

UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES
UFR IM²AG
MASTER 1 MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

TRAVAIL D'ÉTUDE ET DE RECHERCHE

COURANTS ALÉATOIRES ET
CONTINUITÉ DE L'AIMANTATION
SPONTANÉE DU MODÈLE D'ISING

MUAAD TAMTAM

ENCADRÉ PAR VINCENT BEFFARA

MAI 2023

Table des matières

1	Introduction	2
2	Définitions et quelques propriétés de base	3
2.1	Le modèle d'Ising	3
2.1.1	Interactions du modèle	3
2.1.2	Mesure de Gibbs en volume fini	4
2.2	Mesure de Gibbs en volume infini	5
2.3	Aimantation et transition de phase	7
2.4	Inégalités de corrélations	7
2.4.1	Les inégalités FKG	8
3	Représentations graphiques	8
3.1	Représentation à haute température	9
3.2	Représentation en courants aléatoires	12
3.2.1	Switching Lemma	14
4	Courants aléatoires en volume infini	16
5	Percolation de courants aléatoires	20
5.1	Propriétés de percolation de la somme de courants aléatoires	20
5.1.1	Unicité du cluster infini	20
5.2	Une borne sur la probabilité de percolation	24
6	Continuité de l'aimantation spontanée	25
6.1	Continuité et ordre à longue distance	25
6.1.1	La borne infrarouge et l'ordre à longue distance au paramètre critique	28
	Références	29

1 Introduction

Considérons un échantillon d'un matériau et admettons que chacun de ses atomes porte un moment magnétique appelé son spin. Nous supposons que chaque spin a tendance à s'aligner avec ses voisins et avec un champ magnétique externe.

Si le champ magnétique pointe dans une direction fixe, les spins sont globalement ordonnés, c'est-à-dire qu'ils pointent tous à peu près dans la même direction. Si l'on diminue ensuite graduellement l'intensité du champ externe jusqu'à zéro, deux comportements sont possibles.

- **Comportement paramagnétique.**

L'ordre global est progressivement perdu au fur et à mesure que le champ diminue et, lorsque celui-ci atteint zéro, l'ordre global des spins est perdu. Ce comportement est appelé le *paramagnétisme*.

- **Comportement ferromagnétique.**

Lorsque le champ externe diminue, l'ordre global diminue, mais les interactions locales entre les spins sont suffisamment fortes pour que le matériau conserve un état globalement aimanté même après la disparition du champ externe. Un tel comportement est appelé le *ferromagnétisme*. Un ferro-aimant présente donc une aimantation spontanée, c'est-à-dire un ordre global des spins même en l'absence d'un champ magnétique externe.

On peut observer qu'un même matériau peut présenter les deux types de comportement, en fonction de la température. Son comportement peut brusquement passer de ferromagnétique à paramagnétique.

Le modèle d'Ising a été introduit par Wilhelm Lenz en 1920, en vue d'obtenir une compréhension de la transition de phase du ferromagnétisme au paramagnétisme décrite ci-dessus.

Une grande question dans l'étude du modèle d'Ising fût celle de la continuité de la transition de phase. En dimension $d = 2$ la question a été traitée par Yang en 1952 [Yan52]. Ensuite pour $d \geq 4$ en 1986 par Aizenman et Fernández [AF86]. Pendant longtemps la question de la continuité en dimension 3 est restée non résolue, et ce, jusqu'en 2015, l'année où Aizenman, Duminil-Copin et Sidoravicius ont présenté une démonstration de la continuité pour tout $d \geq 2$ [ADS15]. Leur preuve repose sur une *représentation graphique* du modèle d'Ising en *courants aléatoires*.

Dans la première partie de ce mémoire, nous allons définir le modèle d'Ising et donner quelques résultats classiques. Ensuite nous introduisons deux représentations graphiques du modèle dont celle en courants aléatoires. Enfin nous établirons quelques outils en vue de donner la preuve de la continuité de la transition de phase présentée dans [ADS15].

2 Définitions et quelques propriétés de base

Dans cette section, nous définissons le modèle d'Ising et présentons quelques propriétés indispensables pour la suite. Étant donné que ces résultats ne constituent pas le point principal de ce mémoire, nous ne donnons pas de preuves dans cette partie. On pourra par exemple consulter [FV17] pour ces dernières.

2.1 Le modèle d'Ising

On fixe $d \in \mathbb{N}^*$ et on note $\Omega := \{-1, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ l'espace des configurations. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note $\Lambda_n = \{-n, \dots, n\}^d \subset \mathbb{Z}^d$ la boîte de taille n et $\Omega_{\Lambda_n} = \{-1, 1\}^{\Lambda_n}$. Une configuration $\omega \in \Omega_{\Lambda_n}$ est donc de la forme $\omega = (\omega_i)_{i \in \Lambda_n}$. Le spin au sommet $i \in \Lambda_n$ est la variable aléatoire $\sigma_i : \Omega_{\Lambda_n} \rightarrow \{-1, 1\}$ définie par $\sigma_i(\omega) = \omega_i$.

On peut définir des configurations avec une *condition au bord*, i.e., les valeurs des spins sont fixées en dehors d'une partie finie Λ . Pour $\eta \in \{-1, 0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$, on définit $\Omega_{\Lambda_n}^\eta = \{\omega \in \{-1, 0, 1\}^{\mathbb{Z}^d} \mid \omega|_\Lambda \in \Omega_\Lambda, \omega_i = \eta_i, \forall i \notin \Lambda_n\}$ l'ensemble des configurations dans Λ_n avec *condition au bord* η . Trois conditions au bord sont particulièrement intéressantes :

- La condition au bord (+), d'espace des configurations $\Omega_{\Lambda_n}^+ := \{\omega \in \Omega \mid \omega_i = 1, \forall i \notin \Lambda_n\}$.
- La condition au bord (-), d'espace des configurations $\Omega_{\Lambda_n}^- := \{\omega \in \Omega \mid \omega_i = -1, \forall i \notin \Lambda_n\}$.
- La condition au bord libre (\emptyset), d'espace des configurations $\Omega_{\Lambda_n}^\emptyset := \{\omega \in \Omega \mid \omega_i = 0, \forall i \notin \Lambda_n\}$.

2.1.1 Interactions du modèle

Les interactions des spins sont régies par une famille de réels $(J_{x,y})_{x,y \in \mathbb{Z}^d}$ appelés *constantes de couplage*. On suppose que ces interactions sont :

C1 invariantes par translations : $J_{x,y} = J_{0,y-x}$,

C2 ferromagnétiques : $J_{x,y} \geq 0$,

C3 localement finies : $\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} J_{0,x} < \infty$,

C4 apériodiques : pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, il existe $0 = x_0, x_1, \dots, x_{m-1}, x_m = x$ tels que $J_{x_0, x_1}, J_{x_1, x_2}, \dots, J_{x_{m-1}, x_m} > 0$.

Un type particulier d'interactions nous intéressera au début, celui du modèle *plus-proches-voisins*. Les interactions dans ce modèle sont définies par $J_{x,y} = \delta_1(\|x - y\|_1)$ pour tous $x, y \in \mathbb{Z}^d$.

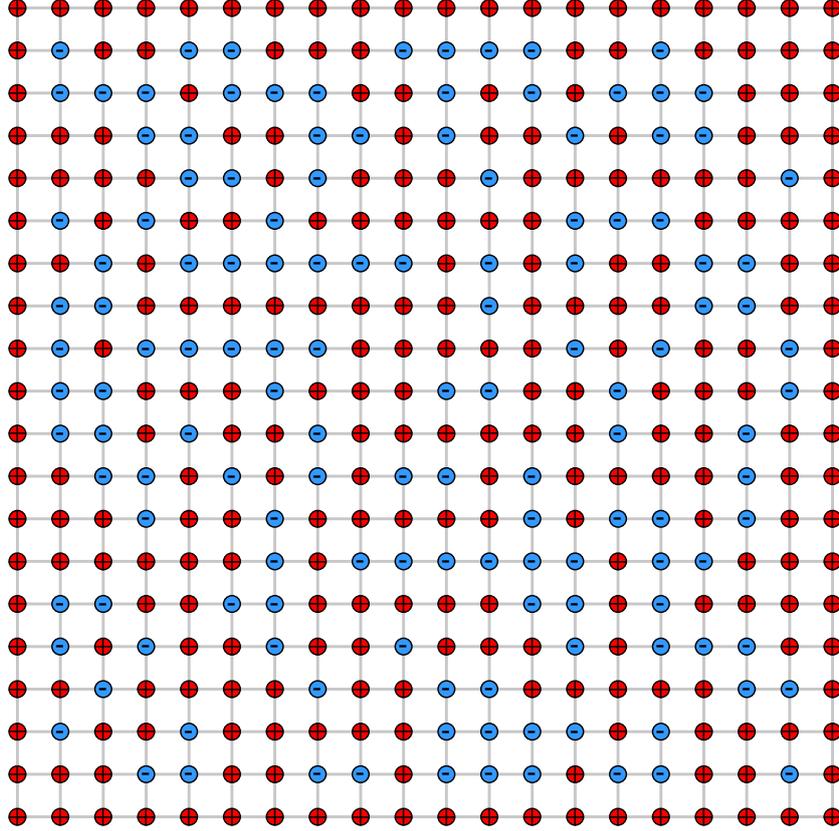


FIGURE 1 – Exemple de configuration avec condition au bord (+)

2.1.2 Mesure de Gibbs en volume fini

À une configuration $\omega \in \Omega_{\Lambda_n}^\eta$ on associe son énergie. Celle-ci dépend de la *température inverse* $\beta \in \mathbb{R}_+$ et du champ magnétique externe $h \in \mathbb{R}$. Elle est donnée par l'Hamiltonien

$$\mathcal{H}_{\Lambda_n; \beta, h}^\eta(\omega) := \beta \left(- \sum_{\substack{\{x, y\} \subset \Lambda_n: \\ x \neq y}} J_{x, y} \sigma_x(\omega) \sigma_y(\omega) - \sum_{\substack{x \in \Lambda_n \\ y \in \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda_n}} J_{x, y} \sigma_x(\omega) \eta_y - h \sum_{x \in \Lambda_n} \sigma_x(\omega) \right) \quad (2.1)$$

On munit $\Omega_{\Lambda_n}^\eta$ de la *mesure de Gibbs* donnée par

$$\mu_{\Lambda_n; \beta, h}^\eta(\omega) := \frac{1}{\mathbf{Z}_{\Lambda_n; \beta, h}^\eta} e^{-\mathcal{H}_{\Lambda_n; \beta, h}^\eta(\omega)}$$

où $\mathbf{Z}_{\Lambda_n; \beta, h}^\eta := \sum_{\omega \in \Omega_{\Lambda_n}^\eta} e^{-\mathcal{H}_{\Lambda_n; \beta, h}^\eta(\omega)} \in \mathbb{R}^*$ est une constante de normalisation appelée *fonction de partition*.

Pour une fonction f , on note $\langle f \rangle_\mu$ son espérance sous la mesure de probabilité μ . Lorsque la mesure est identifiée par des indices, nous appliquons les mêmes indices aux

crochets. Par exemple l'espérance de f sous $\mu_{\Lambda_n; \beta, h}^\eta$ sera notée $\langle f \rangle_{\Lambda_n; \beta, h}^\eta$. Lorsque $h = 0$ il sera parfois omis de la notation.

Si l'on considère le modèle plus-proches-voisins, en notant

$$\mathcal{E}_{\Lambda_n}^b := \left\{ \{i, j\} \subset \mathbb{Z}^d \mid \{i, j\} \cap \Lambda_n \neq \emptyset, \|i - j\|_1 = 1 \right\}$$

l'ensemble des arêtes des sommets voisins dans Λ_n y compris celles au bord. L'Hamiltonien se réécrit

$$\mathcal{H}_{\Lambda_n; \beta, h}^\eta(\omega) = -\beta \sum_{\{i, j\} \in \mathcal{E}_{\Lambda_n}^b} \sigma_i(\omega) \sigma_j(\omega) - h\beta \sum_{i \in \Lambda_n} \sigma_i(\omega).$$

2.2 Mesure de Gibbs en volume infini

Jusqu'à maintenant nous n'avons construit l'espace probabilisé des configurations uniquement sur des parties finies de \mathbb{Z}^d . Nous verrons ici comment on peut étendre cela sur tout Ω .

