

INSTITUT JOSEPH FOURIER
UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES

Travail d'Etudes et de Recherche :
Les homéomorphismes du cercle préservant
l'orientation.

Julie DEUDON
Encadrée par Christophe LEURIDAN

Année 2022

Table des matières

Introduction	2
1 Fondements	3
1.1 Notations	3
1.2 Homéomorphismes : passage au quotient et relèvement	5
2 Nombre de rotation	12
2.1 Résultats préliminaires sur les suites sous-additives et sur-additives	12
2.2 Définition	12
2.3 Premières propriétés	14
2.4 Nombre de rotation d'une composée	17
3 Continuité du nombre de rotation $\rho(T)$ par rapport à T	20
3.1 Résultats préliminaires	20
3.2 Théorème de continuité	21
4 Étude des orbites de T et classification de Poincaré	23
4.1 Homéomorphismes transitifs, orbites denses	23
4.2 Classification de Poincaré	24
5 Ensemble dérivé de T	28
6 Ouverture : brève étude du cas des homéomorphismes renversant l'orientation	32
Références	33

Introduction

Notons $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ le **tore** unidimensionnel, qui est le cercle avec lequel nous allons travailler. Le tore \mathbb{T} est homéomorphe au cercle unité de \mathbb{R}^2 . Tout homéomorphisme T de \mathbb{T} s'obtient comme passage au quotient d'un homéomorphisme f de \mathbb{R} , appelé **relèvement** de T , pour lequel la fonction $x \mapsto f(x+1) - f(x)$ est constante à ± 1 .

Dans ce TER, nous nous proposons d'étudier plus précisément les homéomorphismes du cercle dont la constante vaut $+1$, appelés **homéomorphismes préservant l'orientation**, dont nous noterons l'ensemble $\text{Hom}^+(\mathbb{T})$.

Dans une première partie, nous démontrerons tous les résultats préliminaires importants, notamment autour des relèvements des homéomorphismes de \mathbb{T} . Dans une deuxième partie, nous introduirons le **nombre de rotation**, qui est une notion fondamentale caractérisant les homéomorphismes de $\text{Hom}^+(\mathbb{T})$. Nous en donnerons quelques premières propriétés. La troisième partie aura pour but d'étudier la continuité du nombre de rotation. Ensuite, nous étudierons dans une quatrième partie les **orbites** des homéomorphismes de $\text{Hom}^+(\mathbb{T})$ et nous établirons la **classification de Poincaré**. Puis, nous travaillerons dans une cinquième partie sur **l'ensemble dérivé**, qui est une notion propre aux homéomorphismes de $\text{Hom}^+(\mathbb{T})$ dont le nombre de rotation est la classe d'un irrationnel. Enfin, nous envisagerons brièvement dans une sixième partie le cas des homéomorphismes **renversant l'orientation** (ceux dont la constante donnée par le relèvement vaut -1).

Les résultats majeurs énoncés dans ce mémoire, dont les preuves ont été retravaillées, sont issus de l'ouvrage de Cornfeld, Fomin et Sinai ([1]), ainsi que des travaux de Brin et Stuck ([2]).

1 Fondements

1.1 Notations

Introduisons pour commencer quelques notations qui nous serviront pour toute la suite de ce mémoire.

Notation 1.1. Notons le **tore** $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et la **projection canonique** $\pi : x \mapsto \bar{x}$ définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R}/\mathbb{Z} la projection reliée à la relation d'équivalence sur \mathbb{R} :

$$x \mathcal{R} y \iff x - y \in \mathbb{Z}.$$

On munit \mathbb{R}/\mathbb{Z} de la **topologie quotient**, i.e. la topologie la plus fine qui rend π continue.

Dans la propriété suivante, nous montrons que la topologie quotient sur \mathbb{R}/\mathbb{Z} est métrisable.

Définition et proposition 1.2. Distance sur \mathbb{R}/\mathbb{Z}

On pose sur \mathbb{R}/\mathbb{Z} l'application \bar{d} définie par :

$$\forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) = \inf\{|x' - y'| ; (x', y') \in \bar{x} \times \bar{y}\}.$$

Alors :

1. L'application \bar{d} ainsi définie est une **distance** sur \mathbb{R}/\mathbb{Z} .
2. $\forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) \leq 1/2$
3. L'application π est 1-lipschitzienne de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ dans $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \bar{d})$, donc **continue**.
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall r > 0, \pi(B(x, r)) = B_{\bar{d}}(\bar{x}, r)$
5. L'application π est **ouverte** de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ dans (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) .
6. La distance \bar{d} définit la **topologie quotient** sur \mathbb{R}/\mathbb{Z} .

Preuve :

1) Montrons dans un premier temps que pour $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, la borne inférieure définissant $\bar{d}(\bar{x}, \bar{y})$ est atteinte. Soient $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. On a :

$$\begin{aligned} \bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) &= \inf \{|(x + k_1) - (y + k_2)| ; (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2\} \\ &= \inf \{|x_0 - y_0 + k| ; k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

De plus, pour tout $k \in \mathbb{Z}, |x_0 - y_0 + k| \geq |k| - |x_0 - y_0|$.

Comme $\bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) \leq |x - y|$, on a donc :

$$\bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) = \min\{|x_0 - y_0 + k| ; k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } |k| \leq 2|x - y|\}.$$

C'est ainsi le minimum d'un ensemble fini et donc $\bar{d}(\bar{x}, \bar{y})$ est atteinte.

De plus, l'application \bar{d} vérifie l'axiome de séparation. Soient $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ telles que $\bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) = 0$. Comme la borne inférieure définissant $\bar{d}(\bar{x}, \bar{y})$ est atteinte, il existe $x_0 \in \bar{x}$ et $y_0 \in \bar{y}$ telles que $\bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) = |x_0 - y_0| = 0$. Ainsi, $x_0 = y_0$ et donc $\bar{x} = \bar{y}$.

La symétrie découle de la parité de la valeur absolue $|\cdot|$ sur \mathbb{R} .

Enfin, soient $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Comme la borne inférieure définissant \bar{d} est atteinte, il existe $x' \in \bar{x}, y' \in \bar{y}$ et $y'' \in \bar{y}, z' \in \bar{z}$ tels que $\bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) = |x' - y'|$ et $\bar{d}(\bar{y}, \bar{z}) = |y'' - z'|$. Quitte à soustraire à y'' une certaine constante entière k , et à retrancher cette même constante à z' , on peut supposer que $y' = y''$. Ainsi, en utilisant l'inégalité triangulaire sur $|\cdot|$:

$$\bar{d}(\bar{x}, \bar{z}) \leq |x' - z'| \leq |x' - y'| + |y' - z'| \leq \bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{d}(\bar{y}, \bar{z})$$

Ainsi, l'application \bar{d} définit bien une métrique sur \mathbb{R}/\mathbb{Z} .

2) Soient $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Notons x' et y' les représentants de \bar{x} et \bar{y} dans $[0, 1[$. Supposons, sans perte de généralité, que $x' \leq y'$. Alors, $y' - x'$ et $1 - y' + x'$ sont positifs de somme 1 donc l'un des deux au moins est inférieur (ou égal) à $1/2$. De plus, comme $\bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) \leq |y - x|$ et $\bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) \leq |x - y + 1|$ on obtient $\bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) \leq 1/2$.

3) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Par définition de \bar{d} , on a $\bar{d}(\pi(x), \pi(y)) = \bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) \leq |x - y|$. Donc l'application π est 1-lipschitzienne donc continue de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ dans $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \bar{d})$.

4) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $r > 0$. On a $\pi(B(x, r)) \subset B_{\bar{d}}(\bar{x}, r)$ car π est 1-lipschitzienne. Montrons l'autre inclusion. Soit $\bar{y} \in B_{\bar{d}}(\bar{x}, r)$. Alors :

$$r > \bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) = \min\{|x - y - k| ; k \in \mathbb{Z}\}$$

On peut alors choisir l'entier k_0 qui réalise ce minimum. Alors, $y + k_0 \in B(x, r)$ et donc $\pi(y + k_0) = \bar{y} \in B_{\bar{d}}(\bar{x}, r)$. D'où $B_{\bar{d}}(\bar{x}, r) \subset \pi(B(x, r))$ et l'égalité souhaitée.

5) Cette propriété découle du point 4.

6) Montrons que cette distance définit la topologie quotient sur \mathbb{R}/\mathbb{Z} , c'est-à-dire la topologie la plus fine qui rend la projection canonique π continue. Par le point **3**, π est continue pour la topologie associée à \bar{d} : cette topologie est donc moins fine que la topologie quotient.

Soit U un ouvert de \mathbb{R}/\mathbb{Z} pour la topologie quotient. Alors $\pi^{-1}(U)$ est un ouvert de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Comme π est surjective, $U = \pi(\pi^{-1}(U))$. Comme π est ouverte de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ dans $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \bar{d})$ par le point **5**, U est ouvert pour la topologie associée à la distance \bar{d} , qui est ainsi plus fine que la topologie quotient, ce qui permet de conclure. \square

Notation 1.3. Notons \mathcal{E}^+ (resp. \mathcal{E}^-) l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} **continues, strictement croissantes** (resp. **strictement décroissantes**) telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x + 1) = f(x) + 1$ (resp. $f(x + 1) = f(x) - 1$). Notons $\mathcal{E} = \mathcal{E}^+ \cup \mathcal{E}^-$.

On peut facilement démontrer que :

Proposition 1.4. Propriétés autour de \mathcal{E}^+

1. (\mathcal{E}, \circ) et (\mathcal{E}^+, \circ) sont des sous-groupes de $\text{Hom}(\mathbb{R})$.
2. Pour tout $f \in \mathcal{E}^+$, $f - \text{Id}_{\mathbb{R}}$ est continue et 1-périodique sur \mathbb{R} , donc bornée et uniformément continue.
3. Pour tout $f \in \mathcal{E}^+$, f est uniformément continue sur \mathbb{R} .
4. Par récurrence, on démontre facilement que pour tous $f \in \mathcal{E}^+$, $k \in \mathbb{Z}$, et $x \in \mathbb{R}$, $f(x + k) = f(x) + k$ et $f^k(x + 1) = f^k(x) + 1$ (f^k désigne la composée et non le produit).

Notation 1.5. Attention ! Précisons que pour tout $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, f^n désignera la composée $f \circ \dots \circ f$ (n fois) et non le produit de f avec elle-même n fois.

1.2 Homéomorphismes : passage au quotient et relèvement

Nous pouvons relier les homéomorphismes de \mathbb{T} aux homéomorphismes de \mathbb{R} . Le théorème suivant démontre qu'à tout élément de \mathcal{E} correspond un unique homéomorphisme de \mathbb{T} .

Théorème 1.6. Passage au quotient

Soit $f \in \mathcal{E}$, i.e. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone telle que $x \mapsto f(x+1) - f(x)$ est constante égale à ± 1 .

Alors, il existe une unique application $T_f \in \text{Hom}(\mathbb{T})$, telle que $T_f \circ \pi = \pi \circ f$.

Preuve :

On vérifie que $\pi \circ f$ est constante sur les classes d'équivalences de \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $\pi(x) = \pi(y)$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = y + k$. Ainsi, $f(x) = f(y + k) = f(y) \pm k$ et donc $\pi(f(x)) = \pi(f(y) \pm k) = \pi(f(y)) = \pi(f(x))$. Donc, par théorème d'isomorphisme, il existe une unique application T_f tel que $T_f \circ \pi = \pi \circ f$.

De plus, T_f est surjective car f et π le sont. Montrons que T_f est injectif. Soient $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tels que $T_f(\bar{x}) = T_f(\bar{y})$. Alors, comme $T_f \circ \pi = \pi \circ f$, $f(x) = f(y)$. Ainsi, il existe $k \in \mathbb{Z}$, tel que $f(x) = f(y) + k = f(y \pm k)$. Et comme f est bijective, on obtient que $x = y \pm k$, et donc $\bar{x} = \bar{y}$. Donc T_f est une application bijective de \mathbb{T} .

