) = -\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + h(s)$ où h est holomorphe dans $\Omega_{1/2}$, on en déduit :

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon\Phi(1+\varepsilon) = 1.$$

D'autre part, si s_0 est un zéro d'ordre k de la fonction ζ, on a au voisinage de s_0 :

$$\zeta(s) = (s-s_0)^k g(s), g(s_0) \neq 0.$$

Donc

$$\Phi(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + h(s) = \frac{k}{s-s_0} + w(s)\ , \quad \text{où } w \text{ est holomorphe près de } s_0.$$

Or d'après (i), on a $\Phi(s) = -\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + h(s)$ où h est holomorphe dans $\Omega_{1/2}$, on en déduit donc :

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon\Phi(1+\varepsilon \pm ib) = -m, \quad \lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon\Phi(1+\varepsilon \pm 2ib) = -n.$$

Pour $s \in]1,+\infty[$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\Phi(s+2ib) + \Phi(s-ib) + 4\Phi(s+ib) + 4\Phi(s-ib) + 6\Phi(s) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln p_n}{p_n^s}\left(\frac{1}{p_n^{2ib}} + \frac{4}{p_n^{ib}} + 6 + 4p_n^{ib} + p_n^{2ib}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln p_n}{p_n^s}\left(p_n^{i\frac{b}{2}} + p_n^{-i\frac{b}{2}}\right)^4 \geqslant 0.\end{aligned}$$

En posant maintenant $s = 1+\varepsilon, \varepsilon > 0$, en multipliant l'égalité ci-dessus par ε, puis en faisant tendre ε vers zéro, on obtient : $-n-n-4m-4m+6 \geqslant 0$ *i.e.* $8m \leqslant 6-2n \leqslant 6$. Donc on a forcément $m = 0$, ce qui montre que ζ n'a pas de zéro de la forme $s = 1+ib$ avec $b \neq 0$.

(iii) Le point (ii) entraine que la fonction $\dfrac{\zeta'}{\zeta}$ est holomorphe sur un voisinage de l'ensemble $\overline{\Omega_1}$ privé d'une petite boule $\mathcal{B}(1,\varepsilon)$ de rayon $\varepsilon > 0$ centrée en $s = 1$. Il en est donc de même pour la fonction $s \longmapsto -\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \dfrac{1}{s-1}$. Montrons que cette fonction se prolonge en une fonction holomorphe dans $\mathcal{B}(1,\varepsilon)$. D'après la Proposition 2.2.7, $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + v(s)$, où v est holomorphe dans Ω_0. Donc pour s près de 1, on a

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1} = \frac{-v(s)-(s-1)v'(s)}{1+(s-1)v(s)}\ ,$$

et le membre de droite se prolonge en une fonction holomorphe dans $\mathcal{B}(1,\varepsilon)$ si ε est assez petit. On en déduit alors que $\Phi(s) - \dfrac{1}{s-1} = -\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \dfrac{1}{s-1} + h(s)$ est holomorphe sur un voisinage de $\overline{\Omega_1}$.

□

Proposition 2.3.2. *Il existe $C_0 > 0$ telle que $\varphi(x) \leqslant C_0 x$, pour tout $x \geqslant 2$.*

Preuve. On a d'une part $2^{2n} = (1+1)^{2n} = \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} \geqslant \binom{2n}{n}$. D'autre part, $k = \binom{2n}{n}$ est un entier, de sorte que l'on peut écrire $(2n)! = kn!n!$ où $k \in \mathbb{N}^*$. Soit p un nombre premier appartenant à $]n, 2n]$. Alors p divise $(2n)!$ mais ne divise pas $n!$ donc par l'égalité précédente, p divise k. Alors $\binom{2n}{n} = m \prod_{\substack{n<p\leqslant 2n \\ p\in\mathcal{P}}} p \geqslant \prod_{\substack{n<p\leqslant 2n \\ p\in\mathcal{P}}} p$. D'où $\prod_{\substack{n<p\leqslant 2n \\ p\in\mathcal{P}}} p \leqslant 2^{2n}$. En passant au logarithme, on déduit l'inégalité

$$\varphi(2n) - \varphi(n) \leqslant (2n)\ln 2, \quad n \geqslant 1. \tag{2.2}$$

Soit $x \geqslant 1$. Il existe $n \geqslant 1$ tel que $x \in [n, n+1[$ et alors $\varphi(x) = \varphi(n)$. De plus $2x \in [2n, 2n+2[$. Si $2x \in [2n, 2n+1[$, on a $\varphi(2x) = \varphi(2n)$. Si $2x \in [2n+1, 2n+2[$, on a $\varphi(2x) \leqslant \varphi(2n)+\ln(2n+1) \leqslant \varphi(2n)+\ln x$, donc dans tous les cas on a $\varphi(2x) \leqslant \varphi(2n) + \ln x$.Il en résulte que $\varphi(2x) - \varphi(x) \leqslant \varphi(2n) + \ln x - \varphi(n)$. On déduit alors de (2.2) l'inégalité suivante :

$$\varphi(2x) - \varphi(x) \leqslant 2\ln 2 \times n + \ln x \leqslant (2\ln 2 + 1)x. \tag{2.3}$$

Soit $x \geqslant 1$. Il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $x \in [2^r, 2^{r+1}[$. Alors $x, \frac{x}{2}, \ldots, \frac{x}{2^r}$ appartiennent à $[1, +\infty[$. On applique alors successivement l'inégalité (2.3) :

$$\varphi(2x) - \varphi(\frac{x}{2^r}) = \varphi(2x) - \varphi(x) + \varphi(x) - \varphi(\frac{x}{2}) + \ldots - \varphi(\frac{x}{2^r}) \leqslant (2\ln 2 + 1)\sum_{p=0}^{r} \frac{x}{2^p} \leqslant 2(2\ln 2 + 1)x.$$

Comme $\frac{x}{2^r} \in [1, 2[$, $\varphi\left(\frac{x}{2^r}\right) = 0$ d'où on obtient $\varphi(x) \leqslant (2\ln 2 + 1)x$.

□

Établissons maintenant le lien entre Φ et φ.

Proposition 2.3.3. *Pour $s \in \Omega_1$ on a $\Phi(s) = s\int_1^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^{s+1}}\mathrm{d}x$.*

Preuve. On remarque tout d'abord que l'intégrale définie dans la proposition a bien un sens, en effet φ est mesurable car constante par morceaux et $\left|\frac{\varphi(x)}{x^{s+1}}\right| \leqslant \frac{C_0}{x^{\mathrm{Re}(s)}}$ par la Proposition 2.3.2. Puis on écrit $[1, +\infty[= [1, 2[\cup\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty}[p_j, p_{j+1}[\right)$. Comme $\varphi(x) = 0$ pour $x \in [1, 2[$ il vient :

$$\begin{aligned} s\int_1^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^{s+1}}\mathrm{d}x &= s\sum_{j=1}^{+\infty}\int_{p_j}^{p_{j+1}} \frac{\varphi(x)}{x^{s+1}}\mathrm{d}x \\ &= s\sum_{j=1}^{+\infty}\varphi(p_j)\int_{p_j}^{p_{j+1}} \frac{\mathrm{d}x}{x^{s+1}} \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty}\varphi(p_j)\left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{p_{j+1}^s}\right) \\ &= \frac{\varphi(2)}{2^s} + \sum_{j=2}^{+\infty}\frac{\varphi(p_j) - \varphi(p_{j-1}}{p_j^s}. \end{aligned}$$

Or $\varphi(p_j) - \varphi(p_{j-1}) = \ln p_j$ et $\varphi(2) = \ln 2 = \ln p_1$, il vient donc,

$$s\int_1^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^{s+1}}\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{+\infty}\frac{\ln p_j}{p_j^s} = \Phi(s).$$

□

Proposition 2.3.4. *L'intégrale* $\int_1^{+\infty} \frac{\varphi(x)-x}{x^2}\mathrm{d}x$ *est convergente.*

Pour démontrer cette proposition, on utilisera le résultat suivant dû à D.Newman.

Lemme 2.3.5. *Soit* $f \in L^\infty([0,+\infty])$. *On lui associe la fonction*

$$F(z) = \int_0^{+\infty} e^{-tz} f(t)\mathrm{d}t$$

qui est définie et holomorphe dans l'ouvert Ω_0.
Supposons que F se prolonge en une fonction holomorphe sur un voisinage de l'ensemble $\overline{\Omega_0}$.
Alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ *est convergente et vaut* $F(0)$.

Preuve de la Proposition 2.3.4. En posant $x = e^t$, il est équivalent de montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$, où $f(t) = \dfrac{\varphi(e^t) - e^t}{e^t}$. D'après la Proposition 2.3.2, on a $f \in L^\infty([0,+\infty[)$. Appliquons maintenant le Lemme 2.3.5 à la fonction $f(t) = \dfrac{\varphi(e^t) - e^t}{e^t}$. Nous allons alors montrer que :

$$F(z) = \frac{\Phi(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z}. \tag{2.4}$$

En effet, en posant $x = e^t$ puis $z = s - 1$ avec $\mathrm{Re}(s) > 1$, on obtient :

$$F(z) = \int_0^{+\infty} e^{-tz} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} x^{-z}\frac{\varphi(x)-x}{x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^{s+1}} - \frac{1}{s-1} = \frac{\Phi(s)}{s} - \frac{1}{s-1}.$$

Nous avons vu à la Proposition 2.3.1 (iii) que la fonction $w(s) = \Phi(s) - \frac{1}{s-1}$ est holomorphe sur un voisinage de $\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) \geqslant 1\} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) \geqslant 0\}$. Alors

$$\frac{\Phi(s)}{s} - \frac{1}{s-1} = \frac{1}{s(s-1)} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s}w(s) = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s}w(s),$$

et le membre de droite est holomorphe sur un voisinage de l'ensemble $\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) \geqslant 1\}$.
La fonction F vérifie alors la condition du Lemme 2.3.5, ce qui implique que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est convergente, ce qui prouve la proposition.

□

Proposition 2.3.6. $\varphi(x) \sim x$ *lorsque* $x \to +\infty$

On rappelle le critère de Cauchy pour les intégrales impropres, qu'on utilisera pour démontrer cette proposition.
Rappel (Critère de Cauchy) *Soient* $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ *et* f *une fonction localement continue par morceaux sur* $[a, b[$, *l'intégrale* $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ *est convergente si et seulement si pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $x_\varepsilon \in [a, b[$ *tel que*

$$x, y \in [a, b[, x_\varepsilon \leqslant x < y < b \Rightarrow \left|\int_x^y f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon.$$

Preuve de la Proposition 2.3.6. Soit $\varepsilon > 0$. On définit les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} A_+ &= \{x \in [1, +\infty[\colon \varphi(x) \geqslant (1+\varepsilon)x\}, \\ A_- &= \{x \in [1, +\infty[\colon \varphi(x) \leqslant (1-\varepsilon)x\}. \end{aligned}$$

Montrons que ces ensembles sont bornés. En effet si cela est le cas, on en déduira qu'il existe x_0 tel que pour $x \geqslant x_0$ on ait $1 - \varepsilon \leqslant \frac{\varphi(x)}{x} \leqslant 1 + \varepsilon$ *i.e.* $\left|\frac{\varphi(x)}{x} - 1\right| \leqslant \varepsilon$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = 1$.
Si A_+ n'est pas bornée alors il existe une suite (x_n) qui tend vers $+\infty$ telle que $\varphi(x_n) \geqslant (1+\varepsilon)x_n$, φ étant croissante, $\varphi(t) \geqslant (1+\varepsilon)x_n$, pour $t \geqslant x_n$. Alors :

$$\begin{aligned} \int_{x_n}^{(1+\varepsilon)x_n} \frac{\varphi(t)-t}{t^2}\mathrm{d}t &\geqslant \int_{x_n}^{(1+\varepsilon)x_n} \frac{(1+\varepsilon)x_n - t}{t^2}\mathrm{d}t \\ &= \int_1^{1+\varepsilon} \frac{1+\varepsilon-y}{y^2}\mathrm{d}y \\ &= (1+\varepsilon)\left[-\frac{1}{y}\right]_1^{1+\varepsilon} - \left[\ln y\right]_1^{1+\varepsilon} \\ &= \varepsilon - \ln(1+\varepsilon) > 0\,, \end{aligned}$$

ce qui contredit le critère de Cauchy rappelé ci-dessus compte tenu de la Proposition 2.3.4.
De la même manière, si A_- n'est pas bornée alors il existe une suite (x_n) qui tend vers $+\infty$ telle que $\varphi(x_n) \leqslant (1-\varepsilon)x_n$. Alors :

$$\begin{aligned} \int_{(1-\varepsilon)x_n}^{x_n} \frac{\varphi(t)-t}{t^2}\mathrm{d}t &\leqslant \int_{(1-\varepsilon)x_n}^{x_n} \frac{(1-\varepsilon)x_n - t}{t^2}\mathrm{d}t \\ &= \int_{1-\varepsilon}^{1} \frac{1-\varepsilon-y}{y^2}\mathrm{d}y \\ &= \varepsilon + \ln(1-\varepsilon) < 0\,, \end{aligned}$$

ce qui est également une contradiction.

□

2.4 Preuve du Lemme de Newman 2.3.5

Lemme de Newman. *Soit* $f \in L^\infty([0, +\infty])$. *On lui associe la fonction*

$$F(z) = \int_0^{+\infty} e^{-tz} f(t)\mathrm{d}t$$

qui est définie et holomorphe dans l'ouvert Ω_0.
Supposons que F se prolonge en une fonction holomorphe sur un voisinage de l'ensemble $\overline{\Omega_0}$.
Alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ *est convergente et vaut* $F(0)$.