Remarque 2.1. La construction et l'étude de telles mesures est une question délicate et la théorie des mesures de Gibbs en volume infini est vaste. Nous ne présentons ici que des éléments basiques de cette notion. On pourra se référer à [FV17] pour plus de détails, notamment sur le formalisme DLR (Dobrushin-Lanford-Ruelle).

Définition 2.2. Une fonction $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *locale* s'il existe une partie finie $\Delta \subset \mathbb{Z}^d$ telle que pour tout $\omega, \omega' \in \Omega$ $f(\omega) = f(\omega')$ dès que ω et ω' coïncident sur Δ .

En d'autres termes, une fonction est locale si elle ne dépend que d'un nombre fini de spins.

Notons \mathcal{F} la tribu cylindrique engendrée par les cylindres $\mathcal{C}_{\gamma, \Lambda} := \{\omega \in \Omega \mid \omega|_\Lambda = \gamma\}$, $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ fini, $\gamma \in \Omega_\Lambda$.

Définition 2.3. Soit $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de conditions au bord. On dit qu'une suite de mesures de Gibbs $(\mu_{\Lambda_n; \beta, h}^{\eta_n})_{\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d}$ sur $\Omega_{\Lambda_n}^{\eta_n}$ converge vers la mesure μ sur (Ω, \mathcal{F}) si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f \rangle_{\Lambda_n; \beta, h}^{\eta_n} = \langle f \rangle_\mu,$$

pour toute fonction locale f . On appelle μ une mesure de Gibbs en volume infini et $\langle \cdot \rangle_\mu$ un état de Gibbs (en (β, h)).

Remarque 2.4. Si l'on a que $\langle f \rangle_{\mu_n}$ converge vers une certaine valeur $l(f)$ pour toute fonction locale f , l'existence et l'unicité d'une mesure μ sur (Ω, \mathcal{F}) telle que $l(f) = \langle f \rangle_\mu$ sont données par le théorème de représentation de Riesz-Markov.

Remarque 2.5. Il n'y a pas nécessairement unicité de la mesure limite associé au couple (β, h) . Néanmoins, puisque Ω est compact pour la topologie produit, la mesure μ est un point d'accumulation de la suite $(\mu_{\Lambda_n; \beta, h}^{\eta_n})$ et l'existence d'au moins un point d'accumulation est donnée par compacité de l'espace des mesures de probabilité sur (Ω, \mathcal{F}) .

Puisque les états de Gibbs sont définis sur tout \mathbb{Z}^d , il est naturel d'en distinguer ceux qui sont invariants par translation. On appelle *translation* par $x \in \mathbb{Z}^d$ l'application $\tau_x : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{Z}^d$ définie par $\tau_x(i) = i + x$.

Le groupe des translations $(\tau_x)_{x \in \mathbb{Z}^d}$ agit naturellement sur les configurations de la façon suivante : pour tout $\omega \in \Omega$, on définit $\tau_x \omega$ par

$$(\tau_x \omega)_i := \omega_{i-x}, \text{ pour tout } i \in \mathbb{Z}^d.$$

Définition 2.6. Une mesure μ sur (Ω, \mathcal{F}) est *invariante par translation* si $\langle f \circ \tau_x \rangle_\mu = \langle f \rangle_\mu$ pour toute fonction locale f et tout $x \in \mathbb{Z}^d$. Un évènement $A \in \mathcal{F}$ est invariant par translation si $\tau_x A = A$ pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$.

Le théorème suivant montre que les conditions au bord (+), (−) et (\emptyset) peuvent être utilisées pour construire deux mesures de Gibbs en volume infini.

Théorème 2.7. Soit $h \in \mathbb{R}$ et $\beta \geq 0$. Pour toute suite $(\Lambda'_n)_{n \in \mathbb{N}} \uparrow \mathbb{Z}^d$, les mesures de Gibbs en volume fini avec conditions au bord (+), (−) et (\emptyset) convergent vers les états de Gibbs :

$$\begin{aligned} \langle \cdot \rangle_{\beta, h}^+ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \cdot \rangle_{\Lambda'_n; \beta, h}^+, \\ \langle \cdot \rangle_{\beta, h}^- &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \cdot \rangle_{\Lambda'_n; \beta, h}^- \text{ et} \\ \langle \cdot \rangle_{\beta, h}^\emptyset &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \cdot \rangle_{\Lambda'_n; \beta, h}^\emptyset. \end{aligned}$$

De plus, les états $\langle \cdot \rangle_{\beta, h}^+$, $\langle \cdot \rangle_{\beta, h}^-$ et $\langle \cdot \rangle_{\beta, h}^\emptyset$ ne dépendent pas de la suite $(\Lambda'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et sont invariants sous l'action du groupe des translations $(\tau_x)_{x \in \mathbb{Z}^d}$.

Remarque 2.8. Ce théorème n'affirme pas que les états de Gibbs $\langle \cdot \rangle_{\beta, h}^+$ et $\langle \cdot \rangle_{\beta, h}^-$ sont distincts. Les valeurs β et h pour lesquels ces états sont distincts est une question que l'on abordera par la suite.

Définition 2.9. Une mesure μ sur (Ω, \mathcal{F}) est ergodique (par rapport au groupe des translations) si pour tout évènement A invariant par translation $\mu(A) = 0$ ou 1.

Théorème 2.10. 1. L'état de Gibbs $\langle \cdot \rangle_\beta^+$ est ergodique et mélangeant, dans le sens où pour toutes fonctions locales $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ la limite suivante existe et satisfait

$$\lim_{\|x\|_1 \rightarrow \infty} \langle f \cdot (g \circ \tau_x) \rangle_\beta^+ = \langle f \rangle_\beta^+ \langle g \rangle_\beta^+. \quad (2.2)$$

2. L'état de Gibbs $\langle \cdot \rangle_\beta^\emptyset$ est ergodique et mélangeant pour les évènements pairs, i.e., satisfait l'analogie de (2.2) pour f et g telles que $f(-\omega) = f(\omega)$ et $g(-\omega) = g(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$.

2.3 Aimantation et transition de phase

Dans cette section, nous donnons une définition mathématique de la notion de transition de phase du modèle, brièvement abordée dans l'introduction. Nous donnons aussi un critère d'existence de cette dernière. Enfin nous présentons la notion d'aimantation spontanée du modèle ainsi que celle de température critique. La continuité de l'aimantation spontanée étant la question centrale dans [ADS15]

Définition 2.11. Soit $\beta \geq 0$ et $h \in \mathbb{R}$. On dit qu'une *transition de phase* a lieu en (β, h) si au moins deux états de Gibbs distincts peuvent être construits pour (β, h) .

Le théorème suivant souligne l'importance des états $\langle \cdot \rangle_{\beta, h}^+$ et $\langle \cdot \rangle_{\beta, h}^-$. En effet, pour établir l'unicité des états de Gibbs il suffira de comparer ces deux états uniquement.

Théorème 2.12. Soit $\beta \geq 0$ et $h \in \mathbb{R}$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. Il existe un unique état de Gibbs en (β, h) .
2. $\langle \cdot \rangle_{\beta, h}^+ = \langle \cdot \rangle_{\beta, h}^-$.
3. $\langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^+ = \langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^-$.

Définition 2.13. Soit $\beta \geq 0$. L'aimantation spontanée en β est la quantité

$$m^*(\beta) := \langle \sigma_0 \rangle_{\beta}^+.$$

On a que $\langle \sigma_0 \rangle_{\beta}^+ = -\langle \sigma_0 \rangle_{\beta}^-$ et donc $\langle \sigma_0 \rangle_{\beta}^+ \neq \langle \sigma_0 \rangle_{\beta}^-$ si et seulement si $\langle \sigma_0 \rangle_{\beta}^+ > 0$. De plus, on peut montrer que $\beta \rightarrow \langle \sigma_0 \rangle_{\beta}^+$ est croissante, d'où la définition suivante :

Définition 2.14. La *température critique inverse* $\beta_c(d) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ est définie par

$$\beta_c(d) := \inf\{\beta \geq 0 \mid m^*(\beta) > 0\} = \sup\{\beta \geq 0 \mid m^*(\beta) = 0\}.$$

Ainsi, une transition de phase a lieu lorsque $\beta > \beta_c(d)$, mais pas lorsque $\beta < \beta_c(d)$. Il reste à déterminer si $\beta_c(d)$ est non triviale, i.e., si $0 < \beta_c(d) < \infty$. Le fait que $\beta_c(d) > 0$ sera examiné dans la partie 3.1. L'aimantation spontanée au paramètre critique $m^*(\beta_c(d))$ est la question centrale de ce mémoire et fait l'objet du Théorème 6.1. Le problème de la continuité de l'aimantation spontanée est de déterminer si $m^*(\beta_c(d)) = 0$?

Un objet qui sera utile dans l'étude de la continuité de l'aimantation spontanée est le paramètre de l'ordre à longue distance $\widetilde{M}_{LRO}(\beta)$ défini par :

$$\widetilde{M}_{LRO}(\beta) := \inf_{B \subset \mathbb{Z}^d, B \text{ finie}} \frac{1}{|B|^2} \sum_{x, y \in B} \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\beta}^{\emptyset}, \quad \text{pour tout } \beta \geq 0. \quad (2.3)$$

2.4 Inégalités de corrélations

Dans cette section, nous introduisons un des outils majeurs dans l'analyse du modèle d'Ising : les inégalités de corrélation. Il existe plusieurs inégalités de corrélation pour le modèle d'Ising, les plus notables sont celles de GKS et FKG. Ces dernières sont utilisées par exemple dans la construction des états $\langle \cdot \rangle_{\beta, h}^+$ et $\langle \cdot \rangle_{\beta, h}^-$. Ici nous présentons uniquement les inégalités FKG qui seront utiles dans la preuve du Théorème 6.1.

2.4.1 Les inégalités FKG

Les inégalités FKG, d'après Fortuin, Kasteleyn et Ginibre [FKG71], affirment que les fonctions croissantes sont positivement corrélées.

L'ordre total sur l'ensemble $\{-1, 1\}$ induit un ordre partiel sur Ω : Pour $\omega, \omega' \in \Omega$, $\omega \geq \omega'$ si et seulement si $\omega_x \geq \omega'_x$ pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$.

Définition 2.15. Soit $E \in \mathcal{F}$. L'évènement E est *croissant* si pour tout $\omega \in E$ et $\omega' \in \Omega$, $\omega \geq \omega'$ implique que $\omega' \in E$. Une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est *croissante* si pour tous $\omega, \omega' \in \Omega$, $\omega \geq \omega'$ implique que $f(\omega) \geq f(\omega')$.

On arrive donc au théorème de cette section.

Théorème 2.16 (Inégalités FKG [FKG71]). *Soit $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ fini et η une condition au bord. Alors, pour tous $\beta \geq 0$ et $h \in \mathbb{R}$ et pour toute paire de fonctions croissantes f et g ,*

$$\langle fg \rangle_{\Lambda; \beta, h}^\eta \geq \langle f \rangle_{\Lambda; \beta, h}^\eta \langle g \rangle_{\Lambda; \beta, h}^\eta \quad (2.4)$$

Remarque 2.17. En appliquant ce théorème à des fonctions indicatrices d'évènements croissants, on obtient le fait que les évènements croissants sont positivement corrélés.

3 Représentations graphiques

Nous présentons ici le principe de *représentations graphiques* qui ont joué et contiennent de jouer, un rôle central dans l'analyse des propriétés mathématiques du modèle d'Ising. Ensuite nous établirons deux exemples de représentations graphiques dont celle en courants aléatoires. Cette dernière sera l'outil central dans la suite de ce mémoire. On pourra consulter [Dum16] pour plus d'exemples de représentations graphiques.

À des fins de simplification, dans cette section, nous nous plaçons dans le cas du modèle plus-proches-voisins. Nous reviendrons au modèle plus général dans la section 4.

Soit $G = (V(G), E(G))$ un graphe où $V(G) \subset \mathbb{Z}^d$ et $E(G) \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{Z}^d)$ avec $\mathcal{P}_2(\mathbb{Z}^d) := \{\{x, y\} \mid x, y \in \mathbb{Z}^d\}$.