Il reste à montrer que T_f et T_f^{-1} sont continues, ce qui est immédiat car $T_f \circ \pi = \pi \circ f$ et $T_f^{-1} \circ \pi = \pi \circ f^{-1}$, et que f et f^{-1} sont continues, tout comme π pour la topologie quotient. \square

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\
 \pi \downarrow & \searrow \pi \circ f & \downarrow \pi \\
 \mathbb{R}/\mathbb{Z} & \xrightarrow{T_f} & \mathbb{R}/\mathbb{Z}
 \end{array}$$

On peut énoncer une réciproque du théorème précédent, et montrer qu'à tout homéomorphisme de \mathbb{T} on peut faire correspondre un homéomorphisme de \mathbb{R} , unique à une constante entière additive près. Commençons par un lemme qui servira à établir cette réciproque.

Lemme 1.7. Soit $y_0 \in \mathbb{R}$, et $\varepsilon \in]0, 1/2[$. La restriction de π à $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ est un homéomorphisme de $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ vers son image.

Preuve : $\pi|_{[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]}$ est injective donc définit une bijection de $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ vers son image. Cette bijection est continue car π l'est. Pour tout fermé F de $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$, $\pi(F)$ est compact, donc fermé dans $\pi([y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon])$. Donc la bijection réciproque est continue. \square

Théorème et définition 1.8. Relèvement des homéomorphismes

Tout homéomorphisme T de \mathbb{T} s'obtient par passage au quotient d'une application continue et strictement monotone $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que la fonction $x \mapsto f(x+1) - f(x)$ est constante égale à $+1$ ou -1 . On a alors $T \circ \pi = \pi \circ f$. Une telle application f s'appelle un **relèvement** de T . Elle est unique à une constante additive entière près. Lorsque la constante $f(x+1) - f(x)$ vaut $+1$, $f \in \mathcal{E}^+$ et $T \in \text{Hom}^+(\mathbb{T})$. On dit que T **préserve l'orientation**.

Lorsque la constante $f(x+1) - f(x)$ vaut -1 , $f \in \mathcal{E}^-$ et $T \in \text{Hom}^-(\mathbb{T})$. On dit que T **renverse l'orientation**.

Preuve :

Soit T un homéomorphisme de \mathbb{T} .

Unicité :

Montrons l'unicité du relèvement à addition d'un entier près. Soient f_1, f_2 telles que $T \circ \pi = \pi \circ f_1$ et $T \circ \pi = \pi \circ f_2$. On a alors $\overline{f_1} = \overline{f_2}$. La fonction $f_1 - f_2$ est continue et à valeurs dans \mathbb{Z} , donc d'après le théorème de valeurs intermédiaires, $f_1 - f_2$ est constante, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = f_2(x) + k$.

Existence :

Fixons $y_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\overline{y_0} = \pi(y_0) = T(\pi(0)) = T(\overline{0})$. Notons $\beta = \sup E$, où

$$E = \{b \in \mathbb{R}_+^* : \exists f \in \mathcal{C}([0, b], \mathbb{R}) : f(0) = y_0 \text{ et } T \circ \pi = \pi \circ f \text{ sur } [0, b]\}.$$

En fixant $\varepsilon \in]0, 1/2[$ et en appliquant le lemme 1.7 à l'intervalle $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ on obtient par composition une application f continue telle que $f(0) = y_0$ et $T \circ \pi = \pi \circ f$ sur $[0, \varepsilon[$. Ainsi, $E \neq \emptyset$ et donc $\beta \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$.

De plus, si $\beta_1, \beta_2 \in E$ et $f_1 \in \mathcal{C}([0, \beta_1], \mathbb{R})$ et $f_2 \in \mathcal{C}([0, \beta_2], \mathbb{R})$ vérifient $f_1(0) = f_2(0) = y_0$, $T \circ \pi = \pi \circ f_1$ et $T \circ \pi = \pi \circ f_2$. Alors $\pi \circ f_1 = \pi \circ f_2$ sur $[0, \min(\beta_1, \beta_2)]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires $f_1 - f_2$ est constante à valeurs dans \mathbb{Z} . Or, comme $f_1(0) = f_2(0)$, on a donc $f_1 = f_2$ sur $[0, \min(\beta_1, \beta_2)]$.

On peut donc définir de façon cohérente $f_0 : [0, \beta[\rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f_0(0) = y_0$ et $T \circ \pi = \pi \circ f_0$ sur $[0, \beta[$, en posant pour tout $x \in [0, \beta[$, $f_0(x) = f(x)$ pour tout $b \in E$ et $f \in \mathcal{C}([0, b], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = y_0$ et $T \circ \pi = \pi \circ f$.

Il reste à montrer que $\beta = +\infty$. Par l'absurde, supposons que $\beta < +\infty$. Fixons $\varepsilon \in]0, 1/2[$. Par continuité de $T \circ \pi$, il existe $\delta > 0$, tel que :

$$\forall t \in [\beta - \delta, \beta + \delta], \text{ dist}_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}(T(\overline{\beta}), T(\overline{t})) \leq \varepsilon.$$

Soit $y_\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\overline{y_\beta} = \pi(y_\beta) = T(\overline{\beta})$. En appliquant le lemme 1.7 à $[y_\beta - \varepsilon, y_\beta + \varepsilon]$, on obtient par composition une application g de $[y_\beta - \varepsilon, y_\beta + \varepsilon]$ dans \mathbb{R} telle que $T \circ \pi = \pi \circ g$ sur $[y_\beta - \varepsilon, y_\beta + \varepsilon]$. Sur $[y_\beta - \varepsilon, y_\beta]$, on a $\pi \circ f_0 = \pi \circ g$, donc la fonction continue $g - f_0$ est constante à valeurs dans \mathbb{Z} . Quitte à retrancher cette constante à g , on peut supposer que f_0 et g coïncident sur $[y_\beta - \varepsilon, y_\beta]$. En recollant f_0 et g , on voit que $\beta + \delta \in E$, ce qui contredit la définition de β . Ainsi, $\beta = +\infty$ et il existe $f_0 \in \mathcal{C}([0, +\infty[)$ continue telle que $f_0(0) = y_0$ et $T \circ \pi = \pi \circ f_0$.

De façon symétrique on peut construire une fonction $g_0 :]-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $g_0(0) = y_0$ et $T \circ \pi = \pi \circ g_0$. En recollant g_0 et f_0 , on obtient une fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle

que $\pi \circ f = T \circ \pi$.

Or, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\pi \circ f = T \circ \pi$ est injective sur l'intervalle $[a, a + 1[$, donc f est également injective sur cet intervalle. Et comme f est continue sur \mathbb{R} , f est strictement monotone sur $[a, a + 1[$. Or le sens de variation de f sur $[a, a + 1[$ ne dépend pas de a . Donc f est strictement monotone sur \mathbb{R} .

Comme $\pi(f(1)) = \pi(f(0))$, on a $f(1) - f(0) \in \mathbb{Z}^*$. Si $|f(1) - f(0)| \geq 2$, par théorème des valeurs intermédiaires, il existerait un réel $a \in]0, 1[$ tel que $|f(a) - f(0)| = 1$, ce qui contredirait l'injectivité de $T \circ \pi$ sur $[0, 1[$. Ainsi on a bien $f(1) = f(0) \pm 1$.

Enfin, la fonction $x \mapsto f(x + 1) - f(x)$ est continue et à valeurs dans \mathbb{Z} (en raison de la relation $T \circ \pi = \pi \circ f$) donc constante, égale à $f(1) - f(0)$ donc à ± 1 . \square

Notation 1.9. Notons \mathcal{T}_{ent} l'ensemble des translations entières sur \mathbb{R} , c'est-à-dire l'ensemble des applications $t_\alpha : x \mapsto x + \alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Proposition 1.10. On définit sur \mathcal{E}^+ la relation d'équivalence \sim par :

$$f \sim g \iff f - g \text{ est constante et à valeurs dans } \mathbb{Z}.$$

Alors :

1. $(\mathcal{T}_{\text{ent}}, \circ)$ est un sous-groupe distingué de (\mathcal{E}^+, \circ) .
2. La relation d'équivalence \sim est la relation d'équivalence associée au sous-groupe $(\mathcal{T}_{\text{ent}}, \circ)$.

Preuve :

1) On vérifie facilement que $\mathcal{T}_{\text{ent}} \subset \mathcal{E}^+$ et $\text{Id}_{\mathbb{R}} = t_0 \in \mathcal{T}_{\text{ent}}$. De plus, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, on a $(t_\alpha)^{-1} = t_{-\alpha} \in \mathcal{T}_{\text{ent}}$ et $t_\alpha \circ t_\beta = t_{\alpha+\beta} \in \mathcal{T}_{\text{ent}}$. Enfin, pour tous $f \in \mathcal{E}^+$, $\alpha \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$, on a $f \circ t_\alpha \circ f^{-1}(x) = f(f^{-1}(x) + \alpha) = f(f^{-1}(x)) + \alpha = x + \alpha$ et donc $f \circ t_\alpha \circ f^{-1} = t_\alpha \in \mathcal{T}_{\text{ent}}$. Ainsi, \mathcal{T}_{ent} est un sous-groupe distingué de \mathcal{E}^+ .

2) Soient $f, g \in \mathcal{E}^+$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f \sim g &\iff \exists \alpha \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x) + \alpha \\ &\iff \exists \alpha \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, g^{-1}(f(x)) = g^{-1}(g(x) + \alpha) = x + \alpha = t_\alpha(x) \\ &\iff g^{-1} \circ f \in \mathcal{T}_{\text{ent}}. \end{aligned}$$

Ce qui montre le résultat. \square

Définition et proposition 1.11. Distance sur \mathcal{E}^+ et $\mathcal{E}^+/\mathcal{I}_{\text{ent}}$

1. On munit \mathcal{E}^+ de la métrique d associée à la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par :

$$\forall f, g \in \mathcal{E}^+, d(f, g) := \|f - g\|_\infty.$$

La distance d est invariante par translation.

2. On munit $\mathcal{E}^+/\mathcal{I}_{\text{ent}}$ de la distance d_q définie par :

$$\forall C_1, C_2 \in \mathcal{E}^+/\mathcal{I}_{\text{ent}}, d_q(C_1, C_2) := \inf\{d(f, g) : (f, g) \in C_1 \times C_2\}$$

Preuve :

1) Cette distance a bien un sens car pour tous $f, g \in \mathcal{E}^+$, la fonction $f - g$ est périodique et continue, donc bornée. On vérifie facilement que cela définit bien une métrique sur \mathcal{E}^+ , à partir des axiomes vérifiés par la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$, et que cette métrique est invariante par translation.

2) Montrons dans un premier temps que pour $C_1, C_2 \in \mathcal{E}^+/\mathcal{I}_{\text{ent}}$, la borne inférieure définissant $d_q(C_1, C_2)$ est atteinte. Fixons $(f, g) \in C_1 \times C_2$. On a :

$$\begin{aligned} d_q(C_1, C_2) &= \inf \{ \| (f + k_1 \mathbf{1}) - (g + k_2 \mathbf{1}) \|_\infty ; (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 \} \\ &= \inf \{ \| f - g + k \mathbf{1} \|_\infty ; k \in \mathbb{Z} \} \end{aligned}$$

De plus, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\|f - g + k \mathbf{1}\|_\infty \geq |k| - \|f - g\|_\infty$.

Comme $d_q(C_1, C_2) \leq \|f - g\|_\infty$, on a donc :

$$d_q(C_1, C_2) = \min\{\|f - g + k \mathbf{1}\|_\infty ; k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } |k| \leq 2\|f - g\|_\infty\}.$$

C'est ainsi le minimum d'un ensemble fini, donc $d(C_1, C_2)$ est atteinte.