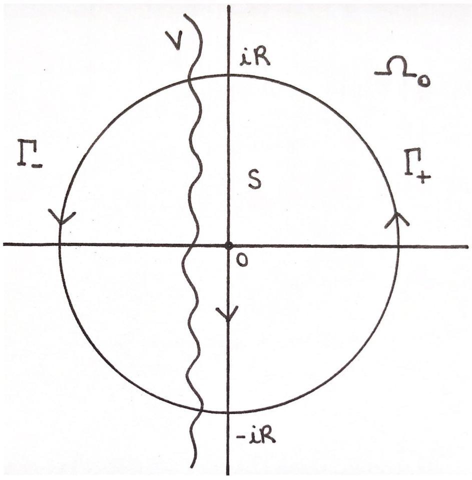
Preuve. D'abord l'holomorphie de F dans Ω_0 résulte du théorème d'holomorphie sous l'intégrale. En effet pour tout $t \geqslant 0$, la fonction définie par $z \mapsto e^{-tz}f(t)$ est holomorphe par holomorphie de l'exponentielle et est dans $L^1([0, +\infty])$ car $\mathrm{Re}(z) > 0$ et $t \geqslant 0$. De plus, si K est un compact de Ω_0 tel que $\mathrm{Re}(z) \geqslant \delta > 0$ pour $z \in K$, alors $|e^{-tz}f(t)| \leqslant \|f\|_\infty e^{-tz} \in L^1([0, +\infty])$.
On veut donc montrer, sous l'hypothèse du lemme sur F, que $\lim\limits_{T\to+\infty} \int_0^T f(t)\mathrm{d}t$ existe et vaut $F(0)$.
Sans perte de généralité, on peut supposer $F(0) = 0$. En effet on pourra remplacer sinon $f(t)$ par $g(t) = f(t) - F(0)e^{-t} \in L^\infty([0, +\infty])$, pour laquelle $G(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt}g(t)\mathrm{d}t = F(z) - \frac{F(0)}{1+z}$ qui est

holomorphe sur un voisinage de $\overline{\Omega_0}$ avec $G(0) = 0$. L'intérêt est qu'alors $z \mapsto \frac{F(z)}{z}$ est holomorphe sur un voisinage de $\overline{\Omega_0}$.
On introduit quelques notations. Soit $\varepsilon > 0$, fixons $R > 0$ tel que

$$\frac{\|f\|_\infty}{R} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{où} \quad \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,+\infty]} |f(t)|. \tag{2.5}$$

Considérons les chemins suivants de $\mathbb{C}$, orientés dans le sens direct

$$\begin{cases} \Gamma_+ = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \mathrm{Re}(z) \geqslant 0\}, \\ \Gamma_- = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \mathrm{Re}(z) \leqslant 0\}, \\ S = [iR, -iR] = \{(1-t)iR - tiR, 0 \leqslant t \leqslant 1\}, \\ \Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_-. \end{cases} \tag{2.6}$$



Il est clair que $\Gamma_+ \cup S$ est entièrement contenu dans le voisinage V de $\overline{\Omega_0}$ dans lequel la fonction F se prolonge en une fonction holomorphe. Soit $T > 0$. On pose

$$F_T(z) = \int_0^T e^{-tz} f(t)\mathrm{d}t \tag{2.7}$$

On a pour $|z| \leqslant C$, $|\mathbb{1}_{[0,T]} e^{-tz} f(t)| \leqslant e^{Ct}\|f\|_\infty \mathbb{1}_{[0,T]} \in L^1(\mathbb{R}_+)$ donc par le théorème d'holomorphie sous l'intégrale, F_T est une fonction entière.
On veut montrer que $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge vers $F(0) = 0$ c'est-à-dire $\lim_{T\to+\infty} F_T(0) = F(0) = 0$ ce qui est équivalent à

$$\forall \varepsilon > 0, \exists T_0 > 0, \ \forall T \geqslant T_0, \quad |F_T(0)| \leqslant \varepsilon.$$

On va alors utiliser les chemins décrits dans (2.6) en écrivant :

$$F_T(0) = \int_{\Gamma_+} h_1(z)\mathrm{d}z + \int_{\Gamma_-} h_2(z)\mathrm{d}z + \int_S h_3(z)\mathrm{d}z \ ,$$

où les fonctions h_1, h_2 et h_3 sont telles que les trois intégrales peuvent être majorées par $\frac{\varepsilon}{3}$ pour obtenir le résultat voulu.
Pour faire apparaître ces trois intégrales, nous allons utiliser la formule de Cauchy :
D'abord, comme F_T est holomorphe, on applique la formule de Cauchy sur $\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_-$ au point $0 \in \Gamma$:

$$F_T(0) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_+} \frac{F_T(z)}{z}\tilde{h}(z)\mathrm{d}z + \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_-} \frac{F_T(z)}{z}\tilde{h}(z)\mathrm{d}z\,, \quad \text{avec } \tilde{h} \text{ holomorphe et telle que } \tilde{h}(0) = 1.$$

Puis on applique, pour obtenir l'intégrale sur S, la formule de Cauchy à F qui est holomorphe sur V sur le lacet $\Gamma_+ \cup S \subset V$ et au point 0. Comme $F(0) = 0$, on obtient :

$$F(0) = 0 = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_+} \frac{F(z)}{z}\tilde{g}(z)\mathrm{d}z + \frac{1}{2i\pi}\int_{S} \frac{F(z)}{z}\tilde{g}(z)\mathrm{d}z\,, \quad \text{avec } \tilde{g} \text{ holomorphe.}$$

Ainsi on a

$$F_T(0) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_+} \frac{F_T(z)}{z}\tilde{h}(z) - \frac{F(z)}{z}\tilde{g}(z)\mathrm{d}z + \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_-} \frac{F_T(z)}{z}\tilde{h}(z)\mathrm{d}z + \frac{1}{2i\pi}\int_{S} \frac{F(z)}{z}\tilde{g}(z)\mathrm{d}z.$$

Donc

$$h_1(z) = \frac{1}{2i\pi}\frac{F_T(z)}{z}\tilde{h}(z) - \frac{F(z)}{z}\tilde{g}(z), \quad h_2(z) = \frac{1}{2i\pi}\frac{F_T(z)}{z}\tilde{h}(z), \quad \text{et} \quad h_3(z) = \frac{1}{2i\pi}\frac{F(z)}{z}\tilde{g}(z).$$

Premier point : Regardons l'intégrale sur Γ_-.
On veut montrer que

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_-} \frac{F_T(z)}{z}\tilde{h}(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{R}.$$

On a alors déjà, en notant $\ell(\Gamma_-)$ la longueur de Γ_- qui est égale à πR,

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_-} \frac{F_T(z)}{z}\tilde{h}(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \sup_{\Gamma_-}\left|\frac{F_T(z)}{z}\tilde{h}(z)\right|\ell(\Gamma_-)\frac{1}{2\pi} \leqslant \sup_{\Gamma_-}\left|\frac{F_T(z)}{z}\tilde{h}(z)\right|\frac{R}{2}.$$

On cherche donc $\tilde{h}$ de sorte que $\sup_{\Gamma_-}\left|\frac{F_T(z)}{z}\tilde{h}(z)\right| \leqslant \frac{2\|f\|_\infty}{R^2}$. Or on a

$$\left|F_T(z)\right| \leqslant \int_0^T e^{-t\mathrm{Re}(z)}\|f\|_\infty \mathrm{d}t \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{|\mathrm{Re}(z)|}e^{-T\mathrm{Re}(z)}.$$

Donc on cherche $\tilde{h}$ telle que

$$\sup_{\Gamma_-}\left|\frac{\tilde{h}(z)}{z}\right| \leqslant \frac{2|\mathrm{Re}(z)|}{R^2}e^{T\mathrm{Re}(z)}.$$

D'où $\tilde{h}(z) = e^{Tz}\tilde{h}_1(z)$ avec $\left|\frac{\tilde{h}_1(z)}{z}\right| \leqslant \frac{2|\mathrm{Re}(z)|}{R^2}$. On peut alors chercher $\tilde{h}_1(z) = a + b(z)$ où $a \in \mathbb{C}$ et b est un polynôme en z à coefficients complexes.
Or pour $z \in \Gamma_-$, on a $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{R^2}$ donc

$$\frac{2|\mathrm{Re}(z)|}{R^2} = \frac{\overline{z} + z}{R^2} = \frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}.$$

On prend alors $a = 1$ et $b(z) = \dfrac{z^2}{R^2}$ pour obtenir le résultat voulu c'est-à-dire :

$$\left|\frac{\tilde{h}(z)}{z}\right| = \left|\frac{1}{z}e^{Tz}\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)\right| \leqslant \frac{2|\mathrm{Re}(z)|}{R^2}e^{T\mathrm{Re}(z)}.$$

Avec $\tilde{h} = e^{Tz}\big(1 + \frac{z^2}{R^2}\big)$ qui est bien holomorphe et telle que $\tilde{h}(0) = 1$.
On obtient alors la majoration pour l'intégrale sur Γ_- en prenant :

$$h_2(z) = \frac{1}{2i\pi}\frac{F_T(z)}{z}e^{Tz}\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right).$$

Deuxième point : Regardons l'intégrale sur Γ_+.
Prenons $\tilde{g}(z) = \tilde{h}(z) = e^{Tz}\left(1 + \dfrac{z^2}{R^2}\right)$. On veut alors montrer que

$$\Big|\int_{\Gamma_+} h_1(z)\mathrm{d}z\Big| := \left|\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_+}\frac{(F_T(z) - F(z))}{z}e^{Tz}\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)\mathrm{d}z\right| \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{R}.$$

On a alors comme dans le premier point,

$$\Big|\int_{\Gamma_+} h_1(z)\mathrm{d}z\Big| \leqslant \sup_{\Gamma_+}\big|h_1(z)\big|\,\ell(\Gamma_+) = \sup_{\Gamma_+}\left|\frac{(F_T(z) - F(z))}{z}e^{Tz}\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)\right|\frac{R}{2}.$$

Puis pour $z \in \Gamma_+$ et $\mathrm{Re}(z) > 0$, on a

$$|F(z) - F_T(z)| \leqslant \|f\|_\infty\int_T^{+\infty} e^{-t\mathrm{Re}(z)}\mathrm{d}t = \frac{\|f\|_\infty}{\mathrm{Re}(z)}e^{-T\mathrm{Re}(z)}.$$

Enfin, pour $z \in \Gamma_+$, on utilisant encore que $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{R^2}$, on obtient

$$\Big|\frac{1}{z}e^{Tz}\big(1 + \frac{z^2}{R^2}\big)\Big| = \Big|e^{Tz}\big(\frac{1}{z} + \frac{z^2}{R^2}\big)\Big| = \Big|e^{Tz}\big(\frac{\overline{z} + z}{R^2}\big)\Big| = \frac{1}{R^2}e^{T\mathrm{Re}(z)}2\mathrm{Re}(z).$$

On en déduit donc la majoration voulue.

Troisième point : Regardons l'intégrale sur S.
Il nous reste à estimer la quantité suivante

$$\int_S h_3(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{F(z)}{z}e^{Tz}\big(1 + \frac{z^2}{R^2}\big)\mathrm{d}z. \tag{2.8}$$

On a

$$\int_S h_3(z)\mathrm{d}z = \frac{-1}{2i\pi}\int_{-R}^{R}\frac{F(iy)}{iy}\big(1 - \frac{y^2}{R^2}\big)e^{iTy}i\mathrm{d}y =: \int_{-R}^{R} G_R(y)e^{iTy}\mathrm{d}y\,, \quad \text{où, } R \text{ étant fixé, } G_R \in C^1(\mathbb{R}).$$

Puis en faisant une intégration par parties, qui se ramène en fait au lemme de Riemann-Lebesgue, on obtient, comme G_R est de classe C^1,

$$\begin{aligned}\Big|\int_{-R}^{R} G_R(y)e^{iTy}\mathrm{d}y\Big| &= \left|\frac{1}{T}\left(\left[G_R(y)\frac{e^{iTy}}{i}\right]_{-R}^{R} + \int_{-R}^{R} iG_R'(y)e^{iTy}\mathrm{d}y\right)\right| \\ &\leqslant \frac{1}{T}\left(|G_R(R)| + |G_R(-R)| + \int_{-R}^{R}|G_R'(y)|\mathrm{d}y\right).\end{aligned}$$

Cette dernière expression tend vers 0 quand T tend vers $+\infty$ et donc

$$\lim_{T\to+\infty} \int_S h_3(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Ainsi il existe $T_0 > 0$ tel que pour tout $T \geqslant T_0$, $\left|\int_S h_3(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$.

Finalement en utilisant (2.5), on peut majorer chacune des trois intégrales par $\dfrac{\varepsilon}{3}$, on obtient

$$\exists T_0 > 0, \forall T \geqslant T_0, \quad |F_T(0)| = \left|\int_0^T f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon \ ,$$

ce qui prouve le Lemme de Newman.