Définition 3.1. Une *configuration de percolation* $\omega = (\omega_e)_{e \in E(G)}$ est un élément de $\{0, 1\}^{E(G)}$. Si $\omega_e = 1$, on dit que l'arête e est ouverte, sinon on dit que e est fermée.

Une configuration ω peut être vue comme un sous-graphe de G avec les mêmes sommets $V(G)$ que G et où l'ensemble d'arêtes est $\{e \in E(G) \mid \omega_e = 1\}$.

Définition 3.2. Un *modèle de percolation* est la donnée d'une famille de mesures de probabilité des configurations sur les sous-graphes finis de \mathbb{Z}^d .

On s'intéresse en général aux propriétés de connexité du graphe aléatoire ω . Avant de faire le lien avec le modèle d'Ising, introduisons quelques notations et mots de vocabulaire. On appelle les composantes connexes de ω des *clusters*. On dit que deux sommets x et y sont liés dans ω dans $S \subset \mathbb{Z}^d$ s'il existe des sommets $(v_k)_{0 \leq k \leq M}$ dans S tels que $v_0 = x$, $v_M = y$ et $\{v_k, v_{k+1}\}$ est ouverte dans ω pour tout $0 \leq k < M$. Cet évènement sera noté $x \xrightarrow[S]{} y$. Lorsque $S = G$, S sera omis de la notation ou remplacé par ω .

Pour $A, B \subset \mathbb{Z}^d$ on note $A \xrightarrow{S} B$ s'il existe un sommet de A qui est lié dans S à un sommet de B . On se permet de considérer $B = \infty$, dans ce cas cela veut dire qu'il existe un sommet de A dont la composante connexe est infinie.

Supposons que l'on ait un modèle de percolation (\mathbb{P}_G) tel que pour tout $G \subset \mathbb{Z}^d$ fini et tous $x, y \in G$,

$$\langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{G; \beta}^\eta = \mathbb{P}_G \left(x \xrightarrow{\quad} y \right).$$

Dans quel cas, on dit que la mesure de percolation est une *représentation graphique* du modèle d'Ising. Les corrélations entre spins sont traduites en termes de propriétés de connexité du modèle de percolation. Notons qu'il existe plusieurs représentations graphiques. Chaque représentation est peut-être plus ou moins pertinente à utiliser selon le problème considéré. Par exemple, la *représentation à basse température*, que nous ne présentons pas ici, est adaptée pour montrer que $\beta_c(d) < \infty$.

3.1 Représentation à haute température

Le but de cette section est de montrer que $\beta_c(d) > 0$. Pour ce faire, nous introduisons la représentation à haute température [Wae41] des fonctions de corrélations. À partir de cette dernière, nous montrons que pour β suffisamment petit, $\langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda_n; \beta, 0}^+$ décroît exponentiellement quand n tend vers l'infini.

On a que pour tout $i, j \in \Lambda_n$ et $\omega \in \Omega_\Lambda^+$, $\sigma_i(\omega)\sigma_j(\omega) \in \{-1, 1\}$. Ainsi, par parité

$$e^{\beta \sigma_i \sigma_j} = \cosh(\beta) + \sigma_i \sigma_j \sinh(\beta) = \cosh(\beta)(1 + \tanh(\beta)\sigma_i \sigma_j).$$

On obtient que

$$\begin{aligned} \exp\left(-\mathcal{H}_{\Lambda_n; \beta, 0}(\omega)\right) &= \exp\left(\beta \sum_{\{i, j\} \in \mathcal{E}_\Lambda^b} \sigma_i(\omega)\sigma_j(\omega)\right) = \prod_{\{i, j\} \in \mathcal{E}_\Lambda^b} \exp\left(\beta \sigma_i(\omega)\sigma_j(\omega)\right) \\ &= \cosh(\beta)^{|\mathcal{E}_\Lambda^b|} \prod_{\{i, j\} \in \mathcal{E}_\Lambda^b} (1 + \tanh(\beta)\omega_i \omega_j). \end{aligned}$$

On développe le produit en utilisant l'identité générale suivante :

Proposition 3.3. *Soit E un ensemble fini et non vide, pour toute fonction $f: E \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\prod_{e \in E} (1 + f(e)) = \sum_{P \subset E} \prod_{e \in P} f(e).$$

Preuve. On procède par récurrence sur le cardinal de E . Si $E = \{e_0\}$ on a que

$$1 + f(e_0) = \prod_{e \in \emptyset} f(e) + \prod_{e \in \{e_0\}} f(e) = 1 + f(e_0).$$

Supposons que l'égalité soit vraie pour un ensemble de cardinal k . Soit maintenant $\text{card}(E) = k + 1$. On choisit un élément $e_0 \in E$ et on a que

$$\prod_{e \in E \setminus \{e_0\}} (1 + f(e)) = \sum_{P \subset E \setminus \{e_0\}} \prod_{e \in P} f(e).$$

D'où

$$\begin{aligned}
\prod_{e \in E} (1 + f(e)) &= (1 + f(e_0)) \sum_{P \subset E \setminus \{e_0\}} \prod_{e \in P} f(e) \\
&= \sum_{P \subset E \setminus \{e_0\}} \prod_{e \in P} f(e) + \sum_{P \subset E \setminus \{e_0\}} f(e_0) \prod_{e \in P} f(e) \\
&= \sum_{P \subset E \setminus \{e_0\}} \prod_{e \in P} f(e) + \sum_{P \subset E, P \ni e_0} \prod_{e \in P} f(e) \\
&= \sum_{P \subset E} \prod_{e \in P} f(e).
\end{aligned}$$

□

Il suit que $e^{-\mathcal{H}_{\Lambda_n; \beta, 0}(\omega)} = \cosh(\beta)^{|\mathcal{E}_\Lambda^b|} \sum_{E \subset \mathcal{E}_\Lambda^b} \left(\prod_{\{i, j\} \in E} \tanh(\beta) \omega_i \omega_j \right)$.

On peut donc récrire la fonction de partition comme suit :

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z}_{\Lambda_n; \beta, 0}^+ &= \cosh(\beta)^{|\mathcal{E}_\Lambda^b|} \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda^+} \sum_{E \subset \mathcal{E}_\Lambda^b} \prod_{\{i, j\} \in E} \tanh(\beta) \omega_i \omega_j \\
&= \cosh(\beta)^{|\mathcal{E}_\Lambda^b|} \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda^+} \sum_{E \subset \mathcal{E}_\Lambda^b} \tanh(\beta)^{|E|} \prod_{\{i, j\} \in E} \omega_i \omega_j \\
&= \cosh(\beta)^{|\mathcal{E}_\Lambda^b|} \sum_{E \subset \mathcal{E}_\Lambda^b} \tanh(\beta)^{|E|} \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda^+} \prod_{\{i, j\} \in E} \omega_i \omega_j.
\end{aligned}$$

On pose maintenant $D(i, E) = \mathbf{card}\{j \in \mathbb{Z}^d \mid \{i, j\} \in E\}$ le degré du sommet i dans E et on a que

$$\prod_{\{i, j\} \in E} \omega_i \omega_j = \prod_{i \in \Lambda_n} \omega_i^{D(i, E)}$$

En effet, en faisant le produit sur les arêtes de E , pour $i \in \Lambda_n$, ω_i est compté autant de fois que le degré de i dans E .

On montre maintenant que les seules parties E de \mathcal{E}_Λ^b qui contribuent à la somme, sont celles où tous les sommets sont de degré pair dans E , i.e., les configurations paires. En effet, soit $E_0 \subset \mathcal{E}_\Lambda^b$ tel qu'il existe un sommet $v \in \Lambda$ avec $D(v, E_0)$ impair. On a que

$$\begin{aligned}
\sum_{\omega \in \Omega_\Lambda^+} \prod_{i \in \Lambda_n} \omega_i^{D(i, E_0)} &= \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda^+, \omega_v=1} \prod_{i \in \Lambda_n} \omega_i^{D(i, E_0)} + \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda^+, \omega_v=-1} \prod_{i \in \Lambda_n} \omega_i^{D(i, E_0)} \\
&= \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda^+, \omega_v=1} \omega_v^{D(v, E_0)} \prod_{i \in \Lambda_n \setminus \{v\}} \omega_i^{D(i, E_0)} + \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda^+, \omega_v=-1} \omega_v^{D(v, E_0)} \prod_{i \in \Lambda_n \setminus \{v\}} \omega_i^{D(i, E_0)} \\
&= \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda^+, \omega_v=1} \prod_{i \in \Lambda_n \setminus \{v\}} \omega_i^{D(i, E_0)} - \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda^+, \omega_v=-1} \prod_{i \in \Lambda_n \setminus \{v\}} \omega_i^{D(i, E_0)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Soit $\mathbf{P}_{\Lambda_n}^+ = \{E \subset \mathcal{E}_{\Lambda}^b \mid D(i, E) \text{ est pair pour tout } i \in \Lambda_n\}$ l'ensemble des configurations paires. Pour tout $E \in \mathbf{P}_{\Lambda_n}^+$ et $i \in \Lambda$, $\omega_i^{D(i, E)} = 1$. Donc

$$\sum_{\omega \in \Omega_{\Lambda}^+} \prod_{i \in \Lambda_n} \omega_i^{D(i, E)} = 2^{|\Lambda_n|}.$$

Il suit que

$$\mathbf{Z}_{\Lambda_n; \beta, 0}^+ = 2^{|\Lambda_n|} \cosh(\beta)^{|\mathcal{E}_{\Lambda}^b|} \sum_{E \in \mathbf{P}_{\Lambda_n}^+} \tanh(\beta)^{|E|}. \quad (3.1)$$

(3.1) est la représentation à haute température de la fonction de partition.

En procédant de la même manière on obtient que

$$\langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda_n; \beta, 0}^+ = (\mathbf{Z}_{\Lambda_n; \beta, 0}^+)^{-1} 2^{|\Lambda_n|} \cosh(\beta)^{|\mathcal{E}_{\Lambda}^b|} \sum_{E \in \mathbf{P}_{\Lambda_n}^{+, 0}} \tanh(\beta)^{|E|}$$

avec $\mathbf{P}_{\Lambda_n}^{+, 0} = \left\{ E \subset \mathcal{E}_{\Lambda}^b \mid D(i, E) \text{ est pair pour tout } i \in \Lambda_n \setminus \{0\}, \text{ mais } D(0, E) \text{ est impair} \right\}$. En simplifiant on en déduit que

$$\langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda_n; \beta, 0}^+ = \frac{\sum_{E \in \mathbf{P}_{\Lambda_n}^{+, 0}} \tanh(\beta)^{|E|}}{\sum_{E \in \mathbf{P}_{\Lambda_n}^+} \tanh(\beta)^{|E|}}.$$

Étant donné $E \subset \mathcal{E}_{\Lambda}^b$, on définit $\Delta(E)$ l'ensemble de toutes les arêtes de \mathcal{E}_{Λ}^b qui ne partagent aucun sommet avec les arêtes de E . Tout élément $E \in \mathbf{P}_{\Lambda_n}^{+, 0}$ peut ainsi être décomposé, de façon unique, tel que $E = E_0 \cup E'$, avec $E_0 \neq \emptyset$ la composante connexe de E contenant 0 (non vide, car $D(0, E)$ est impair), et $E' \in \mathbf{P}_{\Lambda_n}^+$ tel que $E' \subset \Delta(E_0)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda_n; \beta, 0}^+ &= \frac{\sum_{E_0 \in \mathbf{P}_{\Lambda_n}^{+, 0} \text{ connexe}, E_0 \ni 0} \sum_{E' \in \mathbf{P}_{\Lambda_n}^+, E' \subset \Delta(E_0)} \tanh(\beta)^{|E' \cup E_0|}}{\sum_{E \in \mathbf{P}_{\Lambda_n}^+} \tanh(\beta)^{|E|}} \\ &= \sum_{E_0 \in \mathbf{P}_{\Lambda_n}^{+, 0} \text{ connexe}, E_0 \ni 0} \tanh(\beta)^{|E_0|} \frac{\sum_{E' \in \mathbf{P}_{\Lambda_n}^+, E' \subset \Delta(E_0)} \tanh(\beta)^{|E'|}}{\sum_{E \in \mathbf{P}_{\Lambda_n}^+} \tanh(\beta)^{|E|}}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

En particulier, on remarque que $\frac{\sum_{E' \in \mathbf{P}_{\Lambda_n}^+, E' \subset \Delta(E_0)} \tanh(\beta)^{|E'|}}{\sum_{E \in \mathbf{P}_{\Lambda_n}^+} \tanh(\beta)^{|E|}} \leq 1$.