De plus, l'application d_q vérifie l'axiome de séparation. Soient $C_1, C_2 \in \mathcal{E}^+/\mathcal{I}_{\text{ent}}$ telles que $d_q(C_1, C_2) = 0$. Comme la borne inférieure définissant d_q est atteinte, il existe $f_0 \in C_1$ et $g_0 \in C_2$ telles que $d_q(C_1, C_2) = d(f_0, g_0) = 0$. Comme d est une distance, on a $f = g$ et donc $C_1 = C_2$.

La symétrie est immédiate et découle de la symétrie de d .

Enfin, soient $C_1, C_2, C_3 \in \mathcal{E}^+/\mathcal{I}_{\text{ent}}$. Comme la borne inférieure définissant d_q est atteinte, il existe $f \in C_1$, $g \in C_2$ et $\tilde{g} \in C_2$, $h \in C_3$ telles que $d_q(C_1, C_2) = d(f, g)$ et $d_q(C_2, C_3) = d(\tilde{g}, h)$. Quitte à soustraire à \tilde{g} une certaine constante entière k , et à retrancher cette même constante à h , on peut supposer que $g = \tilde{g}$. Ainsi, en utilisant l'inégalité triangulaire sur d :

$$d_q(C_1, C_3) \leq d(f, h) \leq d(f, g) + d(g, h) = d_q(C_1, C_2) + d_q(C_2, C_3)$$

Ainsi, l'application d_q définit bien une métrique sur $\mathcal{E}^+/\mathcal{I}_{\text{ent}}$. □

Définition et proposition 1.12. Projection de \mathcal{E}^+ dans $\mathcal{E}^+/\mathcal{T}_{\text{ent}}$

Notons $p : f \mapsto \bar{f}$ l'application définie de (\mathcal{E}^+, d) dans $(\mathcal{E}^+/\mathcal{T}_{\text{ent}}, d_q)$. Alors :

1. L'application p est 1-lipschitzienne, donc **continue**.
2. $\forall f \in \mathcal{E}^+, \forall r > 0, p(B(f, r)) = B_{d_q}(\bar{f}, r)$.
3. L'application p est **ouverte** de (\mathcal{E}^+, d) dans $(\mathcal{E}^+/\mathcal{T}_{\text{ent}}, d_q)$.

Preuve :

1) Soient $f, g \in \mathcal{E}^+$. Par définition de d_q , on a $a = d_q(p(f), p(g)) = d_q(\bar{f}, \bar{g}) \leq d(f, g)$. Donc l'application p est 1-lipschitzienne.

2) Soient $f \in \mathcal{E}^+$, et $r > 0$. On a $p(B(f, r)) \subset B_{d_q}(\bar{f}, r)$ car p est 1-lipschitzienne. Montrons l'autre inclusion. Soit $\bar{g} \in B_{d_q}(\bar{f}, r)$. On a, pour $g \in \bar{g}$:

$$r > d_q(\bar{f}, \bar{g}) = \min\{\|f - g - k\mathbb{1}\|_\infty; k \in \mathbb{Z}\}.$$

On peut alors choisir l'entier k qui réalise ce minimum. Alors $g + k\mathbb{1} \in B(f, r)$, et donc $p(g + k\mathbb{1}) = \bar{g} \in p(B(f, r)) = B_{d_q}(\bar{f}, r)$. D'où $B_{d_q}(\bar{f}, r) \subset p(B(f, r))$ et l'égalité souhaitée.

3) Ce point découle du point précédent. □

Corollaire 1.13. La métrique d_q définit la topologie quotient sur $\mathcal{E}^+/\mathcal{T}_{\text{ent}}$.**Preuve :**

Notons \mathcal{O}_q la topologie quotient sur $\mathcal{E}^+/\mathcal{T}_{\text{ent}}$. La topologie quotient est la topologie la plus fine qui rend l'application de projection p continue. Par la proposition 1.12, p est continue pour la topologie associée à d_q : la topologie associée à la distance d_q est donc moins fine que la topologie \mathcal{O}_q .

Soit U un ouvert de $(\mathcal{E}^+/\mathcal{T}_{\text{ent}}, \mathcal{O}_q)$. Alors $p^{-1}(U)$ est un ouvert de (\mathcal{E}^+, d) . Comme p est surjective, $U = p(p^{-1}(U))$. Et d'après la proposition 1.12, p est ouverte de (\mathcal{E}^+, d) dans $(\mathcal{E}^+/\mathcal{T}_{\text{ent}}, d_q)$, donc U est un ouvert pour la topologie associée à la distance d_q , qui est ainsi plus fine que \mathcal{O}_q , ce qui permet de conclure. □

Définition et proposition 1.14. Distance sur $\text{Hom}^+(\mathbb{T})$

Munissons $\text{Hom}^+(\mathbb{T})$ de la distance \bar{d}_∞ définie de la façon suivante :

$$\forall T_1, T_2 \in \text{Hom}^+(\mathbb{T}), \bar{d}_\infty(T_1, T_2) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \bar{d}(T_1(x), T_2(x)).$$

où \bar{d} est la distance sur \mathbb{R}/\mathbb{Z} introduite dans la définition 1.2. On a l'inégalité suivante :

$$\forall T_1, T_2 \in \text{Hom}^+(\mathbb{T}), \bar{d}_\infty(T_1, T_2) \leq 1/2.$$

Preuve :

On vérifie par des arguments similaires à ceux utilisés précédemment que \bar{d}_∞ est une distance sur $\text{Hom}^+(\mathbb{T})$. De plus, soient $T_1, T_2 \in \text{Hom}^+(\mathbb{T})$. D'après la proposition 1.2, pour

tout $x \in \mathbb{R}$, $\bar{d}(T_1(x), T_2(x)) \leq 1/2$. Par passage au sup, $\bar{d}_\infty(T_1, T_2) \leq 1/2$. \square

Corollaire 1.15. *Isomorphisme entre $\mathcal{E}^+/\mathcal{I}_{\text{ent}}$ et $\text{Hom}^+(\mathbb{T})$*

L'application $f \mapsto T_f$ de \mathcal{E}^+ dans $\text{Hom}^+(\mathbb{T})$ passe au quotient et fournit un isomorphisme ι de groupes de $\mathcal{E}^+/\sim = \mathcal{E}^+/\mathcal{I}_{\text{ent}}$ vers $\text{Hom}^+(\mathbb{T})$.

L'application ι est définie par :

$$\forall \bar{f} \in \mathcal{E}^+/\mathcal{I}_{\text{ent}}, \iota(\bar{f}) = T_f.$$

Preuve :

Définissons l'application $h : \mathcal{E}^+ \rightarrow \text{Hom}^+(\mathbb{T})$ qui pour tout $f \in \mathcal{E}^+$ associe l'unique $T_f \in \text{Hom}^+(\mathbb{T})$ telle que $T_f \circ \pi = \pi \circ f$ (cf théorème 1.6).

On vérifie que h est un morphisme de groupes. Soient $f, g \in \mathcal{E}^+$, on a par définition :

$$h(f \circ g) \circ \pi = T_{f \circ g} \circ \pi = \pi \circ f \circ g = T_f \circ \pi \circ g = T_f \circ T_g \circ \pi$$

Par unicité, on $h(f \circ g) = T_{f \circ g} = T_f \circ T_g = h(f) \circ h(g)$.

L'application h est constante sur les classes d'équivalence données par la relation \sim . En effet, soient $g, f \in \mathcal{E}^+$ telles que $f \sim g$. Il existe un unique $T \in \text{Hom}^+(\mathbb{T})$ tel que $h(f) = T$. On a alors $h(f) \circ \pi = T \circ \pi = \pi \circ f = \pi \circ g = h(g) \circ \pi$ car $f \sim g$. Par unicité, on a également $h(g) = T$.

De plus, h est surjective d'après le théorème 1.8. Donc h est bijective. Ainsi, d'après le théorème d'isomorphisme, on a l'isomorphisme de groupes :

$$\mathcal{E}^+/\mathcal{I}_{\text{ent}} = \mathcal{E}^+/\sim \simeq \text{Hom}^+(\mathbb{T})$$

\square

Proposition 1.16. *Notons $d'_q = \min(d_q, 1/2)$. L'application ι obtenue dans le corollaire 1.15 est une **isométrie** de $(\mathcal{E}^+/\mathcal{I}_{\text{ent}}, d'_q)$ dans $(\text{Hom}^+(\mathbb{T}), \bar{d}_\infty)$.*

Autrement dit :

$$\forall \bar{f}, \bar{g} \in \mathcal{E}^+/\mathcal{I}_{\text{ent}}, \bar{d}_\infty(T_f, T_g) = \min(d_q(\bar{f}, \bar{g}), 1/2).$$

Par conséquent, l'application $\iota : \mathcal{E}^+/\mathcal{I}_{\text{ent}} \rightarrow \text{Hom}^+(\mathbb{T})$ est un isomorphisme de groupes topologiques.

Preuve :

Soient $\bar{f}, \bar{g} \in \mathcal{E}^+/\mathcal{I}_{\text{ent}}$.

1^{er} cas : $d_q(\bar{f}, \bar{g}) < 1/2$.

Comme la borne inférieure définissant $d_q(\bar{f}, \bar{g})$ est atteinte, quitte à changer de représentants, on peut supposer $\|f - g\|_\infty < 1/2$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x) + k| &\geq |k| - |f(x) - g(x)| \\ &\geq 1 - 1/2 \\ &\geq |f(x) - g(x)| \end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\bar{d}(f(x), g(x)) = |f(x) - g(x)|$ et donc

$$\bar{d}_\infty(T_f, T_g) = \|f - g\|_\infty = d_q(\bar{f}, \bar{g}).$$

2nd cas : $d_q(\bar{f}, \bar{g}) \geq 1/2$.

Si l'on avait pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - g(x) + 1/2 \notin \mathbb{Z}$, l'image de $f - g$ serait contenue dans un intervalle $]j - 1/2, j + 1/2[$ avec $j \in \mathbb{Z}$. Alors $d_q(\bar{f}, \bar{g}) < 1/2$.

Par contraposition, on en déduit qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) - g(x_0) \in 1/2 + \mathbb{Z}$. Cela entraîne que $\bar{d}(T_f(x_0), T_g(x_0)) = 1/2$ et donc $\bar{d}_\infty(T_f, T_g) \geq 1/2$. Et comme $\bar{d}_\infty(T_f, T_g) \leq 1/2$ d'après la proposition 1.14, on obtient l'égalité.

Dans tous les cas, on a l'égalité souhaitée entre les deux distances. □

Dans toute la suite, sans mention explicite du contraire, T désignera un élément de $\text{Hom}^+(\mathbb{T})$.

2 Nombre de rotation

2.1 Résultats préliminaires sur les suites sous-additives et sur-additives

Il est utile de montrer en premier lieu un résultat important sur des suites bien particulières : les suites sous-additives et sur-additives. Ce résultat nous sera utile pour assurer l'existence d'une limite par la suite.

Définition 2.1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **sous-additive** si pour tout couple d'entiers naturels (p, q) , on a : $u_{p+q} \leq u_p + u_q$

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **sur-additive** si pour tout couple d'entiers naturels (p, q) , on a : $u_{p+q} \geq u_p + u_q$

Théorème 2.2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sous-additive, alors

$$\frac{u_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \inf_{p \geq 1} \frac{u_p}{p} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

2. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sur-additive, alors

$$\frac{u_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sup_{p \geq 1} \frac{u_p}{p} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Preuve :

1) On fixe $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $n \geq q$. La division euclidienne de n par p donne $n = p \times q_n + r_n$ avec $q_n \geq 1$ et $0 \leq r_n < p$. Par sous-additivité, $u_n \leq q_n u_p + u_{r_n}$ d'où

$$\frac{u_n}{n} \leq \frac{p q_n}{n} \times \frac{u_p}{p} + \frac{u_{r_n}}{n} \leq \frac{u_p}{p} + \max_{0 \leq i \leq p-1} \frac{u_i}{n}.$$

On prend la limite supérieure quand $n \rightarrow +\infty$:

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} \leq \frac{u_p}{p}.$$

Puisque cette dernière inégalité est vérifiée pour tout $p \geq 1$, on a :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} \leq \inf_{p \geq 1} \frac{u_p}{p} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n}.$$

d'où le résultat énoncé.

2) Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite sur-additive, $(-u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite sous-additive. On peut lui appliquer le point 1 et conclure. \square

2.2 Définition

Introduisons désormais une notion centrale de ce mémoire : le nombre de rotation d'un homéomorphisme préservant l'orientation.

Théorème et définition 2.3. Nombre de rotation

1. Pour tout relèvement de f de T , la limite

$$\alpha(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f^n(0)}{n}$$

existe et est finie.

2. La suite de fonctions $(x \mapsto (f^n(x) - x)/n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur \mathbb{R} vers $\alpha(f)$.

3. La classe $\overline{\alpha(f)}$ dans \mathbb{R}/\mathbb{Z} ne dépend pas du relèvement f choisi. On l'appelle **nombre de rotation de T** et on la note $\rho(T)$.

Preuve :

1) Soit f un relèvement de T . Montrons la sur-additivité de la suite $(\lfloor f^n(0) \rfloor)_{n \geq 0}$. Soient $p, q \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} f^{p+q}(0) &= f^p(f^q(0)) \\ &\geq f^p(\lfloor f^q(0) \rfloor) \text{ par croissance de } f^p \\ &\geq f^p(0) + \lfloor f^q(0) \rfloor \text{ par 1-périodicité de } x \mapsto f^p(x) - x \\ &\geq \lfloor f^p(0) \rfloor + \lfloor f^q(0) \rfloor. \end{aligned}$$

Comme $\lfloor f^p(0) \rfloor + \lfloor f^q(0) \rfloor$ est un entier, $\lfloor f^{p+q}(0) \rfloor \geq \lfloor f^p(0) \rfloor + \lfloor f^q(0) \rfloor$, d'où la sur-additivité de $(\lfloor f^n(0) \rfloor)_{n \geq 0}$. Par des arguments similaires, on montre que la suite $(\lceil f^n(0) \rceil)_{n \geq 0}$ est sous-additive.

D'après le théorème 2.2, on sait qu'il existe $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, tels que

$$\frac{\lfloor f^n(0) \rfloor}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \text{ et } \frac{\lceil f^n(0) \rceil}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b.$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq \frac{\lceil f^n(0) \rceil}{n} - \frac{\lfloor f^n(0) \rfloor}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Donc en passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, on conclut que $a = b$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\lfloor f^n(0) \rfloor}{n} \leq \frac{f^n(0)}{n} \leq \frac{\lceil f^n(0) \rceil}{n}.$$

Par théorème d'encadrement, on en déduit l'existence de la limite $\alpha(f)$.

2) Montrons que la suite de fonctions $(x \mapsto (f^n(x) - x)/n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur \mathbb{R} .

Soit $x \in [0, 1]$, par croissance de f^n , on a :

$$f^n(0) \leq f^n(x) \leq f^n(1) = f^n(0) + 1.$$

Comme $-1 \leq x \leq 0$:

$$f^n(0) - 1 \leq f^n(0) - x \leq f^n(x) - x \leq f^n(0) + 1 - x \leq f^n(0) + 1.$$

D'où

$$\frac{f^n(0) - 1}{n} - \alpha(f) \leq \frac{f^n(x) - x}{n} - \alpha(f) \leq \frac{f^n(0) + 1}{n} - \alpha(f).$$

Ainsi,

$$\left| \frac{f^n(x) - x}{n} - \alpha(f) \right| \leq \left| \frac{f^n(0)}{n} - \alpha(f) \right| + \frac{1}{n}.$$

Par 1-périodicité de $x \mapsto f^n(x) - x$, cette dernière inégalité est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, et elle ne dépend plus de x . On a alors :

$$\left\| \frac{f^n - \text{Id}_{\mathbb{R}}}{n} - \alpha(f) \right\|_{\infty} \leq \left| \frac{f^n(0)}{n} - \alpha(f) \right| + \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ce qui démontre bien la convergence uniforme.

3) On a vu que T possède un unique relèvement à un entier près. Soient f_1 et f_2 deux relèvements de T . On sait alors qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = f_2(x) + k$. Par récurrence, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_1^n(x) = f_2^n(x) + nk$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f_1^n(x) - x}{n} = \frac{f_1^n(x) - x}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f_2^n(x) - x}{n} + k.$$

Donc $\alpha(f_1) = \alpha(f_2) + k$ et $\overline{\alpha(f_1)} = \overline{\alpha(f_2)}$ dans \mathbb{R}/\mathbb{Z} . \square

Etudions le cas le plus simple : le cas des **translations** de \mathbb{R} , qu'on voit comme **rotations** de \mathbb{T} .

Exemple 2.4. Rotations

Soit R_{θ} l'homéomorphisme de \mathbb{R}/\mathbb{Z} obtenu par passage au quotient à partir de l'application $t_{\theta} : x \mapsto x + \theta$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Comme la fonction $x \mapsto t_{\theta}(x) - x$ est constante égale à θ , pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{t_{\theta}^n(0)}{n} = \frac{n\theta}{n} = \theta.$$

Et donc $\alpha(f) = \theta$ et $\rho(R_{\theta}) = \bar{\theta}$.

2.3 Premières propriétés

Nous pouvons alors démontrer quelques propriétés qui découlent facilement des définitions et des propriétés sur les homéomorphismes de \mathbb{R} et de \mathbb{T} .

Proposition 2.5. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\rho(T^k) = k \times \rho(T)$. En particulier, on a $\rho(\text{Id}_{\mathbb{T}}) = 0$ et $\rho(T^{-1}) = -\rho(T)$.

Preuve :

Soient f un relèvement de T et $k \in \mathbb{Z}$. Alors f^k est un relèvement de T^k .

$$\frac{(f^k)^n(0)}{n} = \frac{k f^{kn}(0)}{kn} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} k \times \alpha(f).$$

ce qui montre le résultat voulu. \square

Le lemme suivant permet de relier des bornes sur le nombre de rotation d'un homéomorphisme. Il permettra de faciliter des démonstrations à venir.

Lemme 2.6. Lemme fondamental

Soit f un relèvement de T . Notons

$$a = \inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) - x \text{ et } b = \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x) - x.$$

Alors :

1. Les bornes a et b sont atteintes sur $[0,1]$ et même sur $[0,1[$.
2. De plus, $a \leq b < a + 1$.
3. Enfin, $a \leq \alpha(f) \leq b$.

Preuve :

1) La fonction $x \mapsto f(x) - x$ est continue sur \mathbb{R} et 1-périodique. Elle est donc bornée et atteint ses bornes a et b sur le compact $[0,1]$. Comme $f(0) = f(1) - 1$, elle atteint ses bornes sur $[0,1[$.

2) Notons $(x_1, x_2) \in [0,1]^2$ tels que $f(x_1) - x_1 = a$ et $f(x_2) - x_2 = b$.

1^{er} cas : $x_1 \leq x_2 < x_1 + 1$

En additionnant les inégalités $f(x_2) < f(x_1) + 1$ et $-x_2 \leq x_1$, on obtient :

$$b = f(x_2) - x_2 < f(x_1) - x_1 + 1 = a + 1.$$

2nd cas : $x_2 \leq x_1 < x_2 + 1$

En additionnant les inégalités $f(x_2) \leq f(x_1)$ et $-x_2 - 1 < -x_1$, on obtient :

$$b - 1 = f(x_2) - x_2 - 1 < f(x_1) - x_1 = a.$$

Dans tous les cas, $b < a + 1$.

3) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a \leq f(x) - x \leq b$.

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $na \leq f^n(0) \leq nb$. Pour $n = 0$, les inégalités sont vraies. Soit $n \in \mathbb{N}$ pour lequel $na \leq f^n(0) \leq nb$. Par croissance de f , et par définition de a et b :

$$na + a \leq f(na) \leq f^{n+1}(0) \leq f(nb) \leq nb + b.$$

Ce qui montre les inégalités au rang $n + 1$ qui achève la récurrence. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a \leq \frac{f^n(0)}{n} \leq b.$$

Et par passage à la limite : $a \leq \alpha(f) \leq b$. □

Le théorème suivant permet de relier l'existence de **point fixe** d'une puissance d'un homéomorphisme avec la **rationalité** de son nombre de rotation.

Théorème 2.7. On a l'équivalence

$$\rho(T) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \iff \exists k \in \mathbb{N}^*, T^k \text{ a un point fixe.}$$

Plus précisément,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, k \times \rho(T) = \bar{0} \iff T^k \text{ possède un point fixe.}$$

Preuve :

(\Rightarrow) Montrons le sens direct. Soit f un relèvement de T .

Dans un premier temps, montrons que si T ne possède pas de point fixe, alors $\rho(T) \neq \bar{0}$. Par hypothèse, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - x \notin \mathbb{Z}.$$

Or $x \mapsto f(x) - x$ est continue et 1-périodique. Son image est donc un segment $[a, b]$ inclus dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. D'après le lemme 2.6, $a \leq \alpha(f) \leq b < a + 1$ et donc $\alpha(f) \notin \mathbb{Z}$, ie $\rho(T) \neq \bar{0}$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons désormais que $k\rho(T) = \bar{0}$. Alors $\alpha(f) = j/k \in \mathbb{Q}$ avec $j \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. D'après la propriété 2.5, on a donc $\alpha(f^k) = k \times \alpha(f) = j \in \mathbb{Z}$. D'après le cas particulier étudié précédent, T^k possède un point fixe, ce qui montre le résultat voulu.

(\Leftarrow) Montrons le sens réciproque. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons que T^k a un point fixe x_0 . Soit f un relèvement de T . Alors $f^k(x_0) = x_0 + j$ avec $j \in \mathbb{Z}$ et pour tout $q \in \mathbb{N}$, $f^{qk}(x_0) = x_0 + q \times j$. Soit $n \in \mathbb{N}$, la division euclidienne de n par k s'écrit $n = kq_n + r_n$ avec $q_n \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq r_n < k$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f^n(x_0) &= f^{kq_n + r_n}(x_0) \\ &= f^{r_n}(f^{kq_n}(x_0)) \\ &= f^{r_n}(x_0 + q_n j) \\ &= f^{r_n}(x_0) + q_n j \text{ par propriété des relèvements} \end{aligned}$$

Il en découle :

$$\frac{f^n(x_0) - x_0}{n} = \frac{f^{r_n}(x_0) - x_0}{n} + \frac{q_n \times j}{q_n \times k + r_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{j}{k}.$$

D'où $\alpha(f) = j/k \in \mathbb{Q}$. □

Exemple 2.8. Rotation d'angle rationnel

Soit $R_{p/q}$ la rotation d'angle p/q avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Comme $R_{p/q}^q = \text{Id}_{\mathbb{T}}$, on a d'après le théorème 2.7, $q \times \rho(R_{p/q}) = \bar{0}$, ce qui est en accord avec l'exemple 2.4.

Du lemme et du théorème précédents découle le corollaire suivant :

Corollaire 2.9. Soient $f \in \mathcal{E}^+$ et $k, r \in \mathbb{Z}$. Alors

$$\text{Im}(f^k - \text{Id}) \subset]r, r + 1[\iff \alpha(f^k) \in]r, r + 1[.$$

Preuve :

(\Rightarrow) Le lemme 2.6 donne le sens direct.

(\Leftarrow) Supposons que $\alpha(f^k) \in]r, r + 1[$. Alors T_f^k n'a pas de point fixe d'après le théorème 2.7. Donc $\text{Im}(f^k - \text{Id})$ est incluse dans un intervalle $]s, s + 1[$ avec $s \in \mathbb{Z}$. D'après le sens direct, $\alpha(f^k) \in]s, s + 1[$. D'où $s = r$. □

Le nombre de rotation est un **invariant de conjugaison**. C'est l'objet de la propriété suivante.