□

2.5 Preuve du théorème des nombres premiers

On rappelle le théorème :

Théorème des nombres premiers. *On a l'équivalent suivant :*

$$\pi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}.$$

Preuve. Soit $x \geqslant 2$. Par définition on peut écrire $\pi(x) = \sum\limits_{\substack{p\leqslant x\\ p\in\mathcal{P}}} 1$, de plus on rappelle que $\varphi(x) = \sum\limits_{\substack{p\leqslant x\\ p\in\mathcal{P}}} \ln(p)$. D'où :

$$\varphi(x) \leqslant \ln(x)\pi(x). \tag{2.9}$$

Soit alors $\varepsilon > 0$.

$$\varphi(x) \geqslant \sum_{x^{1-\varepsilon}<p\leqslant x} \ln p \geqslant \ln(x^{1-\varepsilon}) \sum_{x^{1-\varepsilon}<p\leqslant x} 1 \geqslant (1-\varepsilon)(\ln x)\big(\pi(x) - \sum_{p\leqslant x^{1-\varepsilon}} 1\big).$$

Comme le cardinal de l'ensemble $\{p \in \mathcal{P} \,:\, p \leqslant x^{1-\varepsilon}\}$ est inférieur à $x^{1-\varepsilon}$, on a

$$\Phi(x) \geqslant (1-\varepsilon)\ln x(\pi(x) - x^{1-\varepsilon}). \tag{2.10}$$

On déduit des inégalités (2.9) et (2.10),

$$\frac{\varphi(x)}{x} \leqslant \frac{\pi(x)\ln x}{x} \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x} + \frac{\ln x}{x^{\varepsilon}}.$$

Par la Proposition 2.3.6, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\varphi(x)}{x} = 1$. D'où :

$$1 \leqslant \liminf \frac{\pi(x)\ln x}{x} \leqslant \limsup \frac{\pi(x)\ln x}{x} \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon}.$$

Ces inégalités sont vraies pour tout $\varepsilon > 0$ donc en faisant tendre ε vers zéro, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\pi(x)\ln x}{x} = 1$, ce qui prouve le résultat.

□

Démontrons également le corollaire suivant :

Corollaire. *On a l'équivalent suivant :*

$$p_n \sim n \ln n.$$

Preuve. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} p_n = +\infty$, de plus par définition $\pi(p_n) = n$. D'après le théorème des nombres premiers on a $\dfrac{n \ln p_n}{p_n} = 1 + \varepsilon_n$, où $\varepsilon_n \to 0$, d'où :

$$(1+\varepsilon_n)p_n = n \ln p_n.$$

On en déduit en prenant le logarithme,

$$\ln p_n = \ln n + \ln\ln p_n - \ln(1+\varepsilon_n). \tag{2.11}$$

En divisant par $\ln p_n$ l'égalité (2.11) il vient,

$$1 = \frac{\ln n}{\ln p_n} + \frac{\ln\ln p_n}{\ln p_n} - \frac{\ln(1+\varepsilon_n)}{\ln p_n},$$

ce qui implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{\ln p_n} = 1 \quad i.e. \quad \ln n \sim \ln p_n$. D'où le résultat.

□

3 Les zéros de la fonction ζ

3.1 La fonction Gamma

Dans cette partie nous allons tout d'abord étudier la méromorphie et les pôles de la fonction Γ.

Proposition 3.1.1. *La fonction $\Gamma : z \mapsto \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t$, de Ω_0 dans $\mathbb{C}$ est définie par une intégrale absolument convergente et peut être prolongée en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}\setminus A$ où $A = \{-n; n \in \mathbb{N}\}$ est l'ensemble des pôles de Γ qui sont simples et de résidus $\frac{(-1)^n}{n!}$.*

Preuve. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z) > 0$. $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t =: \int_0^{+\infty} f(z,t)\mathrm{d}t$. On utilise le théorème d'holomorphie sous l'intégrale :
- Pour tout $z \in \Omega_0$, $t \mapsto f(z,t)$ est continue comme produit de fonctions continues.
- Pour tout $t \in]0,+\infty[$, $z \mapsto f(z,t)$ est holomorphe C^1 sur Ω_0 comme produits de fonctions holomorphes C^1.
- Soit $K \subset \Omega_0$ un compact. Il existe $A > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que pour tout $z \in K$, $A > \mathrm{Re}(z) > \varepsilon$. Donc

$$|t^{z-1}e^{-t}| = |e^{-t+(z-1)\ln t}| = e^{-t+(\mathrm{Re}(z)-1)\ln t} \leqslant f_k(t), \quad \text{où } f_k(t) = \begin{cases} e^{-t}t^{\varepsilon-1} & \text{si } t \leqslant 1, \\ e^{-t}t^{A-1} & \text{si } t \geqslant 1. \end{cases}$$

Et f_k est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Or pour $0 < t \leqslant 1$, $f_k(t) \leqslant t^{\varepsilon-1}$ qui est une fonction intégrable sur $]0,1]$ et pour $t \geqslant 1$, $t^{A-1}e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissance comparée donc intégrable sur $]1,+\infty[$. Donc $f_k(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi par le théorème d'holomorphie sous l'intégrale, Γ est holomorphe sur K. Or cela est vrai pour tout compact K inclus dans Ω_0 donc finalement Γ est holomorphe sur Ω_0.

Soit $z \in \Omega_0$, par intégration par parties on a, $\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} t^z e^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} zt^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t$, d'où l'équation fonctionnelle suivante,

$$\forall z \in \Omega_0, \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{3.1}$$

Pour $n \geqslant 1$, posons $\Omega_{-n} = \{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}(z) > -n\} \setminus \{0, -1, \dots, -(n-1)\}$. Si $z \in \Omega_0$, on a par itération de (3.1), $\Gamma(z+n) = (z+n-1)\dots(z+1)z\Gamma(z)$ c'est à dire, si $z \notin \{0, -1, \dots, -(n-1)\}$,

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z+n-1)\dots(z+1)z}.$$

Le terme de droite est une fonction holomorphe sur Ω_{-n}, en effet si $z \in \Omega_{-n}$, $z+n \in \Omega_0$ et on sait que Γ est holomorphe sur Ω_0. On définit alors Γ sur Ω_{-n} par cette formule.
Si $m > n \geqslant 1$, alors les prolongements obtenus sur Ω_{-n} coïncident par prolongement analytique (ils valent tous les deux Γ sur Ω_0). On fait cela pour tout $n \geqslant 1$. On a ainsi prolongé Γ à tout $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$ de façon holomorphe.

Regardons maintenant le comportement de Γ aux entiers $-n$ où $n \geqslant 0$. Soit $n \geqslant 0$, on pose $V = \Omega_{-n-1} \setminus \Omega_{-n+1}$ qui est un voisinage de $-n$ et pour $z \in V$ la fonction φ définie par

$$\varphi : z \mapsto \frac{\Gamma(z+n+1)}{(z+n-1)\dots(z+1)z}.$$

Alors φ est holomorphe sur V d'après ce qu'on a vu avant. Et pour tout $z \in V \setminus \{-n\}$,

$$\Gamma(z) = \frac{\varphi(z)}{z+n},$$

d'où $-n$ est un pôle simple de Γ de résidu $\mathrm{Res}_{-n}(\Gamma) = \lim_{z \to -n} (z+n)\Gamma(z) = \dfrac{(-1)^n}{n!}$.

□

Démontrons maintenant la propriété suivante (due à Riemann), qui nous permettra par la suite de localiser une partie des zéros de ζ sur $\mathbb{C}$ grâce à la symétrie qu'elle engendre.

Proposition 3.1.2. *La fonction ζ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ et on a, pour tout $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$:*

1. *$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \eta(s)$ où η est holomorphe dans $\mathbb{C}$.*
2. *$I(s) = I(1-s)$, où $I(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$.*

Pour démontrer cette propriété, on va utiliser la formule sommatoire de Poisson qui est énoncée dans la proposition suivante.

Proposition 3.1.3 (Formule de Poisson)**.** *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est de classe C^1. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| + |f'(x)| \leqslant \frac{C}{1+x^2}$. Alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(2\pi n)$.*

Preuve. Justifions que $\hat{f}(\xi)$ est bien définie pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. On a

$$|f(x)e^{-ix\xi}| = |f(x)| \leqslant |f(x)| + |f'(x)| \leqslant \frac{C}{1+x^2},$$

et la fonction obtenue est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc $\hat{f}$ est bien définie.
Posons $g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ et procédons en trois étapes :

1. Montrons que g est de classe C^1 et 1-périodique.
2. Calculons $\hat{g}(n) = \int_0^1 g(t)e^{-2i\pi nt}\mathrm{d}t$.
3. Déduisons la formule de Poisson.

1.Appliquons le théorème de dérivation sous l'intégrale sur le compact $]-R, R[$, $R > 0$:
- pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $x \to f(x+n)$ est dérivable car f est de classe C^1.
- soit $x \in]-R, R[$, on a $|f'(x+n)| \leqslant \dfrac{C}{1+(x+n)^2}$. Or pour $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|n| \geqslant R$,

$$|x+n| \geqslant |n| - |x| \geqslant |n| - R.$$

D'où

$$\forall x \in]-R, R[, \forall n \in \mathbb{Z} \text{ tel que } |n| \geqslant R, |f'(x+n)| \leqslant \frac{C}{1+(|n|-R)^2} := \psi_k(n).$$

Et ψ_k est une fonction sommable et indépendante de x. Ainsi $\sum_{|n|\geqslant R} f(x+n)$ est dérivable sur $]-R, R[$, pour tout $R > 0$. Or $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{|n|\geqslant R} f(x+n) + \sum_{|n|<R} f(x+n)$, on ajoute un nombre fini de termes dérivables donc g est dérivable sur $]-R, R[$ pour tout $R > 0$. D'où g est dérivable sur $\mathbb{Z}$.
Puis en appliquant à g' le théorème de continuité sous l'intégrale avec la même majoration que précédemment, on a en fait que g est C^1. Puis g est clairement 1-périodique.

2. Soit $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
\hat{g}(n) &= \int_0^1 g(t)e^{-2i\pi nt}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(t+k)e^{-2i\pi nt}\mathrm{d}t \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(t+k)e^{-2i\pi nt}\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_k^{k+1} f(u)e^{-2i\pi nu}\mathrm{d}u \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-2i\pi nu}\mathrm{d}u \\
&= \hat{f}(2\pi n).
\end{aligned}$$

Justifions maintenant l'interversion série-intégrale $(*)$:
On a, si $t \in]-1, 1[$ et $k \geqslant 2$, $|f(t+k)| \leqslant \dfrac{c}{1+(|k|-1)^2}$ et cette fonction est sommable sur $\{|k| \geqslant 2\}$ car est équivalente à $\frac{C}{k^2}$. On a alors

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^1 |f(t+k)|\mathrm{d}t = \sum_{|k|\geqslant 2} \frac{C}{1+(|k|-1)^2} + \sum_{|k|<2} \frac{C}{1+(|k|-1)^2} < +\infty\ ,$$

car on ajoute un nombre fini de termes. Donc par Fubini on a le résultat.

3. Comme g est C^1, on peut appliquer le théorème de Dirichlet :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{g}(n)e^{-2i\pi nx}.$$

Alors en $x = 0$: $g(0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{g}(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(2\pi n)$. Et par définition de g on a également $g(0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)$, d'où on obtient la formule de Poisson.

□

Preuve de la Proposition 3.1.2. Posons $f : x \mapsto e^{-\pi t x^2}$, avec $t > 0$ et $\theta(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi t n^2}$. Montrons alors l'identité de Jacobi,

$$\forall t > 0, \quad \theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\theta(\frac{1}{t}). \tag{3.2}$$

On a, pour $t > 0$,
- $x \to (1 + x^2)f(x) = (1 + x^2)e^{-\pi t x^2}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et qui tend vers zéro en $\pm\infty$, elle est donc bornée donc il existe une constante $C > 0$ telle que $|f(x)| \leqslant \frac{C}{1+x^2}$.
- En faisant le même raisonnement en remplaçant f par f' qui est aussi continue, on a aussi qu'il existe une constante $C' > 0$ telle que $|f'(x)| \leqslant \frac{C'}{1+x^2}$.