Théorème 3.4. *Pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, $\beta_c(d) > 0$.*

Preuve. D'après ce qui précède, en majorant le quotient dans (3.2) par 1, il suit que

$$\langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda_n; \beta, 0}^+ \leq \sum_{E_0 \in \mathbf{P}_{\Lambda_n}^{+, 0} \text{ connexe}, E_0 \ni 0} \tanh(\beta)^{|E_0|}.$$

On peut majorer la somme en utilisant le lemme suivant :

Lemme 3.5. *Soit \mathbb{G} un graphe connexe avec N arêtes. En partant d'un sommet quelconque de \mathbb{G} , il existe un chemin dans \mathbb{G} passant par chaque arête de \mathbb{G} exactement deux fois.*

Preuve. On procède par récurrence sur N , en remarquant que tout graphe connexe peut toujours être construit une arête à la fois, de façon que chaque graphe intermédiaire soit aussi connexe.

Quand $N = 1$, le résultat est clair. Supposons que le résultat soit vrai pour $N = k$ et soit $\mathbf{c} = (\mathbf{c}(1), \dots, \mathbf{c}(2k))$ un des chemins correspondants.

On rajoute une nouvelle arête e_+ au graphe en le laissant connexe, cela implique qu'il existe au moins un sommet v_+ du graphe original qui est lié avec e_+ .

Le chemin voulu est obtenu en suivant \mathbf{c} jusqu'à la première visite de v_+ , ensuite en passant par e_+ une fois dans les deux sens et en continuant de suivre le chemin \mathbf{c} . \square

En utilisant ce lemme, on voit que le nombre de graphes E_0 avec l arêtes qui contribuent à (3.2) est majoré par le nombre de chemins de longueur $2l$ commençant par 0. Ce dernier est inférieur à $(2d)^{2l}$, car chaque nouvelle arête peut être rajoutée à au plus $2d$ directions différentes.

On montre maintenant que E_0 relie forcément 0 à Λ^c . En effet, $\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} D(i, E_0) = 2|E_0|$ qui est pair. Or, puisque $D(0, E_0)$ est impair, il existe au moins une arête $i \neq 0$ avec $D(i, E_0)$ impair. Or, un tel sommet ne peut pas appartenir à Λ , car $D(i, E_0)$ est pair pour tout $i \in \Lambda \setminus \{0\}$. Donc i est sur le bord de Λ .

On en déduit que $|E_0| \geq n$ et utilisant que $\tanh(\beta) \leq \beta$ on obtient finalement que

$$\langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda_n; \beta, 0}^+ \leq \sum_{l \geq n} (4d^2 \beta)^l \leq e^{-cn},$$

avec $c = c(\beta, d) > 0$, pour tout $\beta < 1/(4d^2)$. En particulier $\langle \sigma_0 \rangle_{\beta, 0}^+ = 0$ pour tout $\beta < 1/(4d^2)$, ce qui implique que $\beta_c(d) > 0$. \square

3.2 Représentation en courants aléatoires

Ici nous présentons la représentation en courants aléatoires du modèle d'Ising, introduite par Aizenman dans [Aiz82].

On écrit le développement de l'exponentielle en série entière :

$$e^{\beta \sigma_i \sigma_j} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n}{n!} (\sigma_i \sigma_j)^n$$

Le lemme suivant nous permettra de développer le produit sur les arêtes de la série entière.

Lemme 3.6. *Soit E un ensemble fini. Soit $f : E \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $e \in E$*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |f(e, n)| < \infty.$$

Alors on a que

$$\prod_{e \in E} \sum_{n \in \mathbb{N}} f(e, n) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^E} \prod_{e \in E} f(e, \mathbf{n}_e).$$

De plus, la somme dans le terme à droite est absolument convergente.

Preuve. Sans perdre de généralité on suppose que $E = \{1, \dots, k\}$ et on procède par récurrence sur le cardinal de E .

Pour $E = \{1\}$ le résultat est clair. Soit $k \geq 1$ et supposons que le résultat soit vrai pour E de cardinal k . On considère

$$f : \{1, \dots, k+1\} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

telle que les $k+1$ séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} f(i, n)$ pour $1 \leq i \leq k+1$ convergent absolument. En appliquant d'abord l'hypothèse de récurrence, ensuite en utilisant le théorème de Fubini pour combiner la double somme, on obtient que

$$\begin{aligned} \prod_{1 \leq i \leq k+1} \sum_{n \in \mathbb{N}} f(i, n) &= \left(\sum_{(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k} f(1, n_1) \cdots f(k, n_k) \right) \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} f(k+1, n) \right) \\ &= \sum_{(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k} \left(\sum_{n_{k+1} \in \mathbb{N}} f(1, n_1) \cdots f(k+1, n_{k+1}) \right) \\ &= \sum_{(n_1, \dots, n_{k+1}) \in \mathbb{N}^{k+1}} f(1, n_1) \cdots f(k+1, n_{k+1}). \end{aligned}$$

La dernière somme est absolument convergente d'après le théorème de Fubini. \square

On note $\mathbf{n} = (n_e)_{e \in \mathcal{E}_\Lambda^b}$ une famille d'entiers positifs indexée sur les arêtes.

D'après le lemme précédent on a que

$$\prod_{\{i,j\} \in \mathcal{E}_\Lambda^b} e^{\beta \sigma_i \sigma_j} = \prod_{\{i,j\} \in \mathcal{E}_\Lambda^b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n}{n!} (\sigma_i \sigma_j)^n = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^{\mathcal{E}_\Lambda^b}} \prod_{e \in \mathcal{E}_\Lambda^b} \frac{\beta^{n_e}}{n_e!} \prod_{\{i,j\} \in \mathcal{E}_\Lambda^b} (\sigma_i \sigma_j)^{n_{\{i,j\}}}.$$

Ainsi la fonction de partition $\mathbf{Z}_{\Lambda; \beta, 0}^+$ peut s'écrire

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{\Lambda; \beta, 0}^+ &= \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^{\mathcal{E}_\Lambda^b}} \prod_{e \in \mathcal{E}_\Lambda^b} \frac{\beta^{n_e}}{n_e!} \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda^+} \prod_{\{i,j\} \in \mathcal{E}_\Lambda^b} (\sigma_i(\omega) \sigma_j(\omega))^{n_{\{i,j\}}} \\ &= \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^{\mathcal{E}_\Lambda^b}} \prod_{e \in \mathcal{E}_\Lambda^b} \frac{\beta^{n_e}}{n_e!} \prod_{i \in \Lambda} \sum_{\omega_i \in \{-1, 1\}} \omega_i^{I(i, \mathbf{n})}, \end{aligned}$$

où $I(i, \mathbf{n}) = \sum_{j: j \sim i} n_{\{i,j\}}$. Puisque

$$\sum_{\omega_i \in \{-1, 1\}} \omega_i^m = \begin{cases} 2 & \text{si } m \text{ est pair,} \\ 0 & \text{si } m \text{ est impair,} \end{cases}$$

en notant $\partial_\Lambda \mathbf{n} = \{i \in \Lambda \mid I(i, \mathbf{n}) \text{ est impair}\}$, l'ensemble des sources de \mathbf{n} dans Λ , on en conclut que

$$\mathbf{Z}_{\Lambda; \beta, 0}^+ = 2^{|\Lambda|} \sum_{\mathbf{n}: \partial_\Lambda \mathbf{n} = \emptyset} \prod_{e \in \mathcal{E}_\Lambda^b} \frac{\beta^{n_e}}{n_e!}.$$

On notera $\mathbf{w}(\mathbf{n}) = \prod_{e \in \mathcal{E}_\Lambda^b} \frac{\beta^{n_e}}{n_e!}$ et $i \xleftrightarrow{\mathbf{n}} \partial\Lambda^c$ s'il existe un chemin qui lie $i \in \Lambda$ à $\partial\Lambda^c = \{i \in \Lambda^c \mid \exists j \in \Lambda, j \sim i\}$ sur lequel \mathbf{n} n'est jamais nulle. On appelle $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^{\mathcal{E}_\Lambda^b}$ un courant (ou une configuration de courants) dans Λ . On munit les courants dans Λ d'une loi de probabilité définie par

$$\mathbb{P}_{\Lambda, \beta}(\mathbf{n}) := \frac{\mathbf{w}(\mathbf{n})}{\sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{\mathcal{E}}} \mathbf{w}(\mathbf{m})}.$$

Ainsi on peut voir \mathbf{n} comme une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}^{\mathcal{E}_\Lambda^b}$, un *courant aléatoire*.

3.2.1 Switching Lemma

Les puissance de la représentation en courants aléatoires découle du lemme suivant. C'est l'instrument clé dans la preuve des résultats principaux de [ADS15].

Lemme 3.7 (Switching Lemma [GHS70; Aiz82]). *Soit $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ finie, $A \subset \Lambda$, $i \in \Lambda$ et $\mathcal{I} \subset \mathbb{N}^{\mathcal{E}_\Lambda^b}$ un ensemble de courants dans Λ . Alors pour \mathbf{n}^1 et \mathbf{n}^2 des courants dans Λ ,*

$$\sum_{\substack{\partial_\Lambda \mathbf{n}^1 = A \\ \partial_\Lambda \mathbf{n}^2 = \{i\} \\ \mathbf{n}^1 + \mathbf{n}^2 \in \mathcal{I}}} \mathbf{w}(\mathbf{n}^1) \mathbf{w}(\mathbf{n}^2) = \sum_{\substack{\partial_\Lambda \mathbf{n}^1 = A \Delta \{i\} \\ \partial_\Lambda \mathbf{n}^2 = \emptyset \\ \mathbf{n}^1 + \mathbf{n}^2 \in \mathcal{I}}} \mathbf{w}(\mathbf{n}^1) \mathbf{w}(\mathbf{n}^2) \mathbf{1}_{\{i \xleftrightarrow{\mathbf{n}^1 + \mathbf{n}^2} \partial\Lambda^c\}}.$$

Preuve. Pour deux courants \mathbf{n} et \mathbf{m} tels que $\mathbf{n} \leq \mathbf{m}$ (i.e. $n_e \leq m_e, \forall e \in \mathcal{E}_\Lambda^b$), on pose

$$\binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}} = \prod_{e \in \mathcal{E}_\Lambda^b} \binom{m_e}{n_e}.$$

On va changer les variables de la paire $(\mathbf{n}^1, \mathbf{n}^2)$ à la paire (\mathbf{m}, \mathbf{n}) où $\mathbf{m} = \mathbf{n}^1 + \mathbf{n}^2$ et $\mathbf{n} = \mathbf{n}^2$.

On a que $\mathbf{w}(\mathbf{n}^1) \mathbf{w}(\mathbf{n}^2) = \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}} \mathbf{w}(\mathbf{m})$. En effet,

$$\begin{aligned} \binom{\mathbf{n}^1 + \mathbf{n}^2}{\mathbf{n}^2} \mathbf{w}(\mathbf{n}^1 + \mathbf{n}^2) &= \prod_{e \in \mathcal{E}_\Lambda^b} \binom{n_e^1 + n_e^2}{n_e^2} \frac{\beta^{n_e^1} \beta^{n_e^2}}{(n_e^1 + n_e^2)!} \\ &= \prod_{e \in \mathcal{E}_\Lambda^b} \frac{(n_e^1 + n_e^2)!}{n_e^1! n_e^2!} \frac{\beta^{n_e^1} \beta^{n_e^2}}{(n_e^1 + n_e^2)!} = \mathbf{w}(\mathbf{n}^1) \mathbf{w}(\mathbf{n}^2). \end{aligned}$$

On remarque que $\partial_\Lambda(\mathbf{n}^1 + \mathbf{n}^2) = \partial_\Lambda \mathbf{n}^1 \Delta \partial_\Lambda \mathbf{n}^2$. En effet, si $k \in \partial_\Lambda(\mathbf{n}^1 + \mathbf{n}^2)$ alors $\sum_{j: j \sim k} (n_{\{j,k\}}^1 + n_{\{j,k\}}^2) = \sum_{j: j \sim k} n_{\{j,k\}}^1 + \sum_{j: j \sim k} n_{\{j,k\}}^2$ est impaire, donc $k \in \partial_\Lambda \mathbf{n}^1 \Delta \partial_\Lambda \mathbf{n}^2$. Inversement, si $k \in \partial_\Lambda \mathbf{n}^1 \Delta \partial_\Lambda \mathbf{n}^2$ alors $\sum_{j: j \sim k} n_{\{j,k\}}^1$ est impaire et $\sum_{j: j \sim k} n_{\{j,k\}}^2$ est pair, ou vice versa. Donc $\sum_{j: j \sim k} n_{\{j,k\}}^1 + \sum_{j: j \sim k} n_{\{j,k\}}^2 = \sum_{j: j \sim k} (n_{\{j,k\}}^1 + n_{\{j,k\}}^2)$ est impair.