Proposition 2.10. *Le nombre de rotation est invariant par conjugaison topologique : pour tous T_1, T_2 dans $\text{Hom}^+(\mathbb{T})$,*

$$\rho(T_1 \circ T_2 \circ T_1^{-1}) = \rho(T_2).$$

Preuve :

Soient $T_1, T_2 \in \text{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ et f_1, f_2 des relèvements de T_1 et T_2 respectivement. Alors $f_1 \circ f_2 \circ f_1^{-1}$ est un relèvement de $T_1 \circ T_2 \circ T_1^{-1}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \frac{(f_1 \circ f_2 \circ f_1^{-1})^n(x) - x}{n} &= \frac{f_1 \circ f_2^n \circ f_1^{-1}(x) - x}{n} \\ &= \frac{f_1(f_2^n \circ f_1^{-1}(x)) - f_2^n \circ f_1^{-1}(x)}{n} \\ &\quad + \frac{f_2^n \circ f_1^{-1}(x) - f_1^{-1}(x)}{n} + \frac{f_1^{-1}(x) - x}{n}. \end{aligned}$$

Or, par propriété du nombre de rotation

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f_2^n \circ f_1^{-1}(x) - f_1^{-1}(x)}{n} = \alpha(f_2).$$

Et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f_1(f_2^n \circ f_1^{-1}(x)) - f_2^n \circ f_1^{-1}(x)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f_1^{-1}(x) - x}{n} = 0$$

car les numérateurs sont bornés. En effet, les fonctions $x \mapsto f_1(x) - x$ et $x \mapsto f_1^{-1}(x) - x$ sont 1-périodiques et continues donc bornées.

Donc finalement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(f_1 \circ f_2 \circ f_1^{-1})^n(x) - x}{n} = \alpha(f_2)$$

ce qui achève la preuve. \square

2.4 Nombre de rotation d'une composée

Existe-t-il une formule pour calculer le nombre de rotation d'une composée ? D'abord, nous montrerons que si deux homéomorphismes **commutent**, le **nombre de rotation de leur composée est la somme de leur nombre de rotation**. Nous verrons ensuite que cette propriété **ne se généralise pas** en exhibant un contre-exemple.

Théorème 2.11. *Soient $T_1, T_2 \in \text{Hom}^+(\mathbb{T})$ tels que $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$. Alors,*

$$\rho(T_1 \circ T_2) = \rho(T_1) + \rho(T_2).$$

Preuve :

Soient f_1 et f_2 des relèvements de T_1 et T_2 respectivement. Dans un premier temps, montrons que $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$:

Comme $f_1 \circ f_2$ et $f_2 \circ f_1$ sont des relèvements de $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$, il existe une constante $C \in \mathbb{Z}$ telle que

$$f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1 + C.$$

D'où

$$\alpha(f_1 \circ f_2) = \alpha(f_2 \circ f_1) + C.$$

De plus, on a

$$\frac{f_2((f_1 \circ f_2)^n(0))}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha(f_1 \circ f_2).$$

En effet, comme $f_2 - \text{Id}_{\mathbb{R}}$ est bornée :

$$\left| \frac{f_2((f_1 \circ f_2)^n(0))}{n} - \frac{(f_1 \circ f_2)^n(0)}{n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

En passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f_2((f_1 \circ f_2)^n(0))}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(f_1 \circ f_2)^n(0)}{n} = \alpha(f_1 \circ f_2).$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{f_2((f_1 \circ f_2)^n(0))}{n} = \frac{(f_2 \circ f_1)^n(f_2(0))}{n}.$$

Donc en passant à la limite quand $n \rightarrow \infty$, $\alpha(f_1 \circ f_2) = \alpha(f_2 \circ f_1)$. On en déduit que $C = 0$ et donc $f_1 \circ f_2 = f_1 \circ f_2$. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(f_1 \circ f_2)^n = f_1^n \circ f_2^n$.

Ainsi, grâce à la convergence uniforme de $((f_1^n - \text{Id}_{\mathbb{R}})/n)_{n \geq 1}$ vers $\alpha(f_1)$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \frac{(f_1 \circ f_2)^n(x) - x}{n} &= \frac{f_1^n(f_2^n(x)) - f_2^n(x)}{n} + \frac{f_2^n(x) - x}{n} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha(f_1) + \alpha(f_2). \end{aligned}$$

On conclut que $\alpha(f_1 \circ f_2) = \alpha(f_1) + \alpha(f_2)$ et donc $\rho(T_1 \circ T_2) = \rho(T_1) + \rho(T_2)$. □

Remarque 2.12. *On retrouve le résultat de la propriété 2.5. En effet, comme T commute avec lui-même, on peut facilement montrer par récurrence que :*

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \rho(T^k) = k\rho(T)$$

Contre-exemple 2.13. Attention ! *Le théorème 2.11 est faux en général si T_1 et T_2 ne commutent pas, comme le montre le contre-exemple suivant :*

Soit $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_1(x) := [x] + (x - [x])^2$. On peut montrer les résultats suivants :

- $f_1 - \text{Id}_{\mathbb{R}}$ est 1-périodique.
- f_1 est continue et strictement croissante sur $[0, 1]$ grâce au point précédent et au fait que pour tout $x \in [0, 1]$ (y compris si $x = 1$), on a $f(x) = x^2$.
- $f_1 - \text{Id}_{\mathbb{R}}$ est à valeurs dans $[-1/4, 0]$ et ne s'annule que sur \mathbb{Z} .

Soit $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_2(x) := f_1(x + 1/2) - 1/2$. Alors f_2 a les mêmes propriétés que f_1 hormis le fait que les zéros de $f_2 - \text{Id}_{\mathbb{R}}$ sont les points de $1/2 + \mathbb{Z}$.

Soit alors $T_1 \in \text{Hom}^+(S^1)$ dont un relèvement est f_1 , et $T_2 \in \text{Hom}^+(S^1)$ dont un relèvement est f_2 . Par construction, T_1 et T_2 possèdent un point fixe donc $\rho(T_1) = \rho(T_2) = \bar{0}$ par le théorème 2.7.

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x - \frac{1}{2} \leq f_1(x) - \frac{1}{4} \leq f_2(f_1(x)) \leq x.$$

L'inégalité $f_1(x) \leq x$ est une égalité si et seulement si $x \in \mathbb{Z}$, ce qui équivaut à $f_1(x) \in \mathbb{Z}$. De plus, l'inégalité $f_2(f_1(x)) \leq f_1(x)$ est une égalité si et seulement si $f_1(x) \in 1/2 + \mathbb{Z}$. Ces deux conditions étant incompatibles, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x - 1 < x - \frac{1}{2} \leq f_2(f_1(x)) < x.$$

Donc $T_2 \circ T_1$ ne possède pas de point fixe. Et par le théorème 2.7 on a $\rho(T_2 \circ T_1) \neq \bar{0}$, *i.e.* $\rho(T_2 \circ T_1) \neq \rho(T_2) + \rho(T_1)$. \square

3 Continuité du nombre de rotation $\rho(T)$ par rapport à T

Dans cette partie, nous allons montrer que le nombre de rotation $\rho(T)$ dépend continument de l'homéomorphisme T de $\text{Hom}^+(\mathbb{T})$.

3.1 Résultats préliminaires

Nous avons besoin de quelques résultats préalables qui allègeront la preuve du théorème de continuité.

Définition 3.1. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction uniformément continue. On définit l'application **module de continuité** $\omega_f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ par $\omega_f(\delta) := \sup E_f(\delta)$, où

$$E_f(\delta) := \{|f(x_1) - f(x_2)| : (x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2, |x_1 - x_2| \leq \delta\}$$

Proposition 3.2. Pour toute fonction f uniformément continue, le module de continuité ω_f possède les 3 propriétés suivantes :

1. ω_f est croissant.
2. ω_f est sous-additif : $\forall \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}^+, \omega_f(\delta_1 + \delta_2) \leq \omega_f(\delta_1) + \omega_f(\delta_2)$.
3. $\omega_f(\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$.

Preuve :

1) Soient $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}^+$ tels que $\delta_1 \leq \delta_2$. Comme $E_f(\delta_1) \subset E_f(\delta_2)$, $\sup E_f(\delta_1) \leq \sup E_f(\delta_2)$, i.e. $\omega_f(\delta_1) \leq \omega_f(\delta_2)$.

2) Soient $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}^+$, et $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $|x_1 - x_2| \leq \delta_1 + \delta_2$. Il existe $x_3 \in \mathbb{R}$ tel que $|x_1 - x_3| \leq \delta_1$ et $|x_3 - x_2| \leq \delta_2$. Et donc :

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &\leq |f(x_1) - f(x_3)| + |f(x_3) - f(x_2)| \\ &\leq \sup E_f(\delta_1) + \sup E_f(\delta_2) \\ &\leq \omega_f(\delta_1) + \omega_f(\delta_2). \end{aligned}$$

Par passage au sup, on obtient : $\omega_f(\delta_1 + \delta_2) \leq \omega_f(\delta_1) + \omega_f(\delta_2)$.

3) Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est uniformément continue, il existe $\eta > 0$, tel que :

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, (|x_1 - x_2| \leq \eta) \implies (|f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon).$$

On a alors $\omega_f(\eta) \leq \varepsilon$. Comme ω_f est croissant sur \mathbb{R}^+ , pour tout $\delta \in \mathbb{R}^+$ tel que $\delta \leq \eta$, on a $\omega_f(\delta) \leq \omega_f(\eta) \leq \varepsilon$, ce qui achève la démonstration. \square

Lemme 3.3. Soit $r \in \mathbb{Z}$.

Posons $U_r := \{f \in \mathcal{E}^+ : \text{Im}(f - \text{Id}_{\mathbb{R}}) \subset]r, r + 1[\}$. U_r est un ouvert de \mathcal{E}^+ muni de la topologie issue de la norme de la convergence uniforme.

Preuve :

Soit $f \in U_r$. On a :

$$\begin{aligned} \text{Im}(f - \text{Id}_{\mathbb{R}}) \subset]r, r + 1[&\iff \forall x \in \mathbb{R}, |f(x) - x - (r + 1/2)| < 1/2 \\ &\iff \|f - \text{Id}_{\mathbb{R}} - (r + 1/2)\|_{\infty} < 1/2. \end{aligned}$$

Avec ces équivalences on en déduit que $U_r = \mathcal{E}^+ \cap B_{\infty}(\text{Id}_{\mathbb{R}} + r + 1/2, 1/2)$, ce qui permet de conclure que U_r est un ouvert pour la topologie demandée. \square

Lemme 3.4. Notons $\mathcal{C}_U(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions uniformément continues définies de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . L'application $\psi : \mathcal{C}_U(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times \mathcal{C}_U(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}_U(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par $\psi(f, g) = f \circ g$ est continue pour la topologie associée à la norme de la convergence uniforme.

Preuve :

L'application ψ est bien définie car une composée de fonctions uniformément continues est uniformément continue. Soient $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathcal{C}_U(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} \|\psi(f_1, g_1) - \psi(f_2, g_2)\|_{\infty} &= \|f_1 \circ g_1 - f_1 \circ g_2\|_{\infty} \\ &\leq \|f_1 \circ g_1 - f_1 \circ g_2\|_{\infty} + \|f_1 \circ g_2 - f_2 \circ g_2\|_{\infty} \\ &\leq \omega_{f_1}(\|g_2 - g_1\|_{\infty}) + \|f_2 - f_1\|_{\infty} \\ &\rightarrow 0 \text{ quand } g_2 \rightarrow g_1 \text{ et } f_2 \rightarrow f_1 \end{aligned}$$

d'après la proposition 3.2. \square

Corollaire 3.5. Soit $n \in \mathbb{N}$, l'application $\varphi_n : \mathcal{C}_U(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}_U(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par $\varphi_n(f) = f^n$ est continue pour la topologie associée à la norme de la convergence uniforme.