Les hypothèses de la proposition précédente sont alors vérifiées pour f donc on peut lui appliquer la formule de Poisson.
On a

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t x^2} e^{-ix\xi} \mathrm{d}x \ ,$$

puis en posant le changement de variable $y = \sqrt{t\pi}x + \dfrac{i\xi}{2\sqrt{t\pi}}$ et en reconnaissant l'intégrale de Gauss, on obtient,

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t x^2} e^{-ix\xi} \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sqrt{t\pi}x + \frac{i\xi}{2\sqrt{t\pi}})^2} e^{-\frac{\xi^2}{4t\pi}} \mathrm{d}x \\
&= e^{-\frac{\xi^2}{4t\pi}} \frac{1}{\sqrt{t\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\xi^2}{4t\pi}}.
\end{aligned}$$

D'où $\hat{f}(2\pi n) = \dfrac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\pi n^2}{t}}$. Et $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(2\pi n) = \frac{1}{\sqrt{t}}\theta(\frac{1}{t})$. Donc en appliquant la formule de Poisson on obtient l'identité de Jacobi (3.2).
Posons maintenant $\tilde{\theta}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi t n^2}$. On a alors $\theta(t) = 2\tilde{\theta}(t) + 1$. L'identité de Jacobi entraine alors,

$$\tilde{\theta}(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \left(2\tilde{\theta}(\frac{1}{t} + 1) - \frac{1}{2}\right). \tag{3.3}$$

Soit s tel que $\sigma = \mathrm{Re}(s) > 1$. On rappelle que $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\mathrm{d}t$. Alors,

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\mathrm{d}t = \pi^{\frac{s}{2}} n^s \int_0^{+\infty} e^{-\pi n^2 y} y^{\frac{s}{2}-1} \mathrm{d}y.$$

D'où,

$$\frac{1}{n^s} = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_0^{+\infty} e^{-\pi n^2 y} y^{\frac{s}{2}-1} \mathrm{d}y.$$

En sommant on obtient alors,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\pi n^2 y} y^{\frac{s}{2}-1} \mathrm{d}y. \tag{3.4}$$

Considérons la suite (f_N) définie par $f_N(y) = \sum_{n=1}^{N} e^{-\pi n^2 y} y^{\frac{s}{2}-1}$. Pour $y > 0$ fixé, (f_N) converge vers $\tilde{\theta}(y)y^{\frac{s}{2}-1}$ et $|f_N(y)| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 y} y^{\frac{\sigma}{2}-1} =: g(y)$. Le théorème de Fubini-Tonelli et (3.4) entrainent :

$$\int_{n=1}^{+\infty} g(y)\mathrm{d}y = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{n=1}^{+\infty} y^{\frac{\sigma}{2}-1} e^{-\pi n^2 y}\mathrm{d}y = \frac{\Gamma\left(\frac{\sigma}{2}\right)}{\pi^{\frac{\sigma}{2}}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\sigma} < +\infty \text{ car } \sigma > 1.$$

D'où par échange série-intégrale,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{\Gamma\left(\frac{\sigma}{2}\right)}{\pi^{\frac{\sigma}{2}}} \int_0^{+\infty} \tilde{\theta}(y) y^{\frac{s}{2}-1}\mathrm{d}y, \quad \mathrm{Re}(s) > 1. \tag{3.5}$$

Pour $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$, on définit $I(s) = \int_0^{+\infty} \tilde{\theta}(y)y^{\frac{s}{2}-1}\mathrm{d}y$, qu'on peut découper de la façon suivante :

$$I(s) = \int_0^1 \tilde{\theta}(y)y^{\frac{s}{2}-1}\mathrm{d}y \int_1^{+\infty} \tilde{\theta}(y)y^{\frac{s}{2}-1}\mathrm{d}y =: I_1(s) + I_2(s).$$

En utilisant (3.3) dans la première intégrale, il vient, en utilisant le changement de variable $t = \frac{1}{y}$,

$$\begin{aligned}
I_1(s) &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2\sqrt{y}}(2\tilde{\theta}(\frac{1}{y} + 1) - \frac{1}{2}\right] y^{\frac{s}{2}-1}\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \tilde{\theta}(\frac{1}{y}) y^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}}\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\int_0^1 y^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}}\mathrm{d}y - \frac{1}{2}\int_0^1 y^{\frac{s}{2}-1}\mathrm{d}y \\
&= \int_1^{+\infty} \tilde{\theta}(t)t^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} t^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} t^{-\frac{s}{2}-1}\mathrm{d}t \\
&= \int_1^{+\infty} \tilde{\theta}(t)t^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t + \left[\frac{t^{-\frac{s}{2}+\frac{1}{2}}}{1-s}\right]_1^{+\infty} - \left[\frac{t^{-\frac{s}{2}}}{-s}\right]_1^{+\infty} \\
&= \int_1^{+\infty} \tilde{\theta}(t)t^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}.
\end{aligned}$$

Il en découle alors que

$$I(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{+\infty} \tilde{\theta}(y)\big(y^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} + y^{\frac{s}{2}-1}\big)\mathrm{d}y.$$

Alors par (3.5) et par le fait que $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{\pi^{s/2}}{2(s-1)\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)} + \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_1^{+\infty} \left(y^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} + y^{\frac{s}{2}-1}\right)\tilde{\theta}(y)\mathrm{d}y. \tag{3.6}$$

Montrons alors que le membre de droite de (3.6) admet un prolongement holomorphe à $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.
On a vu dans la propriété précédente que $z \mapsto \frac{1}{\Gamma(z)}$ admet un prolongement holomorphe à $\mathbb{C}$.
Ainsi, comme $\pi^{s/2} = e^{\frac{s}{2}\ln(\pi)}$, les fonctions

$$s \mapsto \frac{\pi^{s/2}}{2\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)} \quad \text{et} \quad s \mapsto \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}$$

admettent aussi un prolongement holomorphe à $\mathbb{C}$. De plus on a

$$\frac{\pi^{s/2}}{2\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)} = \frac{\pi^{1/2}}{2\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} + (s-1)\Psi(s)\,,$$

où Ψ est holomorphe sur $\mathbb{C}$. Et on peut également calculer

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{d'où} \quad \frac{\pi^{1/2}}{2\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = 1.$$

Donc finalement on obtient

$$\frac{\pi^{s/2}}{2(s-1)\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)} = \frac{1}{s-1} + \Psi(s). \tag{3.7}$$

Il reste à montrer que l'intégrale du membre de droite de (3.6) est holomorphe sur $\mathbb{C}$. L'intégrande est trivialement holomorphe dans $\mathbb{C}$. De plus, prenons s dans un compact de $\mathbb{C}$ tel que $a < \mathrm{Re}(s) = \sigma < b$ alors on a pour $y \geqslant 1$:

$$|y^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} + y^{\frac{s}{2}-1}| \leqslant y^{-\frac{a}{2}-\frac{1}{2}} + y^{\frac{b}{2}-1},$$

et on a aussi, toujours pour $y \geqslant 1$:

$$\tilde{\theta}(y) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n y} = \frac{e^{-\pi y}}{1-e^{-\pi y}} \leqslant \frac{e^{-\pi y}}{1-e^{-\pi}}.$$

Donc finalement,

$$|y^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} + y^{\frac{s}{2}-1}||\tilde{\theta}(y)| \leqslant \left(y^{-\frac{a}{2}-\frac{1}{2}} + y^{\frac{b}{2}-1}\right)\frac{e^{-\pi y}}{1-e^{-\pi}} \in L^1([1,+\infty[).$$

Donc par le théorème d'holomorphie sous l'intégrale, l'intégrale du membre de droite de (3.6) est bien holomorphe sur $\mathbb{C}$.
Ainsi le membre de droite de (3.6) est bien holomorphe sur $\mathbb{C}$ et par le théorème de prolongement analytique, on peut alors prolonger l'holomorphie de ζ sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ et on a pour tout $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$,

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \eta(s)\,, \quad \text{où} \quad \eta(s) = \Psi(s) + \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_1^{+\infty} \left(y^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} + y^{\frac{s}{2}-1}\right)\tilde{\theta}(y)\mathrm{d}y.$$

Alors, comme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s)$ pour $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$, on a bien $I(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$.
De plus,

$$\begin{aligned} I(1-s) &= \frac{1}{(1-s)(-s)} + \int_1^{+\infty} \tilde{\theta}(y)\big(y^{-\frac{1-s}{2}-\frac{1}{2}} + y^{\frac{1-s}{2}-1}\big)\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{s(s_1)} + \int_1^{+\infty} \tilde{\theta}(y)\big(y^{\frac{s}{2}-1+y^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}}\big)\mathrm{d}y \\ &= I(s)\,, \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve.

□

3.2 Localisation des zéros de ζ

Étudions les zéros de ζ sur les différentes parties du plan complexe.

3.2.1 Dans $\overline{\Omega_1} = \{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}(z) \geqslant 1\}$

On a vu dans la Proposition 2.3.1 que la fonction ζ n'a pas de zéros dans $\overline{\Omega_1}$ et par le Corollaire 2.2.8 que ζ a un pôle simple en 1.

3.2.2 Dans $S = \{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}(z) \leqslant 0\}$

Pour $z \in S$, on rappelle la formule de symétrie de la Proposition 3.1.2,

$$I(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)\Gamma(\frac{s}{2}) = I(1-s).$$

Regardons le comportement de ζ aux points $-2n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Soit $k \in \mathbb{N}$, comme $-2k$ est un pôle simple de $\Gamma\left(\frac{\cdot}{2}\right)$, sa limite en ce point est infinie. Or si $s = -2k$, $1 - s = 1 + 2k \in \Omega_1$ donc $\zeta(1-s)$ est bornée, et alors $I(1-s)$ l'est aussi. Ainsi par la formule de symétrie $I(s)$ est également bornée, donc on doit forcément avoir $\zeta(s) = 0$. D'où ζ a des zéros aux points $-2n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
Montrons que ζ ne peut pas avoir d'autres zéros dans S. Supposons par l'absurde que ζ s'annule en un $s \in S \setminus \{-2n; n \in \mathbb{N}\}$. Alors

$$I(s) = 0 = I(1-s) = \pi^{-\frac{(1-s)}{2}}\zeta(1-s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right),$$

et comme Γ ne s'annule pas on doit avoir $\zeta(1-s) = 0$, or comme $s \in \Omega_{-1}$ alors $1 - s \in \Omega_1$. On obtient une absurdité car ζ n'a pas de zéros dans Ω_1.
Finalement les zéros de ζ dans S sont les $\{-2n; n \in \mathbb{N}\}$.

3.2.3 Dans la bande critique $B = \{z \in \mathbb{C}; 0 < \mathrm{Re}(z) < 1\}$

L'hypothèse de Riemann conjecturée en 1859 par Riemann (voir l'article [5]) affirme que tous les zéros de la fonction ζ se trouvent sur la droite $\mathcal{D} = \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}\}$. Riemann affirme en fait qu'on peut obtenir un développement asymptotique de $\pi(x)$ quand $x \to +\infty$ dont le premier terme est

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$$

avec un reste dépendant de la localisation des zéros de ζ.

Nous allons dans cette sous partie montrer comment obtenir formellement une asymptotique de φ dans B plus précise que l'équivalent de la Proposition 2.3.6.
Avec les notations du lemme de Newman 2.3.5, en posant pour $t \geqslant 0$ et $z \in \Omega_0$,

$$f(t) = \frac{\varphi(e^t) - e^t}{e^t} \quad \text{et} \quad F(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t)\mathrm{d}t,$$

on a vu dans les parties précédentes que pour $z \in \Omega_0$,

$$F(z) = \frac{\Phi(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z} = \frac{1}{z+1}\left(h(z+1) - \frac{\zeta'(z+1)}{\zeta(z+1)}\right) - \frac{1}{z},$$

et la fonction définie par $z \mapsto h(z+1)$ se prolonge de façon holomorphe à $\Omega_{-1/2}$.
Faisons l'hypothèse que ζ n'a pas de zéro dans Ω_{x_0} où $\frac{1}{2} < x_0 < 1$, alors cette formule (et l'holomorphie) se prolonge à $\Omega_{x_0-1} \setminus \{0\}$.

Par définition, F est définie comme une transformée de Laplace, on a alors un théorème d'inversion, énoncé et illustré dans [3], qui permet de trouver l'original f :

Théorème 3.2.1 (Formule de Bromwich-Wagner)**.** *Soit G la transformée de Laplace définie pour $z \in \mathbb{C}$ par $G(z) = \int_{\mathbb{R}} g(t)e^{-zt}\mathrm{d}t$ et $x_0 \in \mathbb{R}$, on suppose qu'elle vérifie :*

(i) *G est holomorphe dans le demi-plan Ω_{x_0}*

(ii) $\lim\limits_{|z|\to+\infty} |G(z)| = 0$ *pour $z \in \Omega_{x_0}$*

(iii) $\forall x > x_0$, *la fonction $y \in \mathbb{R} \mapsto G(x+iy)$ est sommable sur $\mathbb{R}$.*

Alors, pour $\mathcal{B}$ une droite parallèle à l'axe imaginaire d'abscisse $x > x_0$, l'originale g de la fonction G est donnée par

$$g(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{B}} G(z)e^{zt}\mathrm{d}z.$$

Ainsi ici, on a que F est holomorphe dans Ω_{x_0-1}. Faisons alors l'hypothèse ici que $\lim\limits_{|z|\to+\infty} |F(z)| = 0$ et $y \mapsto F(x+iy)$ est sommable sur $\mathbb{R}$ pour $x > x_0 - 1$. Les hypothèses du théorème précédent sont vérifiées, on peut alors l'appliquer pour la droite $i\mathbb{R}$:

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{R}} F(iy)e^{iyt}\mathrm{d}y.$$

En posant $x = e^t$, on obtient donc, comme $f(t) = \dfrac{\varphi(e^t) - e^t}{e^t}$, la formule suivante, pour $x > 0$:

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= x + xf(\ln(x)) \\
&= x + \frac{x}{2i\pi} \int_{\mathbb{R}} F(iy)e^{iy\ln(x)}\mathrm{d}y \\
&= x - \frac{1}{2i\pi}\frac{x}{\ln(x)} \int_{\mathbb{R}} F'(iy)e^{iy\ln(x)}\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

On en déduit un développement asymptotique de φ à l'infini par intégrations par parties.

4 Études asymptotiques

Dans cette partie nous étudierons deux méthodes pour trouver des limites d'intégrales de type "transformée de Laplace" ou d'"intégrales oscillantes", ces deux méthodes sont présentées et démontrées dans [1].

4.1 La méthode de Laplace

4.1.1 Formule de Laplace

Le but de cette méthode est d'étudier le comportement lorsque t tend vers l'infini de l'intégrale suivante :

$$F(t) = \int_a^b e^{t\varphi(x)} f(x)\mathrm{d}x\ , \quad \text{où } \varphi \text{ est à valeurs réelles.}$$

Nous allons alors montrer le théorème suivant.