On en déduit que

$$\sum_{\substack{\partial_\Lambda \mathbf{n}^1 = A \\ \partial_\Lambda \mathbf{n}^2 = \{i\} \\ \mathbf{n}^1 + \mathbf{n}^2 \in \mathcal{I}}} \mathbf{w}(\mathbf{n}^1) \mathbf{w}(\mathbf{n}^2) = \sum_{\substack{\partial_\Lambda \mathbf{m} = A \Delta \{i\} \\ \mathbf{n} \leq \mathbf{m} \\ \partial_\Lambda \mathbf{n} = \{i\} \\ \mathbf{m} \in \mathcal{I}}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}} \mathbf{w}(\mathbf{m}) = \sum_{\substack{\partial_\Lambda \mathbf{m} = A \Delta \{i\} \\ \mathbf{m} \in \mathcal{I}}} \mathbf{w}(\mathbf{m}) \sum_{\substack{\mathbf{n} \leq \mathbf{m} \\ \partial_\Lambda \mathbf{n} = \{i\}}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}.$$

Puisque $\mathbf{n} \leq \mathbf{m}$, $i \not\leftarrow \xrightarrow{\mathbf{m}} \partial\Lambda^c \implies i \not\leftarrow \xrightarrow{\mathbf{n}} \partial\Lambda^c$. Par conséquent,

$$\sum_{\substack{\mathbf{n} \leq \mathbf{m} \\ \partial_\Lambda \mathbf{n} = \{i\}}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}} = 0, \quad \text{quand } i \not\leftarrow \xrightarrow{\mathbf{m}} \partial\Lambda^c,$$

car $i \leftarrow \xrightarrow{\mathbf{n}} \partial\Lambda^c$ dès que $\partial_\Lambda \mathbf{n} = \{i\}$. En effet, soit $\mathbb{G}_{\mathbf{n}}$ le multigraphe de sommets $\Lambda \cup \partial\Lambda^c$ avec n_e arêtes entre les extrémités de chaque arête $e \in \mathcal{E}_\Lambda^b$. On considère H la composante connexe de i dans $\mathbb{G}_{\mathbf{n}}$. On a que la somme des degrés des sommets de H est égale à $2 \sum_{e \in E(H)} n_e$ qui est pair. Or puisque $I(i, \mathbf{n})$ est impair, il existe un sommet $v \in V(H)$ tel que $I(v, \mathbf{n})$ est impair. Or v ne peut pas appartenir à Λ , car $\partial_\Lambda \mathbf{n} = \{i\}$. Donc $v \in \partial\Lambda^c$.

On arrive au lemme suivant :

Lemme 3.8. *Soit \mathbf{m} une configuration de courants dans $\Lambda \in \mathbb{Z}^d$ et $C, D \subset \Lambda$. S'il existe un courant \mathbf{k} tel que $\mathbf{k} \leq \mathbf{m}$ et $\partial_\Lambda \mathbf{k} = C$, alors*

$$\sum_{\substack{\mathbf{n} \leq \mathbf{m} \\ \partial_\Lambda \mathbf{n} = D}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}} = \sum_{\substack{\mathbf{n} \leq \mathbf{m} \\ \partial_\Lambda \mathbf{n} = C \Delta D}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}. \quad (3.3)$$

Preuve. On associe à \mathbf{m} le multigraphe $\mathbb{G}_{\mathbf{m}}$ de la même façon qu'au paragraphe précédent. Par hypothèse, $\mathbb{G}_{\mathbf{m}}$ possède un sous-multigraphe $\mathbb{G}_{\mathbf{k}}$ tel que $\partial_\Lambda \mathbb{G}_{\mathbf{k}} = C$, où $\partial_\Lambda \mathbb{G}_{\mathbf{k}}$ est l'ensemble des sommets de Λ qui appartiennent à un nombre impair d'arêtes.

Le membre de gauche de (3.3) est égal au nombre de sous-multigraphes \mathbb{G} de $\mathbb{G}_{\mathbf{m}}$ satisfaisant $\partial_\Lambda \mathbb{G} = D$, alors que le membre de droite compte le nombre de sous-multigraphes \mathbb{G} de $\mathbb{G}_{\mathbf{m}}$ satisfaisant $\partial_\Lambda \mathbb{G} = C \Delta D$. Or, l'application $\mathbb{G} \mapsto \mathbb{G} \Delta \mathbb{G}_{\mathbf{k}}$ définit une bijection entre ces deux familles de multigraphes, car $\partial_\Lambda(\mathbb{G} \Delta \mathbb{G}_{\mathbf{k}}) = \partial_\Lambda \mathbb{G} \Delta \partial_\Lambda \mathbb{G}_{\mathbf{k}}$ et $(\mathbb{G} \Delta \mathbb{G}_{\mathbf{k}}) \Delta \mathbb{G}_{\mathbf{k}} = \mathbb{G}$. \square

L'application de ce lemme avec $C = D = \{i\}$ donne que

$$\sum_{\substack{\mathbf{n} \leq \mathbf{m} \\ \partial_\Lambda \mathbf{n} = \{i\}}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}} = \sum_{\substack{\mathbf{n} \leq \mathbf{m} \\ \partial_\Lambda \mathbf{n} = \emptyset \\ i \leftarrow \xrightarrow{\mathbf{m}} \partial_\Lambda^c}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}.$$

En retournant aux variables $\mathbf{n}^1 = \mathbf{m} - \mathbf{n}$ et $\mathbf{n}^2 = \mathbf{n}$, il suit que

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\partial_\Lambda \mathbf{n}^1 = A \\ \partial_\Lambda \mathbf{n}^2 = \{i\} \\ \mathbf{n}^1 + \mathbf{n}^2 \in \mathcal{I}}} \mathbf{w}(\mathbf{n}^1) \mathbf{w}(\mathbf{n}^2) &= \sum_{\substack{\partial_\Lambda \mathbf{m} = A \Delta \{i\} \\ \mathbf{m} \in \mathcal{I} \\ i \leftarrow \xrightarrow{\mathbf{m}} \partial_\Lambda^c}} \mathbf{w}(\mathbf{m}) \sum_{\substack{\mathbf{n} \leq \mathbf{m} \\ \partial_\Lambda \mathbf{n} = \emptyset}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}} \\ &= \sum_{\substack{\partial_\Lambda \mathbf{n}^1 = A \Delta \{i\} \\ \partial_\Lambda \mathbf{n}^2 = \emptyset \\ \mathbf{n}^1 + \mathbf{n}^2 \in \mathcal{I}}} \mathbf{w}(\mathbf{n}^1) \mathbf{w}(\mathbf{n}^2) \mathbb{1}_{\{i \not\leftarrow \xrightarrow{\mathbf{n}^1 + \mathbf{n}^2} \partial_\Lambda^c\}}. \end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve. \square

4 Courants aléatoires en volume infini

Dans cette section, nous présentons une extension de la représentation en courants aléatoire sur tout \mathbb{Z}^d telle qu'introduite dans [ADS15]. Nous considérons le modèle d'Ising plus général satisfaisant **C1-C4**.

Soit $G \subset \mathbb{Z}^d$ fini. Pour un courant $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}_2(G)} =: \Omega_G$ nous avons que

$$\mathbf{w}(\mathbf{n}) := \prod_{\{x,y\} \in \mathcal{P}_2(G)} \frac{(\beta J_{x,y})^{\mathbf{n}_{\{x,y\}}}}{\mathbf{n}_{\{x,y\}}!}.$$

La représentation en courants aléatoires pour la condition au bord libre nous donne la corrélation

$$\langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{G,\beta}^\emptyset = \frac{\sum_{\mathbf{n} \in \Omega_G : \partial \mathbf{n} = \{x,y\}} \mathbf{w}(\mathbf{n})}{\sum_{\mathbf{n} \in \Omega_G : \partial \mathbf{n} = \emptyset} \mathbf{w}(\mathbf{n})}. \quad (4.1)$$

Pour représenter la condition au bord (+), il est pratique d'introduire un sommet $\delta \notin \mathbb{Z}^d$, que l'on appelle *sommet fantôme*, et définir tous les couplages entre δ et $x \in G$ par $J_{x,\delta} = J_{x,\delta}(G) := \sum_{y \notin G} J_{x,y}$.

On obtient ainsi la représentation de corrélations

$$\langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{G,\beta}^+ = \frac{\sum_{\mathbf{n} \in \Omega_{G \cup \delta} : \partial \mathbf{n} = \{x,y\}} \mathbf{w}(\mathbf{n})}{\sum_{\mathbf{n} \in \Omega_{G \cup \delta} : \partial \mathbf{n} = \emptyset} \mathbf{w}(\mathbf{n})}. \quad (4.2)$$

On note $\mathbb{P}_{G,\beta}^\emptyset$ la loi des courants sur G définie par

$$\mathbb{P}_{G,\beta}^\emptyset(\mathbf{n}) = \frac{\mathbf{w}(\mathbf{n}) \mathbb{1}_{\{\partial \mathbf{n} = \emptyset\}}}{\sum_{\mathbf{m} \in \Omega_G : \partial \mathbf{m} = \emptyset} \mathbf{w}(\mathbf{m})}, \quad \forall \mathbf{n} \in \Omega_G := \mathbb{N}^{\mathcal{P}_2(G)}$$

Cela induit une mesure sur Ω_G que l'on note $\widehat{\mathbb{P}}_{G,\beta}^\emptyset$. On définit de la même manière une loi des courants sur $G \cup \{\delta\}$ qui induit une mesure sur $\Omega_{G \cup \{\delta\}} := \mathbb{N}^{\mathcal{P}_2(G \cup \{\delta\})}$ que l'on note $\widehat{\mathbb{P}}_{G,\beta}^+$.

Par la suite, on munit $\Omega_{\mathbb{Z}^d}$ de la tribu $\mathcal{F} := \sigma(\mathcal{C})$ engendrée par les événements cylindriques \mathcal{C} .

Soit Λ_L la boîte de taille L dans \mathbb{Z}^d .

Théorème 4.1 ([ADS15]). *Soit $\beta > 0$. Il existe deux mesures de probabilité $\widehat{\mathbb{P}}_\beta^\emptyset$ et $\widehat{\mathbb{P}}_\beta^+$ sur $(\Omega_{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{F})$ telles que*

R1 (Convergence) *Pour tout évènement $A \in \mathcal{C}$,*

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \widehat{\mathbb{P}}_{\Lambda_L, \beta}^+(A) = \widehat{\mathbb{P}}_\beta^+(A) \quad \text{et} \quad \lim_{L \rightarrow \infty} \widehat{\mathbb{P}}_{\Lambda_L, \beta}^\emptyset(A) = \widehat{\mathbb{P}}_\beta^\emptyset(A).$$

R2 (Invariance par translation) *$\widehat{\mathbb{P}}_\beta^\emptyset$ et $\widehat{\mathbb{P}}_\beta^+$ sont invariantes par les translations τ_x , $x \in \mathbb{Z}^d$.*

R3 (Ergodicité) $\widehat{\mathbb{P}}_\beta^\emptyset$ et $\widehat{\mathbb{P}}_\beta^+$ sont ergodiques par rapport au groupe des translations $(\tau_x)_{x \in \mathbb{Z}^d}$.

Preuve. Hormis de petites différences dans la dernière étape, la preuve est identique pour les deux conditions au bord (+) et (\emptyset). De ce fait, on utilise le symbole # pour noter l'une des deux conditions au bord.