Preuve :

Par récurrence, montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ_n est continue. Pour $n = 0$, le résultat est clair. Soit $n \in \mathbb{N}$ pour lequel φ_n est continue. Alors pour tout $f \in \mathcal{C}_U(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a $\varphi_{n+1}(f) = \psi(f, f^n)$ (où ψ est l'application du lemme 3.4). Donc φ_{n+1} est continue d'après l'hypothèse de récurrence et par le lemme 3.4. \square

3.2 Théorème de continuité

Nous arrivons désormais au théorème qui nous intéresse dans cette partie.

Théorème 3.6. Le nombre de rotation $\rho(T)$ dépend continûment de T .

Preuve :

Montrons d'abord que l'application $\alpha : \mathcal{E}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ qui associe $\alpha(f)$ à tout $f \in \mathcal{E}$ est continue pour la topologie associée à la norme de la convergence uniforme dans \mathcal{E}^+ .

Vérifions que pour tout ouvert O de \mathbb{R} , $\alpha^{-1}(O) = \{f \in \mathcal{E}^+ : \alpha(f) \in O\}$ est un ouvert de \mathcal{E}^+ .

On peut se restreindre aux ouverts de la forme $]r/k, (r+1)/k[$ avec $r \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Soit O un ouvert de cette forme, on a :

$$\begin{aligned}
\alpha^{-1}(O) &= \{f \in \mathcal{E} : \alpha(f) \in]r/k, (r+1)/k[\} \\
&= \{f \in \mathcal{E} : \alpha(f^k) \in]r, r+1[\} \text{ (propriété 2.5)} \\
&= \{f \in \mathcal{E} : \text{Im}(f^k - \text{Id}_{\mathbb{R}}) \subset]r, r+1[\} \text{ (corollaire 2.9)} \\
&= \{f \in \mathcal{E} : f^k \in U_r\} \text{ où } U_r \text{ est l'ouvert du lemme 3.3} \\
&= \varphi_k^{-1}(U_r) \text{ où } \varphi_k \text{ est l'application du corollaire 3.5.}
\end{aligned}$$

Or U_r est un ouvert (lemme 3.3) et φ_k est continue (corollaire 3.5), $\alpha^{-1}(O)$ est donc un ouvert de \mathcal{E}^+ .

Ainsi, l'application $\bar{\alpha} : f \mapsto \overline{\alpha(f)} = \pi \circ \alpha(f)$ est continue de \mathcal{E}^+ (muni de la topologie issue norme de la convergence uniforme) dans \mathbb{R}/\mathbb{Z} (muni de la topologie quotient). Cette application est constante sur chaque classe d'équivalence pour la relation d'équivalence sur \mathcal{E}^+ définie par :

$$f \sim g \iff f - g \text{ est constante et à valeurs dans } \mathbb{Z}.$$

Par passage au quotient, l'application $\bar{\alpha}$ fournit une application continue $\tilde{\alpha}$ de \mathcal{E}^+/\sim dans \mathbb{R}/\mathbb{Z} telle que $\bar{\alpha} = \tilde{\alpha} \circ p$ où p est la projection canonique de \mathcal{E}^+ sur \mathcal{E}^+/\sim .

En utilisant l'isomorphisme ι vu au corollaire 1.15, on en déduit que ρ est continue de \mathcal{E}^+/\sim dans $\text{Hom}^+(\mathbb{T})$. \square

Voici un diagramme commutatif récapitulant tous les liens entre les différentes applications introduites dans ce mémoire :

$$\begin{array}{ccccc}
& & (\mathcal{E}^+, \|\cdot\|_{\infty}) & \xrightarrow{\alpha} & (\mathbb{R}, |\cdot|) \\
& \swarrow f \mapsto T_f & \downarrow p & \searrow \bar{\alpha} & \downarrow \pi \\
(\text{Hom}^+(\mathbb{T}), \bar{d}_{\infty}) & \xleftarrow{\iota} & (\mathcal{E}^+/\sim, d_q) & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & (\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \bar{d}) \\
& \searrow \rho & & & \swarrow
\end{array}$$

4 Étude des orbites de T et classification de Poincaré

L'objectif de cette partie est d'étudier les orbites d'un homéomorphisme T , et d'établir un début de classification des homéomorphismes de $\text{Hom}^+(\mathbb{T})$.

4.1 Homéomorphismes transitifs, orbites denses

Introduisons pour commencer quelques notions de vocabulaire autour des orbites.

Notation 4.1. *Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté avec l'homéomorphisme $f : X \rightarrow X$ (avec X un espace topologique) considéré, on pourra noter $O_x := \{f^n(x), n \in \mathbb{Z}\}$ l'orbite de élément x sous l'action d'un homéomorphisme f .*

Définition 4.2. *Soit $f : X \rightarrow X$ un homéomorphisme.*

1. *On dit que f est **transitif** si et seulement si il existe un point $x \in X$ tel que l'orbite O_x est dense dans X .*
2. *On dit que f est **minimal** si et seulement si pour tout $x \in X$, l'orbite O_x est dense dans X . Autrement dit, f est minimal si toutes les orbites sont denses dans X .*

Remarque 4.3. *Tout homéomorphisme est minimal est transitif. Nous allons voir par la suite que l'implication réciproque est vraie pour un homéomorphisme de $\text{Hom}^+(\mathbb{T})$.*

Exemple 4.4. *Pour une rotation R_θ , il y a équivalence entre :*

1. *R_θ est minimale.*
2. *R_θ est transitive.*
3. *θ est irrationnel.*

Preuve :

(1) \Rightarrow (2) Cette implication est immédiate.

(2) \Rightarrow (3) Montrons cette implication par contraposition. Supposons $\theta = p/q$ (avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $p \wedge q = 1$). Pour tout $x \in \mathbb{T}$, $R_\theta^q(x) = x$ et donc $O_x = \{x, R_\theta(x), \dots, R_\theta^{q-1}(x)\}$. Comme toute orbite est finie, R_θ n'est pas transitive.

(3) \Rightarrow (1) Supposons $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Soient $x \in \mathbb{T}$, et $a \in \mathbb{R}$ tel que $x = \bar{a}$. Montrons que O_x est dense dans \mathbb{T} . On a $O_x = \{R_\theta^n(x); n \in \mathbb{Z}\} = \pi(a + \theta\mathbb{Z}) = \pi(a + \mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z})$. L'ensemble $G := \mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de \mathbb{R} contenant 1 et θ . Comme θ est irrationnel, ce sous-groupe ne peut pas être de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}$). Donc il est dense dans \mathbb{R} , et donc $a + G$ est également dense dans \mathbb{R} . Par continuité et surjectivité de π , $O_x = \pi(a + G)$ est dense dans \mathbb{R}/\mathbb{Z} , ce qui prouve le résultat. \square

La propriété suivante présente une **condition nécessaire** pour qu'un homéomorphisme soit transitif.

Proposition 4.5. *Si $\rho(T) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, alors aucune orbite de T n'est dense dans \mathbb{T} . De façon équivalente : si T est transitive, alors nécessairement $\rho(T) \notin \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.*

Preuve :

Dans un premier temps, montrons que si $\rho(T) = \bar{0}$, alors aucune orbite de T n'est dense. Soit f le relèvement de T tel que $\alpha(f) = 0$. Soit F l'ensemble des points fixes de f . Alors F est non vide par le théorème 2.7 et F est invariant par translation de 1.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Considérons :

$$a(x) = \sup(F \cap] - \infty, x]) \text{ et } b(x) = \inf(F \cap [x, +\infty[)$$

Comme F est non minoré, non majoré et fermé, $a(x)$ et $b(x)$ sont des réels vérifiant l'inégalité $a(x) \leq x \leq b(x)$ et sont des points fixes de f . Sur $]a(x), b(x)[$, la fonction continue $f - \text{Id}_{\mathbb{R}}$ ne s'annule pas donc garde un signe constant.

Supposons que $f - \text{Id}_{\mathbb{R}} > 0$ sur $]a(x), b(x)[$. Pour tout $y \in [a(x), b(x)]$, on a alors

$$f(a(x)) = a(x) \leq y \leq f(y) \leq b(x) = f(b(x)).$$

La "suite" $(f^n(x))_{n \in \mathbb{Z}}$ est croissante et à valeurs dans $[a(x), b(x)]$. Donc il existe des réels $\ell_1, \ell_2 \in [a(x), b(x)]$ tels que :

$$f^{-n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_1 \text{ et } f^n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_2.$$

Ces limites ℓ_1 et ℓ_2 valent nécessairement $a(x)$ et $b(x)$ sinon on aurait un point fixe dans l'intervalle ouvert $]a(x), b(x)[$ et cela contredirait la construction de $a(x)$ et de $b(x)$.

Supposons maintenant que $f - \text{Id}_{\mathbb{R}} < 0$ sur $]a(x), b(x)[$. Avec des arguments similaires, on montre que $(f^n(x))_{n \geq 0}$ et $(f^{-n}(x))_{n \geq 0}$ convergent vers $b(x)$ et $a(x)$ quand $n \rightarrow \infty$.

Par construction, l'ensemble $K = \{f^n(x); n \in \mathbb{Z}\} \cup \{a(x); b(x)\} = O_x \cup \{a(x); b(x)\}$ est un compact de \mathbb{R} . De plus, $K = \overline{O_x}$. En effet, comme $O_x \subset K$ et K fermé, on a $\overline{O_x} \subset K$. Et comme $K = \overline{O_x} \cup \{a(x); b(x)\}$, et $a(x), b(x) \in \overline{O_x}$ d'après l'étude réalisée précédemment, on a $K \subset \overline{O_x}$. Ainsi, l'adhérence de l'orbite de x sous l'action de T est dénombrable, en particulier, l'orbite de x n'est pas dense dans \mathbb{S}^1 .

Soit maintenant T tel que $\rho(T) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ quelconque. Considérons alors $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $p \times \rho(T) = \rho(T^p) = \bar{0}$. Soit $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. L'orbite O_x de x sous l'action de T est l'union finie des orbites de $x, T(x), \dots, T^{p-1}(x)$ sous l'action de T^p . Les adhérences de ces orbites sont dénombrables d'après le cas particulier précédent. On en déduit que $\overline{O_x}$ est dénombrable (comme union finie d'ensemble dénombrables). En particulier, O_x n'est pas dense dans \mathbb{T} . \square

4.2 Classification de Poincaré

Nous avons vu que si T était transitif, alors nécessairement son nombre de rotation était la classe d'un irrationnel de \mathbb{R}/\mathbb{Z} . L'objectif de la **classification de Poincaré** est de relier plus précisément ces homéomorphismes aux rotations d'angle irrationnel, qui sont des homéomorphismes plus simples à étudier.

Définition 4.6. Soient X et Y deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow X$, $g : Y \rightarrow Y$ deux homéomorphismes. On dit que f et g sont **semi-conjuguées** (resp. **conjuguées**) s'il existe une application continue surjective (resp. bijective) $h : Y \rightarrow X$ telle que $f \circ h = h \circ g$.

Le lemme qui suit sert à préparer le théorème sur la classification de Poincaré.

Lemme 4.7. *Soit f un relèvement de T . Supposons $\alpha(f) \notin \mathbb{Q}$.*

Soient $n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$, il y a équivalence entre :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f^{n_1}(x) + m_1 < f^{n_2}(x) + m_2.$
2. $n_1\alpha(f) + m_1 < n_2\alpha(f) + m_2.$
3. $\exists x \in \mathbb{R}, f^{n_1}(x) + m_1 < f^{n_2}(x) + m_2.$

Preuve :

(1) \Rightarrow (2) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f^{n_1-n_2}(x) + m_1 < x + m_2 \iff f^{n_1-n_2}(x) - x < m_2 - m_1.$$

Le lemme 2.6 appliqué à $f^{n_1-n_2}$ et la propriété 2.5 nous donnent :

$$\alpha(f^{n_1-n_2}) = n_1\alpha(f) - n_2\alpha(f) < m_2 - m_1.$$

Ce qui est équivalent à $n_1\alpha(f) + m_1 < n_2\alpha(f) + m_2$, ce qui est l'implication voulue.