Théorème 4.1.1. *Soit $I =]a,b[$ un intervalle (borné ou non), $\varphi \in C^2(I,\mathbb{R})$ et $f \in C^0(I,\mathbb{C})$.On suppose :*

(i) $\int_a^b e^{t\varphi(x)}|f(x)|\mathrm{d}x < +\infty$ *pour tout* $t > 0$.

(ii) φ' *s'annule en un seul point* x_0 *tel que* $\varphi''(x_0) < 0$*, en d'autres termes* φ *atteint son maximum au point d'abscisse* x_0.

(iii) $f(x_0) \neq 0$.

Alors

$$F(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{|\varphi''(x_0)|}} e^{t\varphi(x_0)} f(x_0) t^{-1/2}.$$

Preuve. Soit $x \in I$. Comme φ est de classe C^1, on a $\varphi(x) = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^x \varphi'(t)\mathrm{d}t$. On fait alors l'intégration par parties suivante :

$$\begin{cases} u(t) = \varphi'(t) & u'(t) = \varphi''(t)dt \\ v'(t) = dt & v(t) = -(x-t) \end{cases}$$

ce qui nous donne,

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \big[-\varphi'(t)(x-t)\big]_{x_0}^x + \int_{x_0}^x (x-t)\varphi''(t)\mathrm{d}t.$$

Puis on fait le changement de variable $t = x_0 + (x-x_0)u$:

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + (x-x_0)^2 \int_0^1 (1-u)\varphi''(x_0 + (x-x_0)u)\mathrm{d}u =: \varphi(x_0) + (x-x_0)^2\psi(x)\ ,$$

où ψ est continue sur I, C^1 sur $I \setminus \{x_0\}$ et $\psi(x_0) = \frac{1}{2}\varphi'(x_0)$. Comme $\varphi''(x_0) < 0$, il existe $\delta_1 > 0$ tel que $\psi(x) < 0$ sur $J_1 =]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1[$.

Posons maintenant $u : x \mapsto (x-x_0)\sqrt{-\psi(x)}$ qui est continue sur J_1 et C^1 sur $J_1 \setminus \{x_0\}$. Montrons que u se prolonge en une fonction de classe C^1 sur tout J_1 avec $u'(x_0) = \sqrt{-\frac{1}{2}\varphi''(x_0)} > 0$. En effet, par définition, pour $x \neq x_0$,

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{(x-x_0)^2},$$

donc on a pour $x \neq x_0$:

$$\psi'(x) = \frac{\varphi'(x)}{x-x_0} - 2\psi(x) = \frac{\varphi'(x) - \varphi'(x_0)}{x-x_0} - 2\psi(x).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} u'(x) &= \sqrt{-\psi(x)} - (x-x_0)\frac{\psi'(x)}{2\sqrt{-\psi(x)}} \\ &= \sqrt{-\psi(x)} - \frac{1}{2\sqrt{-\psi(x)}}\Big(\frac{\varphi'(x)-\varphi'(x_0)}{x-x_0} - 2\psi(x)\Big) \\ &\underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \sqrt{-\frac{1}{2}\varphi''(x_0)} - \frac{1}{2\sqrt{-\psi(x)}}(\varphi''(x_0) - \varphi''(x_0)) \\ &= \sqrt{-\frac{1}{2}\varphi''(x_0)} > 0. \end{aligned}$$

Alors il existe $\delta \leqslant \delta_1$ tel que $u'(x) \neq 0$ pour $x \in J :=]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.
Soit $\theta \in C_c^\infty(J)$ telle que $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ et $\theta(x) = 1$ pour $|x - x_0| \leqslant \frac{\delta}{2}$. On peut alors écrire pour $t \geqslant 0$:

$$F(t) = \int_a^b e^{t\varphi(x)} f(x)\theta(x)\mathrm{d}x + \int_a^b e^{t\varphi(x)} f(x)(1-\theta(x))\mathrm{d}x =: F_1(t) + F_2(t).$$

• Étude de F_1 :
Comme θ est nulle hors de J et en utilisant que $\varphi(x) = \varphi(x_0) + (x - x_0)^2\psi(x)$, on peut réécrire F_1 :

$$\forall t \geqslant 0, \quad F_1(t) = \int_J e^{t\varphi(x_0)+t(x-x_0)^2\psi(x)}\theta(x)f(x)\mathrm{d}x.$$

On pose alors le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} s = u(x) = (x - x_0)\sqrt{-\psi(x)}, \\ x = g(s) = u^{-1}(s). \end{cases}$$

On a alors :

$$\forall t \geqslant 0, \quad F_1(t) = \int_{u(J)} e^{t\varphi(x_0)} e^{-ts^2} h(s)\mathrm{d}s \quad \text{où } h(s) = f(g(s))\theta(g(s))g'(s).$$

De plus $f\circ\theta$ est C^∞ à support compact dans J car θ l'est et on peut supposer, quitte à diminuer δ, que $h = f\circ\theta\circ g$ l'est aussi. D'où $h \in C_\mathrm{c}^\infty(J)$. Par ailleurs, comme h est nulle en dehors de J, on peut réécrire l'intégrale sur $\mathbb{R}$, puis on fait le changement de variable $y = s\sqrt{t}$, ce qui donne,

$$\forall t \geqslant 0, \quad F_1(t) = e^{t\varphi(x_0)} \int_\mathbb{R} e^{y^2} h(\frac{y}{\sqrt{t}})\frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}y =: \frac{1}{\sqrt{t}} e^{t\varphi(x_0)} \int_\mathbb{R} \rho(y,t)\mathrm{d}y.$$

On a alors :
- à $y \in \mathbb{R}$ fixé, $\rho(y,t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-y^2}h(0)$.
- $|\rho(y,t)| \leqslant \sup_\mathbb{R} |h| e^{-y^2}$ qui est indépendante de t et intégrable sur $\mathbb{R}$.
Ainsi par le théorème de convergence dominée, on a

$$e^{-t\varphi(x_0)} t^{1/2} F_1(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} h(0)\sqrt{\pi}.$$

Or $h(0) = f(x_0)\theta(x_0)g'(0) = f(x_0)\frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{2}\varphi''(x_0)}}$. D'où,

$$F_1(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{-\frac{1}{2}\varphi''(x_0)}} e^{t\varphi(x_0)} f(x_0) t^{-1/2}.$$

• Étude de F_2 :
On veut comparer la décroissance de $e^{-t\varphi(x_0)}F_2(t)$ à celle de $e^{-t\varphi(x_0)}F_1(t)$ qui elle est à décroissance en $t^{-1/2}$. Pour cela, il est nécessaire de faire apparaitre du $e^{\varphi(x)}$ pour pouvoir majorer l'intégrale avec $|f(x)|$ en utilisant l'hypothèse (i) du théorème. On écrit alors pour $t \geqslant 0$ et $x \in I$:

$$t\varphi(x) = \varphi(x) + (t-1)\varphi(x).$$

Majorons maintenant $(t-1)\varphi(x)$. On a $1 \leqslant 1-\theta \leqslant 0$ et $(1-\theta)(x)$ est nul pour $|x-x_0| \leqslant \frac{\delta}{2}$, de plus comme φ atteint son maximum au point x_0, on a pour $x \in \mathrm{Supp}(1-\theta)$,

$$\varphi(x) \leqslant \min\left(\varphi\big(x_0-\frac{\delta}{2}\big), \varphi\big(x_0+\frac{\delta}{2}\big)\right) =: m \quad \text{et} \quad m < \varphi(x_0).$$

On a alors $\varphi(x)-\varphi(x_0) \leqslant m-\varphi(x_0) < 0$. Donc sur le support de $1-\theta$, il existe $\mu > 0$ tel que $\varphi(x_0)-\varphi \geqslant \mu > 0$. Ainsi pour tout $t \geqslant 1$ et $x \in \mathrm{Supp}(1-\theta)$,

$$t\varphi(x) = \varphi(x)+(t-1)\varphi(x) \leqslant \varphi(x)+(t-1)(\varphi(x_0)-\mu).$$

D'où :

$$\forall t \geqslant 1, \quad |F_2(t)| \leqslant e^{t\varphi(x_0)}e^{-(t-1)\mu-\varphi(x_0)}\int_{\mathbb{R}} e^{\varphi(x)}|f(x)|\mathrm{d}x \leqslant e^{t\varphi(x_0)}Me^{-t\mu},$$

où $M = e^{-\varphi(x_0)+\mu}\int_{\mathbb{R}} e^{\varphi(x)}|f(x)|\mathrm{d}x < +\infty$ par l'hypothèse (i).
Ainsi $e^{-t\varphi(x_0)}F_2(t)$ est à décroissance exponentielle, donc F_2 est négligeable devant F_1, ce qui prouve le théorème. □

4.1.2 Application : formule de Stirling

On veut trouver un équivalent pour t tendant vers l'infini de $\Gamma(t+1)$ et par conséquent de $n!$ quand n tend vers $+\infty$ car $\Gamma(n+1) = n!$.
On rappelle que pour $t > 0$,

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}\mathrm{d}x\ ;$$

donc on a :

$$\Gamma(t+1) = \int_0^{+\infty} x^t e^{-x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{t\ln(x)-x}\mathrm{d}x.$$

On fait alors le changement de variable $x = ty$ pour faire apparaitre la phase φ du théorème précédent,

$$\Gamma(t+1) = \int_0^{+\infty} e^{t\ln(t)+t\ln(y)-ty}t\mathrm{d}y = te^{t\ln(t)}\int_0^{+\infty} e^{t(\ln(y)-y)}\mathrm{d}y.$$

On pose alors pour $y > 0$, $f(y) = 1$ et $\varphi(y) = \ln(y)-y$. On a alors :
- Pour $t \geqslant 0$, $\int_0^{+\infty} e^{t\varphi(y)}|f(y)|\mathrm{d}y \leqslant +\infty$ car à partir d'un certain rang $\ln(y) \leqslant \frac{y}{2}$ et $y \mapsto e^{-ty} \in L^1(\mathbb{R}_+)$.
- Pour $y > 0$, $\varphi'(y) = \frac{1}{y}-1$ d'où $\varphi'(y) = 0$ équivaut à $y = 1$. De plus, $\varphi''(y) = -\frac{1}{y^2}$ d'où $\varphi''(1) = -1 < 0$.
- $f(1) = 1 \neq 0$.

Alors les hypothèses du théorème précédent sont toutes vérifiées d'où,

$$\frac{1}{t}e^{-t\ln(t)}\Gamma(t+1) \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}e^{-t}t^{-1/2},$$

c'est à dire,

$$\Gamma(t+1) \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}e^{-t}t^{t+\frac{1}{2}}.$$

On obtient alors la formule de Stirling,

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

4.2 La méthode de la phase stationnaire

4.2.1 Formule de la phase stationnaire

Le but de cette méthode est d'étudier le comportement lorsque t tend vers $+\infty$ (le cas en $-\infty$ étant analogue) d'intégrales de la forme :

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\varphi(x)} a(x) \mathrm{d}x \ , \quad \text{où } \varphi \text{ est à valeurs réelles.}$$

Pour simplifier, on supposera :

$$\begin{cases} \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}), \\ a \in C_c^\infty(\mathbb{R}). \end{cases} \tag{H1}$$

On va alors distinguer les cas où φ' s'annule ou pas sur le support de a et étudier les différents comportements de F pour ces cas. La méthode de la phase stationnaire concerne alors le cas où φ' peut s'annuler.

1) Cas où φ' ne s'annule pas (phase "non stationnaire")

Théorème 4.2.1. *Supposons que pour tout x dans le support de a on ait $\varphi'(x) \neq 0$.*
Alors la fonction F est à décroissance rapide à l'infini i.e.

$$\forall N \in \mathbb{N}, \exists C_N > 0, \forall t \geqslant 1, \quad |F(t)| \leqslant C_N t^{-N}.$$

Preuve. Comme φ' ne s'annule pas sur le support de a, on peut écrire

$$\forall x \in \mathrm{Supp}(a), \quad e^{it\varphi(x)} = \frac{1}{it\varphi'(x)} \left(e^{it\varphi(x)}\right)'.$$

D'où on obtient, en faisant une intégration par parties :

$$\begin{aligned} F(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\varphi(x)} a(x) \mathrm{d}x &= \frac{1}{it} \int_{\mathbb{R}} \left(e^{it\varphi(x)}\right)' \frac{a(x)}{\varphi'(x)} \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{it} \frac{a(x)}{\varphi'(x)} e^{it\varphi(x)}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{it} \int_{\mathbb{R}} e^{it\varphi(x)} \left(\frac{a(x)}{\varphi'(x)}\right)' \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}} e^{it\varphi(x)} a_1(x) \mathrm{d}x \ , \end{aligned}$$

où $a_1 = i\left(\dfrac{a}{\varphi'}\right) \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{R})$.
Montrons alors par récurrence sur $N \in \mathbb{N}$ la propriété suivante :

$$(\mathcal{P}_N) \ : \text{"}\forall t > 0, \ F(t) = \frac{1}{t^N} \int_{\mathbb{R}} e^{it\varphi(x)} a_N(x) \mathrm{d}x \ , a_N \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{R})\text{"}.$$

Initialisation : On a déjà montré $(\mathcal{P}_0)$ et $(\mathcal{P}_1)$.
Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_N)$ soit vraie pour un certain rang N et montrons $(\mathcal{P}_{N+1})$

$$\begin{aligned} \forall t > 0, \quad F(t) &= \frac{1}{t^N} \int_{\mathbb{R}} e^{it\varphi(x)} a_N(x) \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{it^{N+1}} \int_{\mathbb{R}} \left(e^{it\varphi(x)}\right)' \frac{a_N(x)}{\varphi'(x)} \mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{it^{N+1}} \int_{\mathbb{R}} e^{it\varphi(x)} \left(\frac{a_N(x)}{\varphi'(x)}\right)' \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

On pose alors $a_{N+1} = i\left(\frac{a_N}{\varphi'}\right)$ pour obtenir $(\mathcal{P}_{N+1})$.