On note aussi

$$\Omega_L^\# = \begin{cases} \Omega_{\Lambda_L} & \text{pour } \# \text{ la condition } (\emptyset) \\ \Omega_{\Lambda_L \cup \{\delta\}} & \text{pour } \# \text{ la condition } (+) \end{cases}.$$

Preuve de R1 (Convergence)

Pour montrer la convergence des mesures de probabilité en volume fini, remarquons d'abord que la loi des courants aléatoires se simplifie en une mesure produit lorsqu'elle est conditionnée par les variables de parité $\mathbf{r}(\omega) = (\mathbf{r}_{\{x,y\}})_{\{x,y\} \in \mathcal{P}_2(G)}$, avec :

$$\mathbf{r}_{\{x,y\}}(\omega) := (-1)^{\mathbf{n}_{\{x,y\}}(\omega)}, \quad \forall \omega \in \Omega_G.$$

Plus précisément, en notant $\partial \mathbf{r} := \{x \in G \mid \text{card}(\{y \in G \mid \mathbf{r}_{\{x,y\}} = -1\}) \text{ est impair}\}$, sur l'évènement $\{\partial \mathbf{r} = \emptyset\}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{G,\beta}^\emptyset(\mathbf{n} \mid \mathbf{r}(\omega) = (\epsilon_{\{x,y\}})_{\{x,y\} \in \mathcal{P}_2(G)}) &= \\ &= \frac{1}{\sum_{\mathbf{m} \in \Omega_G : \partial \mathbf{m} = \emptyset} \mathbf{w}(\mathbf{m})} \bigotimes_{\{x,y\} \in \mathcal{P}_2(G)} \mathbf{p}_{\{x,y\}}(\mathbf{n}_{\{x,y\}}(\omega) \mid \mathbf{r}_{\{x,y\}}(\omega) = \epsilon_{\{x,y\}}). \end{aligned}$$

Où sous les $\mathbf{p}_{\{x,y\}}(\cdot \mid \mathbf{r}_{\{x,y\}}(\omega) = \epsilon_{\{x,y\}})$, $(\mathbf{n}_{\{x,y\}})_{\{x,y\} \in \mathcal{P}_2(G)}$ sont indépendants suivant des lois de Poisson de paramètre $\beta J_{\{x,y\}}$.

Par conséquent, il suffit d'établir la convergence en loi des variables de parité $\mathbf{r}(\omega)$.

Soit $E \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{Z}^d)$ un ensemble d'arêtes, on définit les évènements

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_E &= \{\omega \in \Omega_{\mathbb{Z}^d} \mid \mathbf{r}_{\{x,y\}}(\omega) = 1, \forall \{x,y\} \in E\}, \\ \mathbf{C}_E^0 &= \{\omega \in \Omega_{\mathbb{Z}^d} \mid \mathbf{n}_{\{x,y\}}(\omega) = 0, \forall \{x,y\} \in E\}. \end{aligned}$$

Montrons que pour toute partie finie E d'arêtes sur \mathbb{Z}^d , $\widehat{\mathbb{P}}_{\Lambda_L,\beta}^\#(\mathbf{C}_E)$ converge quand L tend vers l'infini.

Pour L suffisamment grand tel que $\mathcal{P}_2(\Lambda_L) \supset E$, on a que

$$\widehat{\mathbb{P}}_{\Lambda_L,\beta}^\#(\mathbf{C}_E) = \frac{\sum_{\substack{\mathbf{n} \in \Omega_L^\# : \partial \mathbf{n} = \emptyset \\ \mathbf{n} \in \mathbf{C}_E}} \mathbf{w}(\mathbf{n})}{\sum_{\mathbf{n} \in \Omega_L^\# : \partial \mathbf{n} = \emptyset} \mathbf{w}(\mathbf{n})}.$$

Maintenant on remarque que pour chaque courant \mathbf{n} de \mathbf{C}_E , il existe un unique courant pair \mathbf{c} , de support E , tel que \mathbf{n} se décompose en une somme de \mathbf{c} et un courant de \mathbf{C}_E^0 . Plus précisément, pour tout $\mathbf{n} \in \mathbf{C}_E$ avec $\partial\mathbf{n} = \emptyset$, il existe une unique famille d'entiers naturels $k = (k_e)_{e \in E} \in \mathbb{N}^E$ telle que $\mathbf{n} = \mathbf{n} \mathbb{1}_{\mathcal{P}_2(\Lambda_L) \setminus E} + \mathbf{c}^k$. Où \mathbf{c}^k est le courant défini par $\mathbf{c}_e^k = 2k_e$, pour tout $e \in E$ et 0 sinon. On a aussi que $\mathbf{n} \mathbb{1}_{\mathcal{P}_2(\Lambda_L) \setminus E} =: \mathbf{n}' \in \mathbf{C}_E^0$ et $\partial\mathbf{n}' = \emptyset$.

Cela nous permet de récrire la somme au numérateur comme suit :

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\mathbf{n} \in \Omega_L^\# : \partial\mathbf{n} = \emptyset \\ \mathbf{n} \in \mathbf{C}_E}} \mathbf{w}(\mathbf{n}) &= \sum_{\substack{\mathbf{n}' \in \Omega_L^\# : \partial\mathbf{n}' = \emptyset \\ \mathbf{n}' \in \mathbf{C}_E}} \sum_{k \in \mathbb{N}^E} \mathbf{w}(\mathbf{n}' + \mathbf{c}^k) \\
&= \sum_{\substack{\mathbf{n}' \in \Omega_L^\# : \partial\mathbf{n}' = \emptyset \\ \mathbf{n}' \in \mathbf{C}_E}} \sum_{k \in \mathbb{N}^E} \prod_{\{x,y\} \in \mathcal{P}_2(\Lambda_L)} \frac{(\beta J_{x,y})^{\mathbf{n}'_{x,y} + \mathbf{c}_{x,y}^k}}{(\mathbf{n}'_{x,y} + \mathbf{c}_{x,y}^k)!} \\
&= \sum_{\substack{\mathbf{n}' \in \Omega_L^\# : \partial\mathbf{n}' = \emptyset \\ \mathbf{n}' \in \mathbf{C}_E}} \sum_{k \in \mathbb{N}^E} \prod_{\{x,y\} \in \mathcal{P}_2(\Lambda_L) \setminus E} \frac{(\beta J_{x,y})^{\mathbf{n}'_{x,y} + \mathbf{c}_{x,y}^k}}{(\mathbf{n}'_{x,y} + \mathbf{c}_{x,y}^k)!} \prod_{\{x,y\} \in E} \frac{(\beta J_{x,y})^{\mathbf{n}'_{x,y} + \mathbf{c}_{x,y}^k}}{(\mathbf{n}'_{x,y} + \mathbf{c}_{x,y}^k)!} \\
&= \sum_{\substack{\mathbf{n}' \in \Omega_L^\# : \partial\mathbf{n}' = \emptyset \\ \mathbf{n}' \in \mathbf{C}_E}} \mathbf{w}(\mathbf{n}') \sum_{k \in \mathbb{N}^E} \prod_{\{x,y\} \in E} \frac{(\beta J_{x,y})^{\mathbf{c}_{x,y}^k}}{\mathbf{c}_{x,y}^k!} \\
&= \sum_{\substack{\mathbf{n}' \in \Omega_L^\# : \partial\mathbf{n}' = \emptyset \\ \mathbf{n}' \in \mathbf{C}_E}} \mathbf{w}(\mathbf{n}') \prod_{\{x,y\} \in E} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(\beta J_{x,y})^{2k}}{2k!} \\
&= \sum_{\substack{\mathbf{n}' \in \Omega_L^\# : \partial\mathbf{n}' = \emptyset \\ \mathbf{n}' \in \mathbf{C}_E}} \mathbf{w}(\mathbf{n}') \prod_{\{x,y\} \in E} \cosh(\beta J_{x,y}).
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Ainsi, on obtient que

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{P}}_{\Lambda_L, \beta}^\#(\mathbf{C}_E) &= \frac{\sum_{\mathbf{n} \in \Omega_L^\# : \partial\mathbf{n} = \emptyset} \mathbf{w}(\mathbf{n}) \mathbb{1}_{\mathbf{C}_E^0}}{\sum_{\mathbf{n} \in \Omega_L^\# : \partial\mathbf{n} = \emptyset} \mathbf{w}(\mathbf{n})} \prod_{\{x,y\} \in E} \cosh(\beta J_{x,y}) \\
&= \frac{\mathbf{Z}^\#(\Lambda_L \setminus E, \beta)}{\mathbf{Z}^\#(\Lambda_L, \beta)} \prod_{\{x,y\} \in E} \cosh(\beta J_{x,y}).
\end{aligned}$$

Avec $\Lambda_L \setminus E$ le graphe obtenu en enlevant toutes les arêtes de E , mais en gardant tous les sommets de Λ_L .

Le quotient au-dessus peut être récrit comme l'espérance d'un terme fini,

$$\widehat{\mathbb{P}}_{\Lambda_L, \beta}^\#(\mathbf{C}_E) = \langle e^{-\beta K_E} \rangle_{\Lambda_L, \beta}^\# \prod_{\{x,y\} \in E} \cosh(\beta J_{x,y}) \tag{4.4}$$

où $K_E(\omega) := \sum_{\{x,y\} \in E} J_{x,y} \sigma_x \sigma_y$. En effet,

$$\begin{aligned} \langle e^{-\beta K_E} \rangle_{\Lambda_L, \beta}^\# &= \sum_{\omega \in \{-1,1\}^{\Lambda_L}} e^{-\beta K_E(\omega)} \frac{e^{-\mathcal{H}_{\Lambda_L; \beta}^\#(\omega)}}{\mathbf{Z}^\#(\Lambda_L, \beta)} = \sum_{\omega \in \{-1,1\}^{\Lambda_L}} \frac{e^{-\mathcal{H}_{\Lambda_L \setminus E; \beta}^\#(\omega)}}{\mathbf{Z}^\#(\Lambda_L, \beta)} \\ &= \frac{\mathbf{Z}^\#(\Lambda_L \setminus E, \beta)}{\mathbf{Z}^\#(\Lambda_L, \beta)}. \end{aligned}$$

Ainsi, la convergence de $\widehat{\mathbb{P}}_{\Lambda_L, \beta}^\#(\mathbf{C}_E)$ suit directement de la convergence de la mesure de Gibbs quand L tend vers l'infini.

La famille des évènements \mathbf{C}_E avec E parcourant les parties finies de $\mathcal{P}_2(\mathbb{Z}^d)$ est stable par intersections finies. Elle engendre aussi la tribu des évènements cylindriques des variables de parité $\mathbf{r}(\omega)$. Ce fait, ainsi que l'observation précédente que la loi des courants aléatoires \mathbf{n} conditionnée par $\mathbf{r}(\omega)$ ne dépend pas de L , impliquent l'existence de $\widehat{\mathbb{P}}_{\Lambda_L, \beta}^\#$.

Preuve de R2 (Invariance par translation)

Soit $x \in \mathbb{Z}^d$. La limite de la probabilité de l'évènement \mathbf{C}_E , avec E un ensemble fini d'arêtes, ne change pas si l'on échange la suite $(\Lambda_L)_{L \geq 0}$ par $(x + \Lambda_L)_{L \geq 0}$. En effet, en utilisant (4.4), cela suit directement de l'invariance par translation de l'état de Gibbs en volume infini et du fait que la convergence de l'état de Gibbs ne dépend pas de la suite $(\Lambda_L)_{L \geq 0}$. On a donc que $\widehat{\mathbb{P}}_{\Lambda_L, \beta}^\#$ est invariante par translation.

Preuve de R3 (Ergodicité)

Puisque tout évènement de \mathcal{F} peut être approché par des évènements cylindriques, il suffit d'établir que pour tout $A, B \in \mathcal{C}$,

$$\lim_{\|x\|_1 \rightarrow \infty} \widehat{\mathbb{P}}_\beta^\#(A \cap \tau_x B) = \widehat{\mathbb{P}}_\beta^\#(A) \widehat{\mathbb{P}}_\beta^\#(B).$$

Étant donné l'indépendance conditionnelle de \mathbf{n} sachant la variable de parité \mathbf{r} , la condition ci-dessus peut être simplifiée comme suit :

$$\lim_{\|x\|_1 \rightarrow \infty} \widehat{\mathbb{P}}_\beta^\#(\mathbf{C}_{E \cup (x+F)}) = \widehat{\mathbb{P}}_\beta^\#(\mathbf{C}_E) \widehat{\mathbb{P}}_\beta^\#(\mathbf{C}_F)$$

pour tout $E, F \in \mathcal{P}_2(\mathbb{Z}^d)$ finis.