(2) \Rightarrow (3) Montrons cette implication par contraposition. L'implication (1) \Rightarrow (2) reste vraie si l'on remplace les inégalités strictes par des inégalités larges et si l'on échange (m_1, n_1) et (m_2, n_2) , ce qui nous donne exactement l'implication recherchée.

(3) \Rightarrow (1) Comme $\alpha(f) \notin \mathbb{Q}$, $T^{n_2-n_1}$ n'a pas de point fixe (théorème 2.7). Donc l'image de $f^{n_2-n_1} - \text{Id}$ est contenue dans un intervalle $]r, r+1[$ avec $r \in \mathbb{Z}$. En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f^{n_2}(x) - f^{n_1}(x) = f^{n_2-n_1}(f^{n_1}(x)) - f^{n_1}(x) \in]r, r+1[$. Or $m_1 - m_2 < f^{n_2}(x) - f^{n_1}(x)$. Comme $m_1 - m_2 \in \mathbb{Z}$, on a $m_1 - m_2 \leq r$.

Et donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{n_2}(x) - f^{n_1}(x) = f^{n_2-n_1}(f^{n_1}(x)) - f^{n_1}(x) > r \geq m_1 - m_2$, ce qui achève la démonstration. \square

Théorème 4.8. *Supposons que $\rho(T) \notin \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, ie supposons que pour tout relèvement f de T , $\alpha(f) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Notons α_T l'unique représentant de $\rho(T)$ dans $[0,1[$. La **classification de Poincaré** distingue deux cas :*

1. *Si T est transitive, alors T est conjuguée à la rotation R_{α_T} .*
2. *Si T n'est pas transitive, T est seulement semi-conjuguée à la rotation R_{α_T} . Plus particulièrement, il existe une application continue surjective h telle que*

$$h \circ T = R_{\alpha_T} \circ h.$$

Preuve :

Soient x un réel fixé et f un relèvement de T . On définit A et B les ensembles suivants :

$$A = \{f^n(x) + m; (n, m) \in \mathbb{Z}^2\} \text{ et } B = \{n\alpha_T + m; (n, m) \in \mathbb{Z}^2\}.$$

Comme B est un sous-groupe de \mathbb{R} qui contient 1 et l'irrationnel α_T , il ne peut donc être de la forme $\lambda\mathbb{Z}$ (avec $\lambda \in \mathbb{R}$), donc il est dense dans \mathbb{R} .

On pose l'application $H : A \rightarrow B$ définie par

$$H(f^n(x) + m) = n\alpha_T + m.$$

D'après le lemme 4.2, H est bien définie (comme α_T est irrationnel), bijective et strictement croissante. De plus, pour tout $z \in A$, il existe $n, m \in \mathbb{Z}$ tels que $z = f^n(x) + m$ et on a alors

$$H(z + 1) = H(f^n(x) + m + 1) = n\alpha_T + m + 1 = H(z) + 1$$

et

$$H(f(z)) = H(f(f^n(x) + m)) = H(f^{n+1}(x) + m) = (n + 1)\alpha_T + m = H(z) + \alpha_T.$$

On définit la fonction $\tilde{H} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en posant pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$\tilde{H}(y) = \sup\{H(z) : z \in A \cap]-\infty, y]\}.$$

On vérifie facilement que pour tout $y \in A$ $H(y) = \tilde{H}(y)$, ainsi \tilde{H} prolonge H . De plus, \tilde{H} est croissante sur \mathbb{R} . En effet, soient $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ tels que $y_1 \leq y_2$. On a l'inclusion $\{H(z) : z \in A \cap]-\infty, y_1]\} \subset \{H(z) : z \in A \cap]-\infty, y_2]\}$ et par passage au sup, $\tilde{H}(y_1) \leq \tilde{H}(y_2)$.

Montrons que \tilde{H} est continue sur \mathbb{R} . Soient $y_0 \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Comme B est dense dans \mathbb{R} , on peut choisir $b_1, b_2 \in B$ tels que $\tilde{H}(y_0) - \varepsilon < b_1 < \tilde{H}(y_0) < b_2 < \tilde{H}(y_0) + \varepsilon$. Notons a_1 et a_2 les antécédents de b_1 et b_2 par H (qui est bijective). Par croissance de \tilde{H} , on a $a_1 < a_2$ et pour tout $y \in [a_1, a_2]$, $|\tilde{H}(y) - \tilde{H}(y_0)| < \varepsilon$. On en déduit que \tilde{H} est continue en y_0 .

De plus, comme \tilde{H} est continue, $\text{Im}(\tilde{H})$ est un intervalle de \mathbb{R} contenant B qui est dense dans \mathbb{R} . Ainsi, $\text{Im}(\tilde{H}) = \mathbb{R}$, et donc \tilde{H} est surjective.

Remarquons que, pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \tilde{H}(y + 1) &= \sup\{n\alpha_T + m : (n, m) \in \mathbb{Z}^2, f^n(x) + m \leq y + 1\} \\ &= \sup\{n\alpha_T + m : (n, m) \in \mathbb{Z}^2, f^n(x) + m - 1 \leq y\} \\ &= \sup\{n\alpha_T + m + 1 : (n, m) \in \mathbb{Z}^2, f^n(x) + m \leq y\} \\ &= \tilde{H}(y) + 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{H}(f(y)) &= \sup\{n\alpha_T + m : (n, m) \in \mathbb{Z}^2, f^n(x) + m \leq f(y)\} \\ &= \sup\{\alpha_T + (n - 1)\alpha_T + m : (n, m) \in \mathbb{Z}^2, f^{n-1}(x) + m \leq y\} \\ &= \alpha_T + \sup\{n\alpha_T + m : (n, m) \in \mathbb{Z}^2, f^n(x) + m \leq y\} \\ &= \alpha_T + \tilde{H}(y). \end{aligned}$$

Ainsi, par passage au quotient \tilde{H} fournit une surjection continue $h : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ telle que

$$h \circ T = R_{\alpha_T} \circ h.$$

Dans le cas où T est transitive, on peut fixer un réel x tel que l'orbite de \bar{x} sous l'action de T soit dense dans \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Pour ce choix du réel x , l'ensemble A précédemment défini est dense dans \mathbb{R} . Pour tous réels $y_1 < y_2$, il existe $z_1 < z_2$ dans A tels que $y_1 < z_1 < z_2 < y_2$. Par croissance stricte de H et par croissance de \tilde{H} , on alors

$$\tilde{H}(y_1) \leq \tilde{H}(z_1) = H(z_1) < H(z_2) = \tilde{H}(z_2) \leq \tilde{H}(y_2).$$

Ainsi, dans ce cas \tilde{H} est strictement croissante donc bijective sur \mathbb{R} . Cela entraîne que h est bijective et donc que T est conjuguée à R_{α_T} . \square

Corollaire 4.9. *Il y a équivalence entre les 3 propriétés suivantes :*

1. *Il existe $x \in \mathbb{T}$ tel que O_x soit dense dans \mathbb{T} (autrement dit, T est transitif).*
2. *T est conjugué à une rotation d'angle irrationnel.*
3. *Pour tout $x \in \mathbb{T}$, l'orbite O_x de x est dense dans \mathbb{T} (autrement dit T est minimal).*

Preuve :

(1) \Rightarrow (2) Cette implication est donnée par la classification de Poincaré (théorème 4.8).

(2) \Rightarrow (3) Si T est conjugué à R_θ , avec $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Alors, il existe h continue bijective telle que $T = h \circ R_\theta \circ h^{-1}$. Soit $x \in \mathbb{T}$. L'orbite de x sous l'action de T est :

$$\begin{aligned} O_x &= \{T^n(x), n \in \mathbb{N}\} \\ &= \{h \circ R_\theta^n \circ h^{-1}(x), n \in \mathbb{Z}\} \\ &= h(\{R_\theta^n(y), n \in \mathbb{Z}\}) \text{ où } y = h^{-1}(x). \end{aligned}$$

Comme $\{R_\theta^n(y), n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans \mathbb{T} d'après l'exemple 4.4, et comme h est continue et surjective, O_x dense dans \mathbb{T} .

(3) \Rightarrow (1) Cette implication est immédiate. \square

5 Ensemble dérivé de T

Dans toute cette partie, on considère $T \in \text{Hom}^+(\mathbb{T})$ tel que $\rho(T) \notin \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Notation 5.1. Soient $x, y \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Notons a, b les représentants dans $[0, 1[$ de x, y . On pose :

$$[x, y] = \begin{cases} \pi([a, b]) & \text{si } a \leq b \\ \pi([a, 1[) \cup \pi([0, b]) & \text{si } a > b. \end{cases}$$

Remarque 5.2. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, avec la notation précédente on a :

$$[x, y] \cup [y, x] = \mathbb{T} \text{ et } [x, y] \cap [y, x] = \{x, y\}.$$

Lemme 5.3. Soient $x, y \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, on a l'égalité $T([x, y]) = [T(x), T(y)]$.

Preuve :

Soit f un relèvement de T . Soient a, b, c, d les représentants dans $[0, 1[$ de $x, y, T(x), T(y)$. Supposons sans perte de généralité que $0 \leq a \leq b < 1$. Alors $f(a)$ et $f(b)$ sont des représentants de $T(x)$ et $T(y)$ et $f(a) \leq f(b) \leq f(a+1) = f(a) + 1$. On a :

$$T([x, y]) = (T \circ \pi)[a, b] = (\pi \circ f)[a, b] = \pi([f(a), f(b)]).$$

1^{er} cas : $f(a)$ et $f(b)$ appartiennent à un même intervalle $[k, k+1[$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Dans ce cas, $c = f(a) - k$ et $d = f(b) - k$. On a alors :

$$[T(x), T(y)] = \pi([c, d]) = \pi([c, d] + k) = \pi([f(a), f(b)]).$$

2nd cas : il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $f(a) < k \leq f(b)$. Dans ce cas, $c = f(a) - k + 1$ et $d = f(b) - k$. Ainsi, $c > d$ et on a alors :

$$\begin{aligned} [T(x), T(y)] &= \pi([c, 1[) \cup \pi([0, d]) \\ &= \pi([c, 1[k-1) \cup \pi([0, d] + k) \\ &= \pi([f(a), k[) \cup \pi([k, f(b)]) \\ &= \pi([f(a), f(b)]) \end{aligned}$$

Dans tous les cas, on a $T([x, y]) = \pi([f(a), f(b)]) = [T(x), T(y)]$, ce qui démontre le lemme. \square

Lemme 5.4. Soient $n, m \in \mathbb{Z}$ avec $n \neq m$. Soit $x_0 \in \mathbb{T}$. Notons $\Delta := [T^n(x_0), T^m(x_0)]$ et $\Delta' := [T^m(x_0), T^n(x_0)]$ les deux arcs de cercle joignant $T^n(x_0)$ et $T^m(x_0)$. Alors, pour tout $k_0 \in \mathbb{N}$, il existe des entiers $k_1 \geq k_0$ et $k'_1 \geq k_0$ tels que

$$\mathbb{T} = \bigcup_{j=k_0}^{k_1} T^{j(m-n)} \Delta = \bigcup_{j=k_0}^{k'_1} T^{j(m-n)} \Delta'.$$

De plus, pour tout $x \in \mathbb{T}$, l'orbite O_x de x rencontre Δ et Δ' une infinité de fois dans le passé comme dans le futur.