□

2) Cas où φ' peut s'annuler (Phase "stationnaire")
On étudiera ici la version la plus simple : le cas où les points critiques sont non dégénérés *i.e.* si x est un point critique alors $\varphi'(x) = 0$ et $\varphi''(x) \neq 0$. Ces points sont isolés donc il suffit d'étudier d'abord le cas où il existe un seul de ces points [1]. On supposera donc dans la suite

$$\text{Sur le support de } a, \text{ il existe un unique point } x_0 \text{ tel que } \varphi'(x_0) = 0, \text{ et on a } \varphi''(x_0) \neq 0. \tag{H2}$$

Théorème 4.2.2. *Sous les hypothèses* (H1) *et* (H2)*, il existe une suite* $(A_N) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *telle que pour tout* $N \in \mathbb{N}$ *et pour tout* $t > 0$ *on ait :*

$$F(t) = e^{it\varphi(x_0)} \sum_{n=0}^{N} A_n t^{-n-1/2} + R_N(t)\ ,$$

avec, pour tout $t > 0$*,*

$$A_0 = \frac{\sqrt{2\pi} e^{i\varepsilon\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{|\varphi''(x_0)|}} a(x_0) \quad \text{et} \quad |R_N(t)| \leqslant C_N t^{-N-3/2}.$$

En particulier,

$$F(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{A_0}{\sqrt{t}} e^{it\varphi(x_0)} \quad \text{si } a(x_0) \neq 0.$$

On énonce plusieurs résultats qui seront utiles dans la preuve de ce théorème.
Rappels sur les fonctions de Schwartz :
On rappelle la définition de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(\mathbb{R}) &= \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \ :\ \forall p, q \in \mathbb{N}, \exists C_{p,q} > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x^p f^{(q)}(x)| \leqslant C_{p,q}\} \\ &= \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \ :\ \forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)} \text{ est à décroissance rapide à l'infini}\}.\end{aligned}$$

On a alors facilement $C^\infty_c(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Lemme 4.2.3. *Si* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$*, alors pour tout* $k \in \mathbb{N}, f^{(k)}$ *et* $x^k f$ *sont dans* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$*.*

Preuve. On utilise la formule de Leibniz. □

Lemme 4.2.4. *Si* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *alors* $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$*.*

Preuve. On a $\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(x) \mathrm{d}x$. Montrons que $\hat{f}$ est C^∞.
Soit $k \in \mathbb{N}$, on a alors en posant $g(t, x) = e^{-itx} f(x)$ pour tous $t, x \in \mathbb{R}$:
- g est k fois dérivable par rapport à t, de dérivée partielle d'ordre k :

$$\forall t, x \in \mathbb{R}, \quad \left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k g\right](t, x) = (-ix)^k e^{-itx} f(x).$$

1. Dans le cas où a a plusieurs points critiques, supposés non dégénérés, on se ramène au cas d'un seul tel point en utilisant une partition de l'unité.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left|\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k g\right](t,x)\right| = |x|^k |f(x)| \leqslant \frac{C}{1+|x|^2}$ car $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. La fonction de x obtenue est alors indépendante de t et intégrable sur $\mathbb{R}$.
Ainsi par les théorèmes de dérivation et de continuité sous l'intégrale, $\hat{f} \in C^k$, cela pour tout $k \in \mathbb{N}$ donc $\hat{f} \in C^\infty$ et

$$\forall q \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}^{(q)}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx}(-ix)^q f(x)\mathrm{d}x. \tag{4.1}$$

Montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ qu'il existe $g_{p,q} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad t^p \hat{f}^{(q)}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx}(-ix)^q g_{p,q}(x)\mathrm{d}x. \tag{4.2}$$

La formule (4.2) est vraie pour $p = 0$ par (4.1) car par le Lemme 6.4 $x^q f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Supposons-la vraie à l'ordre p et faisons une intégration par parties dans le second membre de (4.2), on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad t^p \hat{f}^{(q)}(t) = -\frac{1}{it}\left[e^{-itx} g_{p,q}(x)\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{it}\int_{\mathbb{R}} e^{-itx} g'_{p,q}(x)\mathrm{d}x.$$

Comme $g_{p,q} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, elle est nulle en $\pm\infty$. En posant $g_{p+1,q} = \frac{1}{i} g'_{p,q} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad t^{p+1} \hat{f}^{(q)}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx}(-ix)^q g_{p+1,q}(x)\mathrm{d}x\ ,$$

ce qui prouve (4.2) à l'ordre $p+1$. On en déduit alors

$$|t^p \hat{f}^{(q)}(t)| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |g_{p,q}(x)|\mathrm{d}x = C_{p,q} < +\infty.$$

Ceci montre que $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. □

Preuve du Théorème 4.2.2. On commence par montrer le théorème dans le cas le plus simple satisfaisant (H2) : $x_0 = 0$ et $\varphi(x) = x^2$ (le cas général en découlera).
Soit alors

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \lambda & \longmapsto & \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x^2}\overline{b(x)}\mathrm{d}x \end{array} \quad \text{où } b \in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

On veut écrire une formule de Parseval pour cette intégrale du type :

$$\int f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\mathrm{d}\xi \quad \text{pour } f \text{ et } g \text{ dans } L^2(\mathbb{R}).$$

Ainsi cette formule est bien définie pour des fonctions dans $L^2(\mathbb{R})$, or $x \longmapsto e^{i\lambda x^2} \notin L^2(\mathbb{R})$.
Pour contourner ce problème, on pose pour $\varepsilon > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$G_\varepsilon(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon x^2 + i\lambda x^2}\overline{b(x)}\mathrm{d}x.$$

On a alors, en posant $f(\varepsilon, \lambda, x) = e^{-\varepsilon x^2 + i\lambda x^2}\overline{b(x)}$:
- Pour $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ et $x \in \mathbb{R}$ fixés, $f(\varepsilon,\lambda,x) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} e^{i\lambda x^2}\overline{b(x)}$.
- $|f(\varepsilon,\lambda,x)| = e^{-\varepsilon x^2}|\overline{b(x)}| \leqslant |\overline{b(x)}|$ qui est indépendante de ε et intégrable sur $\mathbb{R}$ car $b \in L^1(\mathbb{R})$.
On fixe $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors par convergence dominée :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} G_\varepsilon(\lambda) = G(\lambda).$$

On peut alors maintenant appliquer la formule de Parseval à G_ε avec $f(x) = e^{-\varepsilon x^2 + i\lambda x^2}$ et $g = b$, donc avec f et g qui sont bien dans $L^2(\mathbb{R})$.
On peut vérifier facilement que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}\left(e^{-\varepsilon \cdot^2 + i\lambda \cdot^2}\right)(\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\varepsilon - i\lambda}} \exp\left(- \frac{\xi^2}{4(\varepsilon - i\lambda)}\right).$$

On a alors par le théorème de Parseval :

$$G_\varepsilon(\lambda) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\varepsilon - i\lambda}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(- \frac{\xi^2}{4(\varepsilon - i\lambda)}\right) \overline{\hat{b}(\xi)} \mathrm{d}\xi.$$

En posant $h(\varepsilon, \lambda, \xi) = \exp\left(- \frac{\xi^2}{4(\varepsilon - i\lambda)}\right)\overline{\hat{b}(\xi)}$, on a :

- Pour $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $\xi \in \mathbb{R}$ fixés, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} h(\varepsilon, \lambda, \xi) = \exp\left(- i\frac{\xi^2}{4\lambda}\right)\overline{\hat{b}(\xi)}$.
- $|h(\varepsilon, \lambda, \xi)| = \exp\left(- \frac{\varepsilon \xi^2}{4(\varepsilon^2 + \lambda^2)}\right)|\hat{b}(\xi)| \leqslant |\hat{b}(\xi)|$ qui est indépendante de ε et $\hat{b} \in L^1(\mathbb{R})$ car $b \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

Ainsi par le théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(- \frac{\xi^2}{4(\varepsilon - i\lambda)}\right)\overline{\hat{b}(\xi)} \mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}} \exp\left(- i\frac{\xi^2}{4\lambda}\right)\overline{\hat{b}(\xi)} \mathrm{d}\xi.$$

De plus, en écrivant $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$, on a :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sqrt{\varepsilon - i\lambda} = \begin{cases} e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{|\lambda|} & \text{si } \lambda < 0, \\ e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\lambda} & \text{si } \lambda \geqslant 0. \end{cases}$$

Donc finalement on obtient en passant à la limite dans G_ε :

$$G(\lambda) = \frac{1}{2\sqrt{\pi|\lambda|}} e^{\rho i \frac{\pi}{4}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(- i\frac{\xi^2}{4\lambda}\right)\overline{\hat{b}(\xi)} \mathrm{d}\xi , \quad \text{avec } \rho = \text{signe de } \lambda.$$

En utilisant la formule de Taylor avec reste intégrale, on peut montrer l'égalité suivante :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad e^{iy} = \sum_{n=0}^{N} \frac{(iy)^n}{n!} + A_N(y), \quad \text{avec} \quad |A_N(y)| \leqslant \frac{1}{(N+1)!}|y|^{N+1}. \tag{4.3}$$

Donc on a

$$G(\lambda) = \frac{1}{2\sqrt{\pi|\lambda|}} e^{\rho i \frac{\pi}{4}} \sum_{n=0}^{N} \frac{(-i)^n}{4^n \lambda^n n!} \int_{\mathbb{R}} x^{2n} \overline{\hat{b}(x)} \mathrm{d}x + R_N(\lambda), \tag{4.4}$$

où

$$R_N(\lambda) = \frac{1}{2\sqrt{\pi|\lambda|}} e^{\rho i \frac{\pi}{4}} \int_{\mathbb{R}} A_N\left(- \frac{x^2}{4\lambda}\right)\overline{\hat{b}(x)} \mathrm{d}x. \tag{4.5}$$

Comme $b \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ alors $b \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et par le Lemme 4.2.4, $\hat{b} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ donc la formule d'inversion de Fourier est valable et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \overline{b(x)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \overline{\hat{b}(\xi)} \mathrm{d}\xi.$$

Ainsi, en posant $f(x,\xi) = e^{-ix\xi}\overline{\hat{b}(\xi)}$ on a :
- Pour $\xi \in \mathbb{R}$ fixé, $x \longmapsto f(x,\xi)$ est dérivable de dérivée $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\xi) = -i\xi e^{-ix\xi}\overline{\hat{b}(\xi)}$.
- $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\xi)\right| = |\xi\overline{\hat{b}(\xi)}|$ qui est indépendante de x et intégrable sur $\mathbb{R}$ par le Lemme 4.2.3.
Ainsi par le théorème de dérivation sous l'intégrale qu'on applique plusieurs fois, on obtient que $\overline{b} \in C^\infty$ et

$$\overline{b}^{(2n)}(0) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} (-i\xi)^{2n}\overline{\hat{b}(\xi)}\mathrm{d}\xi. \tag{4.6}$$

On en déduit alors de (4.3), (4.4), (4.5) et (4.6) (en utilisant que $(-1)^n = (-i)^{2n}$) que :

$$G(\lambda) = \pi^{1/2}e^{\rho i\frac{\pi}{4}}\sum_{n=0}^{N}\frac{i^n}{4^n n!}\lambda^{-n-1/2}\overline{b}^{(2n)}(0) + R_N(\lambda) \quad \text{où } \rho = \text{signe de } \lambda.$$

Avec

$$\begin{aligned}
|R_N(\lambda)| &= \Big|\frac{1}{2\pi\sqrt{|\lambda|}}e^{\rho i\frac{\pi}{4}}\int_{\mathbb{R}} A_N\big(-\frac{\xi^2}{4\lambda}\big)\overline{\hat{b}(\xi)}\mathrm{d}\xi\Big| \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi\sqrt{|\lambda|}}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{(N+1)!}\frac{|\xi|^{2N+2}}{(4|\lambda|)^{N+1}}\overline{\hat{b}(\xi)}\mathrm{d}\xi \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi(N+1)!4^{N+1}}|\lambda|^{-N-3/2}\int_{\mathbb{R}}|\xi|^{2N+2}\overline{\hat{b}(\xi)}\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}$$

Cela prouve le théorème dans le cas où $\varphi(x) = \pm x^2$.

Cas général : on pose $F(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{it\varphi(x)}a(x)\mathrm{d}x$.
De la même manière que dans la méthode de Laplace, on peut écrire en utilisant la formule de Taylor avec reste intégrale :

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \frac{1}{2}(x-x_0)^2\psi(x) \quad \text{où } \psi \in C^\infty \text{ et } \psi(x_0) = \varphi(x_0).$$

Posons alors le changement de variable $y = x - x_0$ dans l'intégrale définissant F. On obtient

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F(t) = e^{it\varphi(x_0)}\int_{\mathbb{R}} e^{ity^2\theta(y)}C(y)\mathrm{d}y\,, \quad \text{où} \quad \begin{cases} \theta(y) = \frac{1}{2}\psi(y+x_0), \\ C(y) = a(y+x_0). \end{cases} \tag{4.7}$$

Comme $\theta(0) = \frac{1}{2}\varphi(x_0) \neq 0$, l'idée est de faire le changement de variable $z = y\sqrt{\pm\theta(y)}$ dans (4.7), à condition que ce changement de variable soit un C^1-difféomorphisme.
On affirme alors qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout y dans $]-\delta,\delta[$, on ait :

1. $\theta(y) \neq 0$.
2. La fonction $h : y \longmapsto y\sqrt{\varepsilon\theta(y)}$, où ε =signe de $\varphi''(x_0)$, a une dérivée non nulle en tout point.