En utilisant l'expression (4.4), pour x suffisamment grand tel que $E \cap (x + F) = \emptyset$, on a que

$$\frac{\widehat{\mathbb{P}}_\beta^\#(\mathbf{C}_{E \cup (x+F)})}{\widehat{\mathbb{P}}_\beta^\#(\mathbf{C}_E) \widehat{\mathbb{P}}_\beta^\#(\mathbf{C}_F)} = \frac{\langle e^{-\beta K_E} e^{-\beta K_{x+F}} \rangle_\beta^\#}{\langle e^{-\beta K_E} \rangle_\beta^\# \langle e^{-\beta K_F} \rangle_\beta^\#}.$$

De cette façon, pour établir l'ergodicité de l'état des courants aléatoires, il suffit de montrer que le quotient ci-dessus tend vers 1 lorsque $\|x\|_1$ tend vers l'infini. Ceci est une

conséquence directe du fait que les états de Gibbs $\langle \cdots \rangle_\beta^+$ et $\langle \cdots \rangle_\beta^\circ$ sont mélangeants lorsque l'on les restreint à des fonctions f stables par inversion globale des spins (i.e. $f(-\omega) = f(\omega)$ pour toute configuration ω). \square

5 Percolation de courants aléatoires

5.1 Propriétés de percolation de la somme de courants aléatoires

Soit $G \subset \mathbb{Z}^d$. Pour un courant $\mathbf{n} \in \Omega_G$ on associe la configuration de percolation $\omega \in \{0, 1\}^{\mathcal{P}_2(G)}$ donnée par la projection $\widehat{\cdot} : \Omega_G \rightarrow \{0, 1\}^{\mathcal{P}_2(G)}$ définie par

$$\widehat{\mathbf{n}}_{\{x,y\}} = \begin{cases} 1 & \text{Si } \mathbf{n}_{\{x,y\}} > 0, \\ 0 & \text{Sinon.} \end{cases}$$

Soit \mathbb{P}_β la loi de $\widehat{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}$, où \mathbf{n}_1 et \mathbf{n}_2 sont des courants indépendants de lois \mathbb{P}_β° et \mathbb{P}_β^+ respectivement. On note \mathbb{E}_β l'espérance sous \mathbb{P}_β . Les propriétés **R1** et **R2** impliquent directement que \mathbb{P}_β est invariante et ergodique par rapport aux translations. On montre maintenant qu'il ne peut pas y avoir plus d'un seul cluster infini.

5.1.1 Unicité du cluster infini

Théorème 5.1 ([ADS15]). *Pour tout modèle d'Ising satisfaisant **C1** – **C4**, il existe une unique cluster infini \mathbb{P}_β -presque sûrement, pour tout $\beta \geq 0$.*

Tolérance à l'insertion

Le lemme suivant est un équivalent de la tolérance à l'insertion valable dans d'autres modèles de percolation.

Lemme 5.2 (Tolérance à l'insertion). *Soit $\widehat{\Phi}_N : \{0, 1\}^{\mathcal{P}_2(\mathbb{Z}^d)} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathcal{P}_2(\mathbb{Z}^d)}$ l'application qui ouvre toutes les $\{x, y\}$ dans Λ_N avec $J_{x,y} > 0$. Soit $N > 0$, alors il existe une constante $c = c(N, J, \beta) > 0$ telle que pour tout événement E ,*

$$\mathbb{P}_\beta(\widehat{\Phi}_N(E)) \geq c \mathbb{P}_\beta(E).$$

Preuve. Il suffit de considérer des événements E cylindriques. Soit $\mathbb{P}_{\Lambda_n, \beta}$ la loi de $\widehat{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}$, où \mathbf{n}_1 et \mathbf{n}_2 sont deux courants indépendants de lois $\mathbb{P}_{\Lambda_n, \beta}^\circ$ et $\mathbb{P}_{\Lambda_n, \beta}^+$ respectivement. Propriété **R1** du Théorème 4.1 montre que $\mathbb{P}_{\Lambda_n, \beta}$ converge faiblement vers \mathbb{P}_β . Il suffit donc de montrer qu'il existe $c = c(N, J, \beta) > 0$ sur Λ_n , avec une valeur qui ne dépend pas de $n > N$.

Considérons l'application $\Phi_N : (\Omega_{\Lambda_n})^2 \rightarrow (\Omega_{\Lambda_n})^2$ définie par

$$\Phi_N(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)_{\{x,y\}} = \begin{cases} (0, 2) & \text{Si } (\mathbf{n}_{1\{x,y\}}, \mathbf{n}_{2\{x,y\}}) = (0, 0), \\ & J_{x,y} > 0 \text{ et } x, y \in \Lambda_n, \\ (\mathbf{n}_{1\{x,y\}}, \mathbf{n}_{2\{x,y\}}) & \text{Sinon.} \end{cases}$$

Pour $\omega \in \{0, 1\}^{\mathcal{P}_2(\Lambda_n)}$ soit $\Omega_2^\omega = \{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) \in (\Omega_{\Lambda_n})^2 \mid \widehat{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2} = \omega\}$. L'ensemble $\Phi_N(\Omega_2^\omega)$ est obtenu à partir de Ω_2^ω en changeant la valeur du courant \mathbf{n}_2 sur les arêtes $\{x, y\}$ avec $\omega_{\{x, y\}} = 0$ de 0 à 2. En particulier, on a que $\{\Phi_N(\Omega_2^\omega)\} = \{\widehat{\Phi}_N(\omega)\}$.

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\Lambda_n, \beta}(\widehat{\Phi}_N(E)) &= \sum_{\omega' \in \widehat{\Phi}_N(E)} \mathbb{P}_{\Lambda_n, \beta}(\omega') = \sum_{\omega \in E} \frac{1}{\text{card}(\widehat{\Phi}_N^{-1}(\widehat{\Phi}_N(\omega)))} \mathbb{P}_{\Lambda_n, \beta}(\widehat{\Phi}_N(\omega)) \\
&\geq 2^{-\text{card}(\mathcal{P}_2(\Lambda_N))} \sum_{\omega \in E} \mathbb{P}_{\Lambda_n, \beta}(\widehat{\Phi}_N(\omega)) = 2^{-\text{card}(\mathcal{P}_2(\Lambda_N))} \sum_{\omega \in E} \mathbb{P}_{\Lambda_n, \beta}^\emptyset \otimes \mathbb{P}_{\Lambda_n, \beta}^+(\widehat{\Phi}_N(\Omega_2^\omega)) \\
&= 2^{-\text{card}(\mathcal{P}_2(\Lambda_N))} \sum_{\omega \in E} \left(\prod_{\substack{\{x, y\} \subset \Lambda_N : \\ \omega_{\{x, y\}} = 0}} \frac{(\beta J_{x, y})^2}{2} \right) \mathbb{P}_{\Lambda_n, \beta}^\emptyset \otimes \mathbb{P}_{\Lambda_n, \beta}^+(\Omega_2^\omega) \\
&= c \sum_{\omega \in E} \mathbb{P}_{\Lambda_n, \beta}^\emptyset \otimes \mathbb{P}_{\Lambda_n, \beta}^+(\Omega_2^\omega) = c \mathbb{P}_{\Lambda_n, \beta}(E),
\end{aligned}$$

où $c = c(N, J, \beta) > 0$ ne dépend pas de n . □

Preuve du Théorème 5.1. Pour $l \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, soit \mathcal{E}_l l'évènement qu'il existe exactement l clusters infinis disjoints. La preuve sera divisée en deux parties. Dans la première partie on montre que pour $2 \leq l \leq \infty$, presque sûrement, il ne peut pas y avoir l clusters infinis. La deuxième partie montre que, presque sûrement, il ne peut y avoir une infinité de clusters infinis. Cette dernière est une modification de l'argument de Burton-Keane [BK89].

On remarque que les évènements \mathcal{E}_l sont disjoints et invariants par translation. Pour β fixé, par ergodicité, $\mathbb{P}_\beta(\mathcal{E}_l) = 1$ pour une seule valeur l et $\mathbb{P}_\beta(\mathcal{E}_l) = 0$ pour toute autre valeur de l .

Soit $k > 0$ tel que pour tout sommet y avec $\|y\|_1 = 1$, il existe $0 = x_0, \dots, x_m = y$ avec $J_{x_0, x_1} \cdots J_{x_{m-1}, x_m} > 0$ et $x_i \in \Lambda_k$ pour $0 \leq i \leq m$. L'existence de k est donnée par la condition **C4**.

Preuve de $\mathbb{P}_\beta(\mathcal{E}_l) = 0$ pour $2 \leq l < \infty$.

Soit $l \geq 2$. Soit F_n l'évènement que les l clusters infinis intersectent Λ_n . On a que $F_n \uparrow \mathcal{E}_l$ quand $n \rightarrow \infty$. On fixe $N > k$ assez grand pour que $\mathbb{P}_\beta(F_N) \geq \frac{1}{2} \mathbb{P}_\beta(\mathcal{E}_l)$. Le lemme précédent implique que $\mathbb{P}_\beta(\widehat{\Phi}_{2N}(F_N)) \geq \frac{c}{2} \mathbb{P}_\beta(\mathcal{E}_l)$. Toute configuration dans $\widehat{\Phi}_{2N}(F_N)$ contient exactement un cluster infini, car tous les sommets sont liés dans Λ_N . Ainsi,

$$\mathbb{P}_\beta(\mathcal{E}_1) \geq \frac{c}{2} \mathbb{P}_\beta(\mathcal{E}_l).$$

Par ergodicité, $\mathbb{P}_\beta(\mathcal{E}_1)$ et $\mathbb{P}_\beta(\mathcal{E}_l)$ sont dans $\{0, 1\}$, donc $\mathbb{P}_\beta(\mathcal{E}_l) = 0$.

Preuve de $\mathbb{P}_\beta(\mathcal{E}_\infty) = 0$.

On suppose que $\mathbb{P}_\beta(\mathcal{E}_\infty) > 0$ et on considère $N > 2k$ assez grand pour que

$$\mathbb{P}_\beta(\text{trois clusters infinis disjoints intersectent la boîte } \Lambda_N) > 0.$$

On définit l'évènement *trifurcation grossière* en 0, noté CT_0 , par :

- tous les sommets dans Λ_N sont liés dans Λ_N ,
- si \mathcal{C} est la composante connexe de 0, alors $\mathcal{C} \cap (\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda_N)$ contient au moins trois clusters infinis disjoints.

Par tolérance à l'insertion et par définition de N , on a que $\mathbb{P}_\beta(\text{CT}_0) > 0$.

De façon similaire, pour $x \in (2N + 1)\mathbb{Z}^d$, on dit que x est une trifurcation grossière si $\tau_x \text{CT}_0 =: \text{CT}_x$ est réalisé. L'invariance par translation de \mathbb{P}_β donne que $\mathbb{P}_\beta(\text{CT}_0) = \mathbb{P}_\beta(\text{CT}_x) > 0$.

On fixe $n \gg N$ et $\omega \in \{0, 1\}^{\mathcal{P}_2(\mathbb{Z}^d)}$. Nous allons construire un graphe orienté H à partir de la configuration ω .

Soit $V = \{v_1, \dots, v_r\}$ tous les sommets de \mathbb{Z}^d qui sont des trifurcations grossières. Pour chaque trifurcation grossière v_i , soit D_i l'ensemble des clusters infinis dans ω restreints à $\mathcal{P}_2(\mathcal{C}_{v_i} \setminus (v_i + \Lambda_N))$ où \mathcal{C}_{v_i} désigne le cluster de v_i dans ω . Soit $D := \bigsqcup_{1 \leq i \leq r} D_i =$

$$\bigcup_{1 \leq i \leq r} (\{i\} \times D_i).$$

On notera w_1, w_2, \dots les sommets de $W := \{x \in \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda_n \mid \exists y \in \Lambda_n, \omega_{\{x,y\}} = 1\}$, ce qui peut être a priori infini, mais nous verrons par la suite que $|W|$ est presque sûrement fini.