Preuve :

Soient f un relèvement de T , $x_0 \in \mathbb{T}$, $k_0 \in \mathbb{N}$ et $n \neq m$ dans \mathbb{Z} . Comme $\rho(T) \notin \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, on a d'après le théorème 2.7 que $T^m(x_0) \neq T^n(x_0)$. Notons a, b les représentants dans $[0, 1[$ de $T^n(x_0)$ et $T^m(x_0)$. Supposons, sans perte de généralité, que $0 \leq a < b < 1$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a par croissance de f :

$$f^{k(m-n)}a < f^{k(m-n)}(b) < f^{k(m-n)}(a+1) = f^{k(m-n)}(a) + 1$$

De plus, on remarque que $T^{m-n}(T^n(x_0)) = T^m(x_0)$, donc $f^{m-n}(a) = b + r$ avec $r \in \mathbb{Z}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons :

$$I_k = [f^{k(m-n)}(a) - kr, f^{k(m-n)}(b) - kr] \text{ et } \Delta_k = \pi(I_k).$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la borne inférieure de I_{k+1} est la borne supérieure de I_k . En effet :

$$f^{(k+1)(m-n)}(a) - (k+1)r = f^{k(m-n)}(b+r) - (k+1)r = f^{k(m-n)}(b) - kr.$$

Ainsi, les $(I_k)_{k \geq 0}$ sont adjacents les uns aux autres. De plus,

$$\begin{aligned} \Delta_k &= \pi(I_k) \\ &= \pi([f^{k(m-n)}(a - kr), f^{k(m-n)}(b - kr)]) \\ &= \pi(f^{k(m-n)}[a - kr, b - kr]) \\ &= T^{k(m-n)}(\pi([a - kr, b - kr])) \\ &= T^{k(m-n)}(\pi[a, b]) \\ &= T^{k(m-n)}[T^n(x_0), T^m(x_0)] \\ &= [T^{k(m-n)}(T^n(x_0)), T^{k(m-n)}(T^m(x_0))] \text{ d'après le lemme 5.3.} \end{aligned}$$

Montrons qu'il existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{T} = \bigcup_{j=k_0}^{k_1} \Delta_j$. Pour tout $k \geq k_0$,

$$\bigcup_{j=k_0}^k \Delta_j = \bigcup_{j=k_0}^k \pi(I_j) = \pi\left(\bigcup_{j=k_0}^k I_j\right) = \pi([f^{k_0(m-n)}(a) - k_0r, f^{k(m-n)}(b) - kr])$$

Or :

$$\frac{f^{k(m-n)}(b) - b - kr}{k} = \frac{f^{k(m-n)}(b) - b}{k} - r \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \alpha(f^{m-n}) - r.$$

Comme $f^{m-n}(a) - a = b - a + r \in]r, r+1[$ et que $\alpha(f^{m-n}) \notin \mathbb{Z}$, l'image de $f^{m-n} - \text{Id}_{\mathbb{R}}$ ne contient pas d'entier donc reste incluse dans $]r, r+1[$ (théorème 2.7). D'après le corollaire 2.9, on a $\alpha(f^{m-n}) \in]r, r+1[$ et donc $\alpha(f^{m-n}) - r \in]0, 1[$.

On en déduit que la suite $(f^{k(m-n)}(b) - kr)_{k \geq 0}$ tend vers $+\infty$. Ainsi, il existe un rang $k_1 \geq k_0$ tel que pour tout $k \geq k_1$,

$$f^{k(m-n)}(b) - kr \geq f^{k_0(m-n)}(a) - k_0r + 1 \text{ d'où } \mathbb{T} = \bigcup_{j=k_0}^k \Delta_j.$$

On montre le résultat sur Δ' de façon similaire.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{T}$ et pour tout $k_0 \in \mathbb{N}$, il existe $j_1 \geq k_0$ et $j'_1 \geq k_0$ tels que $x \in T^{j_1(m-n)}\Delta$ et $x \in T^{j'_1(m-n)}\Delta'$. On a donc $T^{-j_1(m-n)}(x) \in \Delta$ et $T^{-j'_1(m-n)}(x) \in \Delta'$, c'est-à-dire $O_x \cap \Delta \neq \emptyset$, $O_x \cap \Delta' \neq \emptyset$ ce qui prouve le lemme. \square

Théorème 5.5. Soit $x \in \mathbb{T}$. Notons L_x l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(T^n(x))_{n \geq 0}$. L'ensemble L_x possède les trois propriétés suivantes :

1. Il est invariant par T et T^{-1} .
2. Il ne dépend pas de x .
3. Il vaut soit \mathbb{T} tout entier, soit un fermé de \mathbb{T} d'intérieur non vide sans point isolé.

Preuve :

1) Cette propriété est immédiate.

2) Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{T}$. Montrons que $L_{x_1} = L_{x_2}$. Soit $x \in L_{x_1}$. Il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $T^{\varphi(k)}(x_1) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x$.

D'après le lemme 5.4, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe des entiers naturels n arbitrairement grands tels que $T^n(x_2)$ appartienne à l'arc de cercle le plus court joignant $T^{\varphi(k)}(x_1)$ et $T^{\varphi(k+1)}(x_1)$. On peut donc construire une suite strictement croissante $(n_k)_{k \geq 0}$ d'entiers naturels telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $T^{n_k}(x_2)$ appartienne à l'arc de cercle le plus court joignant $T^{\varphi(k)}(x_1)$ et $T^{\varphi(k+1)}(x_1)$. On a alors $T^{n_k}(x_2) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x$. Donc $x \in L_{x_2}$, ce qui montre $L_{x_1} \subset L_{x_2}$.

Par symétrie $L_{x_2} \subset L_{x_1}$, d'où l'égalité ensembliste.

3) Soit $x \in \mathbb{T}$ et $y \in L_x$. Par définition de L_x , on a une suite strictement croissante $(n_k)_{k \geq 0}$ d'entiers naturels telle que $y = \lim_{k \rightarrow \infty} T^{n_k}(x)$. Par le point 1, L_x est invariant par T , et donc pour tout $k \geq 0$, $T^{n_k}(x) \in L_x$. De plus, pour tout $k \neq 0$, $n_k > 1$ et donc $T^{n_k}(x) \neq x$. Donc y est un point adhérent à $L_x \setminus \{x\}$, i.e. y n'est pas un point isolé. Ainsi, L_x ne possède pas de point isolé.

Supposons que L_x ne soit pas d'intérieur vide. Alors L_x contient une boule $B_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}(y, r)$, avec $y \in L_x$ et $r \in]0, 1/4[$. Comme y est une valeur d'adhérence de la suite $(T^k(x))_{k \geq 0}$, on peut trouver deux entiers naturels $n \neq m$ tels que $T^n(x)$ et $T^m(x)$ soient dans $B_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}(y, r)$. Soit Γ l'arc de cercle le plus court contenant $T^n(x)$ et $T^m(x)$ (cela peut être Δ ou Δ' définis dans le lemme 5.4). Ainsi,

$$\Gamma \subset B_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}(y, r) \subset L_x.$$

D'après le lemme 5.4 (appliqué pour $k_0 = 0$), il existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\mathbb{T} = \bigcup_{j=0}^{k_1} T^{j(m-n)} \Gamma \subset \bigcup_{j=0}^{k_1} T^{j(m-n)} L_x = L_x,$$

la dernière égalité provenant du fait que L_x est invariant par T . Ainsi, $L_x = \mathbb{T}$ tout entier si L_x n'est pas d'intérieur vide, ce qui achève la preuve. \square

Le théorème 5.5 motive et justifie la définition suivante :

Définition 5.6. L'ensemble fermé L_T des valeurs d'adhérence de la suite $(T^n(x))_{n \geq 0}$, qui ne dépend pas de $x \in \mathbb{T}$, est appelé l'ensemble dérivé de T .

Le point 3 du théorème 5.5 montre que l'ensemble dérivé est soit \mathbb{T} tout entier, soit un fermé d'intérieur non vide sans point isolé. Ce deuxième cas se produit effectivement :

Arnaud Denjoy a construit l'exemple d'un homéomorphisme dont l'ensemble dérivé ne vaut pas \mathbb{T} tout entier. C'est l'objet du théorème suivant, dont on admettra le résultat.

Théorème 5.7. Exemple de Denjoy

Soit α un irrationnel fixé. Tout ensemble L fermé d'intérieur non vide sans point isolé peut être vu comme ensemble dérivé d'un homéomorphisme de nombre de rotation α .

Enfin, le cas où l'ensemble dérivé vaut \mathbb{T} tout entier est plus simple et donne lieu à la proposition suivante.

Proposition 5.8. *On a les équivalences suivantes :*

1. $L_T = \mathbb{T}$.
2. T est minimal.
3. T est transitif.

Preuve :

D'après le théorème 5.5, pour tout $x \in \mathbb{T}$, l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(T^n(x))_{n \geq 0}$ est égal à l'ensemble dérivé L_T . Ainsi, on a :

$$L_T = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\{T^n(x); n \geq N\}} \subset \overline{O_x}.$$

(1) \Rightarrow (2) Si $L_T = \mathbb{T}$, alors pour tout $x \in \mathbb{T}$, l'orbite O_x est dense dans \mathbb{T} , donc T est minimal.

(2) \Rightarrow (3) Si T est minimal, alors T est transitif par définition.

(3) \Rightarrow (1) Si T est transitif, alors il existe $x \in \mathbb{T}$ tel que l'orbite O_x est dense dans \mathbb{T} . Par définition, l'ensemble L_T contient tout point de $\overline{\{T^n(x); n \geq 0\}}$ qui n'est pas dans $\{T^n(x); n \geq 0\}$, c'est-à-dire :

$$\overline{O_x} \setminus \{T^n(x); n \geq 0\} \subset L_T.$$

Comme $\{T^n(x); n \geq 0\}$ est dénombrable, l'ensemble $\overline{O_x} \setminus \{T^n(x); n \geq 0\}$ est dense dans \mathbb{T} . Et comme L_T est fermé, avec l'inclusion précédente, on conclut que $L_T = \mathbb{T}$. \square

Remarque 5.9. *On a redémontré l'équivalence vue au corollaire 4.9 entre transitif et minimal dans le cas des homéomorphismes préservant l'orientation.*

6 Ouverture : brève étude du cas des homéomorphismes renversant l'orientation

Nous nous sommes intéressés jusqu'ici uniquement aux homéomorphismes préservant l'orientation. Il est alors naturel de se demander si les homéomorphismes renversant l'orientation possèdent des propriétés remarquables.

Proposition 6.1. *Soit $T \in \text{Hom}^-(\mathbb{T})$ un homéomorphisme renversant l'orientation. Alors T possède **exactement deux points fixes**.*

Preuve : Soit $f \in \mathcal{E}^-$ un relèvement de T . Notons $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = f(x) - x$. La fonction g est continue et strictement décroissante car f et $-\text{Id}_{\mathbb{R}}$ le sont. Donc g est un homéomorphisme décroissant de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Comme $g(1) = f(1) - 1 = f(0) - 2$, les seuls éléments de $g^{-1}(\mathbb{Z})$ dans $[0, 1[$ sont $x_1 := g^{-1}(\lfloor g(0) \rfloor)$ et $x_2 := g^{-1}(\lfloor g(0) \rfloor)$. Ainsi, les seuls points fixes de T sont \bar{x}_1 et \bar{x}_2 . \square

Corollaire 6.2. *Soit $T \in \text{Hom}^-(\mathbb{T})$. Alors :*

1. $T^2 \in \text{Hom}^+(\mathbb{T})$ et $\rho(T^2) = \bar{0}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{T}$, les suites $(T^{2n}(x))_{n \geq 0}$, $(T^{2n+1}(x))_{n \geq 0}$, $(T^{-2n}(x))_{n \geq 0}$ et $(T^{-2n-1}(x))_{n \geq 0}$ convergent vers des points fixes de T^2 . Par conséquent, l'adhérence de l'orbite de x est dénombrable.

Références

- [1] I.P. Cornfeld, S.V. Fomin et Ya.G. Sinai, *Ergodic theory*, Springer-Verlag, 1982.
- [2] M. Brin, G. Stuck, *Introduction to Dynamical Systems*, Cambridge, Cambridge University Press, 2002.