En effet comme $\theta(0) \neq 0$, il existe $\delta_1 > 0$ tel que $\theta(y) \neq 0$ pour tout $|y| < \delta_1$. De plus si $|y| < \delta_1$, $h(y) = y\sqrt{\varepsilon\theta(y)}$ est bien définie, C^1 et

$$\forall y \in]-\delta_1,\delta_1[, \quad h'(y) = \sqrt{\varepsilon\theta(y)} + y\frac{\varepsilon\theta'(y)}{2\sqrt{\varepsilon\theta(y)}} \quad \text{donc} \quad h'(0) = \sqrt{|\varphi''(x_0)|} \neq 0.$$

Alors il existe $\delta \leqslant \delta_1$ tel que $h'(y) \neq 0$ pour tout $y \in]-\delta, \delta[$ et alors l'application $h \ :]-\delta, \delta[\longrightarrow h(]-\delta, \delta[)$ est un C^1-difféomorphisme. Notons g sa fonction réciproque.
Soit $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tel que

$$\begin{cases} \chi(y) = 1 & \text{si } |y| \leqslant \delta/2, \\ \chi(y) = 0 & \text{si } |y| \geqslant 3\delta/4. \end{cases}$$

Alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F(t) = e^{it\varphi(x_0)} \left[\int_{\mathbb{R}} \chi(y) e^{ity^2\theta(y)} C(y) \mathrm{d}y + \int_{\mathbb{R}} (1-\chi(y)) e^{ity^2\theta(y)} C(y) \mathrm{d}y \right] =: F_1(t) + F_2(t).$$

Or, $(1-\chi(y))$ est nulle pour $|y| \leqslant \frac{\delta}{2}$. Donc sur le support de $(1-\chi(y))C(y)$, la dérivée de $y^2\theta(y)$ ne s'annule pas, on est alors ramené au premier cas (Cas où φ' ne s'annule pas). Donc par le Théorème 4.2.1,

$$\forall M \in \mathbb{N}, \exists C_M > 0, \forall t > 0, \quad |F_2(t)| \leqslant C_M t^{-M}. \tag{4.8}$$

Dans F_1, on fait le changement de variable $z = h(y) = y\sqrt{\varepsilon\theta(y)}$, qui est possible car sur le support de χ on a $|y| \leqslant \delta$. Il vient

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_1(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\varepsilon z^2} C(g(z)) g'(z) \chi(g(z)) \mathrm{d}z.$$

La fonction $b = (\chi \circ g)(C \circ g)g'$ appartient à $C_c^\infty(\mathbb{R})$, on peut alors lui appliquer le résultat trouvé pour le cas où $\varphi(x) = \pm x^2$ avec $\lambda = \varepsilon t$, d'où

$$\forall t > 0, \quad F_1(t) = \sqrt{\pi} e^{i\varepsilon\frac{\pi}{4}} \sum_{n=0}^{N} B_n t^{-n-1/2} + R_N(t), \quad \text{où } R_N(t) = \mathcal{O}(t^{-N-3/2}).$$

De plus en prenant $M = N + 3/2$ dans (4.8), on a aussi $F_2(t) = \mathcal{O}(t^{-N-3/2})$. Donc on peut écrire

$$F(t) = \sum_{n=0}^{N} \tilde{B}_n t^{-n-1/2} + \tilde{R}_N(t) \quad \text{où } \tilde{R}_N(t) = \mathcal{O}(t^{-N-3/2}).$$

Calculons $\tilde{B}_0$: $\tilde{B}_0 = \sqrt{\pi} e^{i\varepsilon\frac{\pi}{4}} b(0) = \sqrt{\pi} e^{i\varepsilon\frac{\pi}{4}} \chi(g(0)) C(g(0)) g'(0)$. Or $g(0) = 0$, $\chi(0) = 1$, $C(0) = a(x_0)$ et $g'(0) = \frac{1}{h'(g(0))} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{|\varphi''(x_0)|}}$. D'où

$$B_0 = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{|\varphi''(x_0)|}} e^{i\varepsilon\frac{\pi}{4}}.$$

Ce qui achève la preuve.

□

4.2.2 Application : comportement en temps grand des solutions de l'équation de Klein-Gordon

On va étudier dans cette partie l'équation de Klein-Gordon donnée par

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u + mu = 0 \ ,$$

qui décrit (selon la mécanique quantique) l'évolution en temps d'une particule relativiste de masse $m > 0$.

On considère le problème de Cauchy suivant, avec $u_0, u_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u + mu = 0\ ,\ t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R} \\ u|_{t=0} = u_0 \\ \partial_t u|_{t=0} = u_1 \end{cases} \tag{4.9}$$

Posons l'ensemble suivant, posé p147 de [4], qui décrit les fonctions $u(t,\cdot)$ qui sont uniformément dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, ainsi que $\partial_t u(t,\cdot)$ et $\partial_t^2 u(t,\cdot)$:

$$E_2 = \{v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \mid \forall T > 0, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}, \exists C_{\alpha,\beta} > 0, \forall \ell \in \{0,1,2\}, \sup_{t\in[-T,T]} \|x \mapsto x^\alpha \partial_x^\beta \partial_t^\ell v(t,\cdot)\|_{\mathcal{L}^\infty} \leqslant C_{\alpha,\beta}\}.$$

On va tout d'abord montre la propriété suivante :

Proposition 4.2.5. *Soient u_0, $u_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors il existe une unique solution $u \in E_2$ de* (4.9).

Pour démontrer cette propriété, nous utiliserons le lemme suivant

Lemme 4.2.6. *Soit $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Alors $u \in E_2$ si et seulement si $\hat{u} \in E_2$.*

Démonstration. ($\Rightarrow$) Supposons que $u \in E_2$. Par définition de la transformée de Fourier on a pour tout $t \geqslant 0$ et $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\hat{u}(t,\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} u(t,x)\mathrm{d}x.$$

Ainsi en posant $a > 0$, on a :
- Pour $t, x, \xi \in \mathbb{R}$, $\partial_t(e^{-ix\xi}u)(t,x) = e^{-ix\xi}\partial_t u(t,x)$.
- Et pour $t \geqslant 0$ fixé, comme $u \in E_2$, alors $u(t,\cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ on a

$$\forall x, \xi \in \mathbb{R}, \quad |e^{-ix\xi}\partial_t u(t,x)| \leqslant \begin{cases} C_{0,0} & \text{si } x \in [-a,a]\ , \\ \dfrac{C_{2,0}}{x^2} & \text{si } |x| > a\ , \end{cases}$$

où $C_{0,0}$ et $C_{2,0}$ sont des constantes venant de la majoration dans E_2.
Ainsi les fonctions de droite sont intégrables et indépendantes de $t \in [-T,T]$ donc par le théorème de dérivation sous l'intégrale, on a :

$$\forall t, \xi \in \mathbb{R}, \quad \partial_t \hat{u}(t,\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \partial_t u(t,x)\mathrm{d}x = \widehat{\partial_t u}(t,\xi).$$

En appliquant encore le théorème de dérivation sous l'intégrale, et en utilisant que $\partial_t u(t,\cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ car $u \in E_2$, on obtient

$$\forall t, \xi \in \mathbb{R}, \quad \partial_t^2 \hat{u}(t,\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \partial_t^2 u(t,x)\mathrm{d}x = \widehat{\partial_t^2 u}(t,\xi).$$

Or $\hat{u}(t,\cdot)$, $\widehat{\partial_t u}(t,\cdot)$ et $\widehat{\partial_t^2 u}(t,\cdot)$ sont dans la classe de Schwartz avec des majorations uniformes en $t \in [-T,T]$ car $u \in E_2$ et donc cela montre que $\hat{u} \in E_2$ car pour $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ et $\ell \in \{0,1,2\}$, on a

$$\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \partial_t^\ell \hat{u} = \xi^\alpha \partial_\xi^\beta \widehat{\partial_t^\ell u}.$$

($\Leftarrow$) Supposons ici que $\hat{u} \in E_2$. Par transformée de Fourier inverse, on a la formule suivante pour tout $t \geqslant 0$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \hat{u}(t,\xi) \mathrm{d}\xi.$$

En utilisant la même méthode que pour l'implication directe, on trouve aussi grâce au théorème de dérivation sous l'intégrale que $\partial_t \hat{u} = \widehat{\partial_t u}$ et $\partial_t^2 \hat{u} = \widehat{\partial_t^2 u}$. Or comme $\hat{u} \in E_2$, alors par définition de la classe de Schwartz, $\partial_t \hat{u}(t,\cdot)$ et $\partial_t^2 \hat{u}(t,\cdot)$ sont dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et alors on a $\widehat{\partial_t u}(t,\cdot)$ et $\widehat{\partial_t^2 u}(t,\cdot)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Ainsi comme la transformée de Fourier est une bijection sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a bien $u(t,\cdot)$, $\partial_t u(t,\cdot)$ et $\partial_t^2 u(t,\cdot)$ uniformément dans la classe de Schwartz, donc cela veut exactement dire que u est dans E_2.

□

Montrons maintenant la Proposition 4.2.5.

Démonstration. Procédons par Analyse-Synthèse :

<u>Analyse</u> : Supposons que $u \in E_2$ est solution du problème (4.9). Alors, on a vu dans la preuve précédente qu'on a en particulier $\widehat{\partial_t u} = \partial_t \hat{u}$ car $u \in E_2$. Donc en passant à la transformée de Fourier dans l'équation (4.9) on obtient :

$$\forall (t,\xi) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_t^2 \hat{u}(t,\xi) + |\xi|^2 \hat{u}(t,\xi) + m\hat{u}(t,\xi) = 0 \quad i.e \quad \partial_t^2 \hat{u}(t,\xi) + (\xi^2 + m)\hat{u}(t,\xi) = 0. \tag{E}$$

On obtient alors, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ fixé, une équation différentielle d'ordre 2 pour $\hat{u}$ en la variable t dont les racines de l'équation caractéristique sont

$$r_{\pm} = \pm i\omega(\xi), \quad \text{où } \omega(\xi) = \sqrt{\xi^2 + m}.$$

Ainsi la solution de cette équation différentielle est de la forme

$$\hat{u}(t,\xi) = A(\xi)\cos(t\omega(\xi)) + B(\xi)\sin(t\omega(\xi)) \quad \text{où } A(\xi) \text{ et } B(\xi) \text{ sont des constantes.}$$

Or $\hat{u}(0,\xi) = \hat{u}_0(\xi)$ d'où $A(\xi) = \hat{u}_0(\xi)$ et de plus en dérivant $\hat{u}$ par rapport à t on obtient

$$\partial_t \hat{u}(t,\xi) = -\hat{u}_0(\xi)\omega(\xi)\sin(t\omega(\xi)) + B(\xi)\omega(\xi)\cos(t\omega(\xi)).$$

Donc, comme $\partial_t \hat{u}(0,\xi) = \hat{u}_1(\xi)$ [2], on en déduit que $B(\xi) = \dfrac{\hat{u}_1(\xi)}{\omega(\xi)}$.
Ainsi on a finalement , pour tous $t \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}$:

$$\hat{u}(t,\xi) = \hat{u}_0(\xi)\cos(t\omega(\xi)) + \frac{\hat{u}_1(\xi)}{\omega(\xi)}\sin(t\omega(\xi)).$$

Appliquons maintenant la formule d'inversion de Fourier afin de trouver u,

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2, \quad u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \hat{u}(t,\xi) \mathrm{d}\xi$$

d'où l'unicité de la solution u.

2. Au passage, on a montré que pour $u \in E_2$, on a u solution de (4.9) si et seulement si $\hat{u}$ satisfait (E) avec $\hat{u}(0,\cdot) = \hat{u}_0$ et $\partial_t \hat{u}(0,\cdot) = \hat{u}_1$

<u>Synthèse</u> : On pose pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\hat{u}(t,\xi) = \hat{u}_0(\xi)\cos(t\omega(\xi)) + \frac{\hat{u}_1(\xi)}{\omega(\xi)}\sin(t\omega(\xi)).$$

Montrons d'abord que $\hat{u} \in E_2$; donc par le Lemme 4.2.6 on aura que $u \in E_2$. Alors, comme $\hat{u}$ est par construction solution de (E) avec $\hat{u}(0,\cdot) = \hat{u}_0$ et $\partial_t\hat{u}(0,\cdot) = \hat{u}_1$, on aura en "remontant les calculs" de l'étape "Analyse" que u est solution de (4.9).

Montrons maintenant que $\hat{u} \in E_2$. En utilisant la formule de Leibniz, on a pour tous $t,\xi \in \mathbb{R}$ et $\alpha,\beta \in \mathbb{N}$:

$$\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \hat{u}(t,\xi) = \xi^\alpha \sum_{\alpha \leqslant \beta} \binom{\beta}{\alpha} \left[\left(\partial_\xi^{\beta-\alpha}\hat{u}_0(\xi)\right) \partial_\xi^\alpha(\cos(t\omega(\xi))) + \left(\partial_\xi^{\beta-\alpha}\hat{u}_1(\xi)\right) \partial_\xi^\beta \left(\frac{\sin(t\omega(\xi))}{\omega(\xi)}\right)\right] \tag{4.10}$$

Comme $\hat{u}_0$ et $\hat{u}_1$ sont dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $\xi \mapsto \xi^\alpha\partial_\xi^{\beta-\alpha}\hat{u}_0(\xi)$ et $\xi \mapsto \xi^\alpha\partial_\xi^{\beta-\alpha}\hat{u}_1(\xi)$ sont bornées. Ainsi il reste à montrer que $\xi \mapsto \partial_\xi^\alpha(\cos(t\omega(\xi)))$ et $\xi \mapsto \partial_\xi^\beta\left(\frac{\sin(t\omega(\xi))}{\omega(\xi)}\right)$ sont également bornées.

Or $\partial_\xi^\alpha(\cos(t\omega(\xi)))$ est une somme de produits de puissance de t, de dérivées k-ièmes de ω et de cosinus ou sinus. On peut alors majorer les cosinus et les sinus par 1, et les $|t|$ car dans E_2, t est dans un compact $[-T,T]$ où $T > 0$. Il reste alors à borner les dérivées de ω.
Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\omega^{(k)}(\xi)$ s'écrit, à constantes multiplicatives près, comme une somme de termes de la forme

$$\frac{\xi^j}{(m+\xi^2)^{l-\frac{1}{2}}} \quad \text{où } j,l \in \mathbb{N}, j,l \leqslant k \text{ et } j \leqslant l.$$

Tout d'abord, pour $k = 1$, on a bien

$$\omega'(\xi) = \frac{\xi}{\sqrt{m+\xi^2}} \quad \text{où } 1 \leqslant 1.$$

Supposons que la propriété de récurrence est vraie pour un certain rang $k > 1$, et montrons-la pour le rang $k+1$, on a :

$$\omega^{(k+1)}(\xi) = \partial_\xi\omega^{(k)}(\xi) = \frac{j\xi^{j-1}}{(w+\xi^2)^{l-\frac{1}{2}}} - 2\left(l - \frac{1}{2}\right)\frac{\xi^{j+1}}{(m+\xi^2)^{(l+1)-\frac{1}{2}}}$$

où, comme par hypothèse de récurrence, $j,l \leqslant k$ et $j \leqslant l$, on a bien

$$j-1, l, j+1, l+1 \leqslant k+1 \quad \text{et} \quad j-1 \leqslant l,\ j+1 \leqslant l+1.$$

Ainsi la récurrence est terminée.

On a alors d'abord

$$\left|\omega'(\xi)\right| = \left|\frac{\xi}{\sqrt{m+\xi^2}}\right| \leqslant 1$$

De plus pour $k > 1$, les termes de $\omega^{(k)}$ trouvés par récurrence sont des fonctions continues de ξ donc elles sont bornées sur tout compact. Regardons leur comportement en $\pm\infty$. Soit $j,l \in \mathbb{N}$ inférieurs ou égaux à k et tels que $j \leqslant l$, alors on a

$$\frac{\xi^j}{(m+\xi^2)^{l-\frac{1}{2}}} \underset{\xi\to\pm\infty}{\sim} \xi^{j-2l+1}.$$

Or $j - 2l + 1 \leqslant -l + 1 < 0$ donc la fonction de droite tend vers 0 en $\pm\infty$.
Donc finalement, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\omega^{(k)}$ est bornée.

On peut faire le même type de raisonnement pour le terme en sinus de (4.10) et montrer que $\xi \mapsto \partial_\xi^\beta \left(\dfrac{\sin(t\omega(\xi))}{\omega(\xi)} \right)$ est bornée.

Ainsi on a bien que $\hat{u} \in E_2$ et donc par le Lemme 4.2.6, $u \in E_2$.

$\square$

Déterminons alors le comportement de $u(t,x)$ lorsque $x \in \mathbb{R}$ est fixé et t tend vers $+\infty$ grâce à la méthode de la phase stationnaire.

Appliquons maintenant la formule d'inversion de Fourier afin de trouver u. Soit $t, x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
u(t,x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \hat{u}(t,\xi) \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \left[\hat{u}_0(\xi) \cos(t\omega(\xi)) + \frac{\hat{u}_1(\xi)}{\omega(\xi)} \sin(t\omega(\xi)) \right] \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \hat{u}_0(\xi) \frac{1}{2} \left(e^{it\omega(\xi)} + e^{-it\omega(\xi)} \right) \mathrm{d}\xi + \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \frac{\hat{u}_1(\xi)}{\omega(\xi)} \frac{1}{2i} \left(e^{it\omega(\xi)} - e^{-it\omega(\xi)} \right) \mathrm{d}\xi \right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left[\int_{\mathbb{R}} \hat{u}_0(\xi) e^{ix\xi} e^{it\omega(\xi)} \mathrm{d}\xi + \int_{\mathbb{R}} \hat{u}_0(\xi) e^{ix\xi} e^{-it\omega(\xi)} \mathrm{d}\xi \right] \\
&+ \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}} \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{u}_1(\xi)}{\omega(\xi)} e^{ix\xi} e^{it\omega(\xi)} \mathrm{d}\xi - \int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{u}_1(\xi)}{\omega(\xi)} e^{ix\xi} e^{-it\omega(\xi)} \mathrm{d}\xi \right].
\end{aligned}$$

Étudions et trouvons une asymptotique de ces quatre intégrales en appliquant pour chacune d'elle la méthode de la phase stationnaire.

On pourra supposer que $\hat{u}_0$ et $\hat{u}_1$ sont C_c^∞ quitte à multiplier par une fonction $\theta \in C_c^\infty$ égale à 1 sur un voisinage de 0.

Première intégrale :
Posons, en reprenant les notations de la sous-section 4.2, posons

$$\varphi(\xi) = \omega(\xi) \quad \text{et} \quad a(\xi) = \hat{u}_0(\xi) e^{ix\xi}.$$

On a alors

$$\varphi'(\xi) = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + m}} \quad \text{et} \quad \varphi''(\xi) = \frac{1}{\xi^2 + m} \left(\sqrt{\xi^2 + m} - \frac{\xi^2}{\sqrt{\xi^2 + m}} \right).$$

Ainsi on remarque que 0 est un point critique non dégénéré de φ, en effet

$$\varphi'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi = 0 \quad \text{et} \quad \varphi''(0) = \frac{1}{\sqrt{m}} > 0.$$

Par le théorème 4.2.2, il existe une suite $(A_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $N \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \geqslant 0$, on ait

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{u}_0(\xi) e^{ix\xi} e^{it\omega(\xi)} \mathrm{d}\xi = e^{it\sqrt{m}} \sum_{n=0}^{N} A_n t^{-n-1/2} + \mathcal{O}(t^{-N-3/2}) \tag{4.11}$$

avec
$$A_0 = \sqrt{2\pi} e^{i\frac{\pi}{4}} m^{1/4} \hat{u}_0(0).$$

Deuxième intégrale :
Posons maintenant
$$\varphi(\xi) = -\omega(\xi) \quad \text{et} \quad a(\xi) = \hat{u}_0(\xi) e^{ix\xi}.$$
Alors 0 est un point critique non dégénéré de φ avec $\varphi''(0) = -\frac{1}{\sqrt{m}} < 0$. Par le théorème 4.2.2, il existe une suite $(B_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $N \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \geqslant 0$, on ait
$$\int_{\mathbb{R}} \hat{u}_0(\xi) e^{ix\xi} e^{-it\omega(\xi)} \mathrm{d}\xi = e^{-it\sqrt{m}} \sum_{n=0}^{N} B_n t^{-n-1/2} + \mathcal{O}(t^{-N-3/2}) \tag{4.12}$$
avec
$$B_0 = \sqrt{2\pi} e^{-i\frac{\pi}{4}} m^{1/4} \hat{u}_0(0).$$

Troisième intégrale :
Posons ici
$$\varphi(\xi) = \omega(\xi) \quad \text{et} \quad a(\xi) = \frac{\hat{u}_1(\xi)}{\omega(\xi)} e^{ix\xi}.$$
On a encore que 0 est un point critique non dégénéré de φ avec $\varphi''(0) = \frac{1}{\sqrt{m}} > 0$. Par le théorème 4.2.2, il existe une suite $(C_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $N \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \geqslant 0$, on ait
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{u}_1(\xi)}{\omega(\xi)} e^{ix\xi} e^{it\omega(\xi)} \mathrm{d}\xi = e^{it\sqrt{m}} \sum_{n=0}^{N} C_n t^{-n-1/2} + \mathcal{O}(t^{-N-3/2}) \tag{4.13}$$
avec
$$C_0 = \sqrt{2\pi} e^{i\frac{\pi}{4}} m^{-1/4} \hat{u}_1(0).$$

Quatrième intégrale :
On pose enfin
$$\varphi(\xi) = -\omega(\xi) \quad \text{et} \quad a(\xi) = -\frac{\hat{u}_1(\xi)}{\omega(\xi)} e^{ix\xi}$$
On a toujours que 0 est un point critique non dégénéré de φ avec $\varphi''(0) = -\frac{1}{\sqrt{m}} < 0$. Ainsi par le théorème 4.2.2, il existe une suite $(D_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $N \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \geqslant 0$, on ait
$$\int_{\mathbb{R}} -\frac{\hat{u}_1(\xi)}{\omega(\xi)} e^{ix\xi} e^{-it\omega(\xi)} \mathrm{d}\xi = e^{-it\sqrt{m}} \sum_{n=0}^{N} D_n t^{-n-1/2} + \mathcal{O}(t^{-N-3/2}) \tag{4.14}$$
avec
$$D_0 = -\sqrt{2\pi} e^{-i\frac{\pi}{4}} m^{-1/4} \hat{u}_1(0).$$

Finalement en rassemblant les quatre intégrales on trouve
$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{N} K_n t^{-n-1/2} + \mathcal{O}(t^{-N-3/2}) \quad \text{où } K_n = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left[e^{it\sqrt{m}} A_n + e^{-it\sqrt{m}} B_n - i e^{it\sqrt{m}} C_n - i e^{-it\sqrt{m}} D_n \right].$$
Prenons $\hat{u}_0(0)$ et $\hat{u}_1(0)$ non tous deux nuls, montrons alors que K_0 est non nul, on a
$$K_0 = ((a_0 + b_0)\hat{u}_0(0) + (c_0 + d_0)\hat{u}_1(0)) \cos(t\sqrt{m}) + i((a_0 - b_0)\hat{u}_0(0) + (c_0 - d_0)\hat{u}_1(0)) \sin(t\sqrt{m})$$

où on pose

$$a_0 = \sqrt{2\pi}e^{i\frac{\pi}{4}}m^{1/4}, \quad b_0 = \sqrt{2\pi}e^{-i\frac{\pi}{4}}m^{1/4}, \quad c_0 = \sqrt{2\pi}e^{i\frac{\pi}{4}}m^{-1/4}, \quad d_0 = -\sqrt{2\pi}e^{-i\frac{\pi}{4}}m^{-1/4}.$$

On peut alors réécrire, en fixant $t \geqslant 0$,

$$K_0 = 2\sqrt{\pi}\left[m^{1/4}\hat{u}_0(0)(\cos(t\sqrt{m}) - \sin(t\sqrt{m})) + im^{-1/4}\hat{u}_1(\cos(t\sqrt{m}) + \sin(t\sqrt{m}))\right].$$

Ainsi on a l'équivalence :

$$K_0 = 0 \Leftrightarrow \left(\hat{u}_0(0) = 0 \text{ ou } \hat{u}_1(0) = 0 \text{ et } \tan(t\sqrt{m}) = 0\right).$$

Alors, si $\hat{u}_0(0) = 0$ ou $\hat{u}_1(0) = 0$, l'ensemble $T = \{t \geqslant 0, \tan(t\sqrt{m}) = 0\}$ est un ensemble dénombrable donc on pourra, pour écrire un équivalent en $+\infty$, prendre une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$ et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n \notin T$.

Pour conclure, en considérant $\hat{u}_0(0)$ et $\hat{u}_1(0)$ non tous les deux nuls, on a l'équivalent suivant, en considérant une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme ci-dessus

$$u(t_n, x) \underset{t_n\to+\infty}{\sim} \frac{K_0}{\sqrt{t_n}}$$

c'est-à-dire

$$u(t_n, x) \underset{t_n\to+\infty}{\sim} \frac{m^{1/4}\hat{u}_0(0)\cos\left(t_n\sqrt{m} + \frac{\pi}{4}\right) + m^{-1/4}\hat{u}_1(0)\sin\left(t_n\sqrt{m} + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{t_n}}.$$

Références

[1] H. Queffelec, C. Zuily, *Analyse pour l'agrégation*, 2013.

[2] F. Rouvière, *Produits infinis*, 1999, `https://math.unice.fr/~frou/suites/Produit-Infini.pdf`.

[3] Raimbault, *Transformée de Laplace des fonctions et des distributions*, 2008, `https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~pansu/web_ifips/Laplace_2008.pdf`.

[4] E.M. Stein, R. Shakarchi, *Fourier analysis, an introduction*, 2003.

[5] M. Audin, *Jacques Hadamard et le théorème des nombres premiers*, 2013, `https://images.math.cnrs.fr/Jacques-Hadamard-et-le-theoreme-des-nombres-premiers.html`.