On commence par un graphe H_1 avec sommets $v_1, \dots, v_r, w_1, w_2, \dots$ et sans arêtes. On pose $S_1 = D$. Dans la i -ème étape, on considère un cluster infini $\mathcal{C} \in S_i$ et on construit H_{i+1} à partir de H_i en ajoutant une arête orientée de la façon décrite par l'algorithme ci-dessous. On modifie ensuite S_i en enlevant au moins un cluster infini pour obtenir S_{i+1} . Puisque $|D|$ est fini, l'algorithme se termine.

L'algorithme : [OR22]

Étape 0 : Soit $S_1 = D$ et H_1 tel que l'on l'a défini ci-dessus.

Étape i : Si S_i est vide on pose $H := H_i$. Si S_i est non vide, on choisit un cluster infini $\mathcal{C} \in S_i$ avec v la trifurcation grossière correspondante. Dans ce cas, il y a deux possibilités.

1. Il existe un chemin dans ω liant v à une arête de l'extérieur w_j qui ne passe pas à distance N de toute trifurcation grossière de $V \setminus \{v\}$. Dans ce cas, on ajoute une arête orientée de v à w_j pour obtenir H_{i+1} . On modifie S_i en enlevant le cluster \mathcal{C} pour obtenir S_{i+1} .
2. S'il n'existe pas de tel chemin, alors il existe forcément une autre trifurcation grossière v' avec un chemin liant v à v' qui ne passe pas à distance N de tout autre trifurcation grossière de $V \setminus \{v, v'\}$. On choisit une de ces trifurcations grossières v' et on ajoute une arête orientée de v à v' pour obtenir H_{i+1} . On considère le cluster infini \mathcal{C}' dans $\mathcal{C}_{v'} \setminus (v' + \Lambda_N)$ qui intersecte ce chemin. Notons qu'il existe un unique cluster infini dans $\mathcal{C}_{v'} \setminus (v' + \Lambda_N)$ qui intersecte ce chemin, car tous les sommets dans $(v + \Lambda_N)$ sont liés dans $(v + \Lambda_N)$. On modifie S_i en enlevant les clusters \mathcal{C} et \mathcal{C}' pour obtenir S_{i+1} .

Montrons que le graphe obtenu est une forêt.

Proposition 5.3. *Le graphe non orienté H' correspondant à H est sans cycles.*

Preuve. Supposons qu'il existe un cycle C dans H' . Pour tout sommet $v \in C$, soit $d_C^+(v)$ le degré sortant de v dans C , i.e., le nombre d'arêtes dans C ayant v comme origine et $d_C^-(v)$ le degré entrant de v dans C , i.e., le nombre d'arêtes dans C ayant v comme cible. Notons que $d_C^+(v), d_C^-(v) \in \{0, 1, 2\}$ et $d_C^+(v) + d_C^-(v) = 2$.

On définit le flot f_v par

$$f_v := d_C^+(v) - d_C^-(v).$$

Nous avons deux cas à considérer selon si C contient un sommet de l'extérieur de Λ_n ou non :

- Si C contient un sommet w de l'extérieur, on remarque que $f_w = -2$, puisqu'un sommet de l'extérieur ne peut pas avoir d'arête sortante. Comme $\sum_{x \in C} f_x = 0$, il existe forcément une trifurcation grossière v avec $f_v = o_v = 2$. Cela est absurde puisque ces deux arêtes correspondent au même cluster infini dans D , car les deux chemins correspondants sont liés dans $\Lambda_n \setminus (v + \Lambda_N)$ par le cycle.
- Si C ne contient pas de sommets de l'extérieur, on suppose que la première arête e_1 qui a été ajoutée dans C est de v à v' . Si l'autre arête e_2 de v' est aussi entrante, alors il existe $v'' \in C$ avec $d_C^+(v'') = 2$, ce qui est absurde par le même argument donné au cas précédent. Donc e_2 est partante et a été ajoutée après e_1 . Or, quand e_1 a été ajoutée le cluster infini de e_2 correspondant à la trifurcation grossière v' a été enlevé dans l'algorithme. Cela signifie que e_2 n'aurait pu être ajoutée.

□

Ainsi, le nombre de trifurcations grossières est inférieur à $|W|$, le nombre de feuilles. Comme $\mathbb{P}_\beta(\text{CT}_0) = \mathbb{P}_\beta(\text{CT}_x)$ pour $x \in (2N+1)\mathbb{Z}^d$, on a que

$$\mathbb{E}_\beta[|V|] = \sum_{x \in (2N+1)\mathbb{Z}^d \cap \Lambda_n} \mathbb{E}_\beta[\mathbf{1}_{\{x \in V\}}] = \mathbb{P}_\beta(\text{CT}_0) \frac{(2n+1)^d}{(2N+1)^d} \leq \mathbb{E}_\beta[|W|].$$

Or, les éléments de W sont des sommets à l'extérieur de Λ_n qui sont liés par une arête ouverte à un sommet dans Λ_n , donc

$$\mathbb{E}_\beta[|W|] \leq 2d(2n+1)^{d-1} \sum_{j=0}^n \sum_{\substack{x \in \mathbb{Z}^d: \\ \|x\|_1 \geq j}} J_{0,x}.$$

Par la condition **C3**, nous avons que $\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} J_{0,x} < \infty$. Donc on obtient que

$$0 < \frac{\mathbb{P}_\beta(\text{CT}_0)}{(2N+1)^d} \leq \frac{\mathbb{E}_\beta[|W|]}{(2n+1)^d} \longrightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

□

5.2 Une borne sur la probabilité de percolation

Nous établissons un résultat crucial dans la démonstration du Théorème 6.1 et qui justifie la considération de \mathbb{P}_β .

Théorème 5.4 ([ADS15]). *Pour β tel que $\widetilde{M}_{LRO}(\beta) = 0$, alors $\mathbb{P}_\beta(0 \longleftrightarrow \infty) = 0$.*

Preuve. Soit $L > 0$ et soit $x, y \in \Lambda_L$. En appliquant le switching lemma nous avons que

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{\Lambda_L, \beta}^\emptyset \otimes \mathbb{P}_{\Lambda_L, \beta}^+ (x \xleftrightarrow{\widehat{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}} y \text{ dans } \Lambda_L) \\ & := \frac{\sum_{\substack{\mathbf{n}_1 \in \Omega_{\Lambda_L} : \partial \mathbf{n}_1 = \emptyset \\ \mathbf{n}_2 \in \Omega_{\Lambda_L \cup \{\delta\}} : \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} \mathbf{w}(\mathbf{n}_1) \mathbf{w}(\mathbf{n}_2) \mathbb{1}_{\{x \xleftrightarrow{\widehat{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}} y \text{ dans } \Lambda_L\}}}{\sum_{\substack{\mathbf{n}_1 \in \Omega_{\Lambda_L} : \partial \mathbf{n}_1 = \emptyset \\ \mathbf{n}_2 \in \Omega_{\Lambda_L \cup \{\delta\}} : \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} \mathbf{w}(\mathbf{n}_1) \mathbf{w}(\mathbf{n}_2)} \\ & = \frac{\sum_{\substack{\mathbf{n}_1 \in \Omega_{\Lambda_L} : \partial \mathbf{n}_1 = \{x, y\} \\ \mathbf{n}_2 \in \Omega_{\Lambda_L \cup \{\delta\}} : \partial \mathbf{n}_2 = \{x, y\}}} \mathbf{w}(\mathbf{n}_1) \mathbf{w}(\mathbf{n}_2)}{\sum_{\substack{\mathbf{n}_1 \in \Omega_{\Lambda_L} : \partial \mathbf{n}_1 = \emptyset \\ \mathbf{n}_2 \in \Omega_{\Lambda_L \cup \{\delta\}} : \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} \mathbf{w}(\mathbf{n}_1) \mathbf{w}(\mathbf{n}_2)}. \end{aligned}$$

La représentation des corrélations (4.1) et (4.2) impliquent que

$$\mathbb{P}_{\Lambda_L, \beta}^\emptyset \otimes \mathbb{P}_{\Lambda_L, \beta}^+ (x \xleftrightarrow{\widehat{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}} y \text{ dans } \Lambda_L) = \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda_L, \beta}^\emptyset \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda_L, \beta}^+ \leq \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda_L, \beta}^\emptyset.$$

Le terme de droite converge vers $\langle \sigma_x \sigma_y \rangle_\beta^\emptyset$ quand L tend vers l'infini. Comme l'évènement dans le terme de gauche peut être exprimé en termes de $\widehat{\mathbf{n}}_1$ et $\widehat{\mathbf{n}}_2$, la convergence de $\widehat{\mathbb{P}}_{\Lambda_L, \beta}^+$ et $\widehat{\mathbb{P}}_{\Lambda_L, \beta}^\emptyset$ vers $\widehat{\mathbb{P}}_\beta^+$ et $\widehat{\mathbb{P}}_\beta^\emptyset$ donnée par le Théorème 4.1 implique la convergence du terme de gauche à $\mathbb{P}_\beta(x \longleftrightarrow y)$. L'évènement $\{x \longleftrightarrow y\}$ n'est en effet pas cylindrique, mais nous avons que

$$\{x \longleftrightarrow y\} = \{x \longleftrightarrow y \text{ dans } \Lambda_L\} \sqcup \{x \not\longleftrightarrow y \text{ dans } \Lambda_L, x \longleftrightarrow y\}$$

Et $(\{x \not\longleftrightarrow y \text{ dans } \Lambda_k, x \longleftrightarrow y\})_{k \geq L}$ est une famille décroissante d'intersection vide. Donc la régularité de la mesure donne le résultat.

Il suit que

$$\mathbb{P}_\beta(x \longleftrightarrow y) \leq \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_\beta^\emptyset. \quad (5.1)$$

Soit $B \subset \mathbb{Z}^d$ fini. Nous allons appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à la variable aléatoire $X = \sum_{x \in B} \mathbb{1}_{\{x \longleftrightarrow \infty\}}$.

On que

$$\mathbb{E}_\beta[X]^2 = (|B| \mathbb{P}_\beta(0 \longleftrightarrow \infty))^2 \text{ et } \mathbb{E}_\beta[X^2] = \sum_{x,y \in B} \mathbb{P}_\beta(x, y \longleftrightarrow \infty).$$

Donc

$$(|B| \mathbb{P}_\beta(0 \longleftrightarrow \infty))^2 \leq \sum_{x,y \in B} \mathbb{P}_\beta(x, y \longleftrightarrow \infty)$$

L'unicité du cluster infini implique que $\{x, y \longleftrightarrow \infty\} = \{x, y \longleftrightarrow \infty\} \cap \{x \longleftrightarrow y\}$.

Il suit que

$$(|B| \mathbb{P}_\beta(0 \longleftrightarrow \infty))^2 \leq \sum_{x,y \in B} \mathbb{P}_\beta(x \longleftrightarrow y).$$

En utilisant l'inégalité (5.1) et en prenant l'infimum sur les parties finies, nous obtenons finalement que

$$\mathbb{P}_\beta(0 \longleftrightarrow \infty)^2 \leq \inf_{B \subset \mathbb{Z}^d, B \text{ fini}} \frac{1}{|B|^2} \sum_{x,y \in B} \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_\beta^\emptyset = \widetilde{M}_{LRO}(\beta).$$

□

6 Continuité de l'aimantation spontanée

6.1 Continuité et ordre à longue distance

Nous présentons maintenant le théorème principal de ce mémoire.

Théorème 6.1 ([ADS15]). *Pour tout modèle d'Ising satisfaisant C1 – C4 : Si*

$$\widehat{M}_{LRO}(\beta_c) = 0$$

alors

$$m^*(\beta_c) = 0,$$

et le modèle a un unique état de Gibbs en β_c .

Preuve. Soit $L > 0$. On fixe $x, y \in \Lambda_L$. On a que

$$\begin{aligned}
& \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda_L, \beta}^+ - \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda_L, \beta}^\emptyset \\
&= \frac{\sum_{\mathbf{n}_2 \in \Omega_{\Lambda_L \cup \{\delta\}} : \partial \mathbf{n}_2 = \{x, y\}} \mathbf{w}(\mathbf{n}_2)}{\sum_{\mathbf{n}_2 \in \Omega_{\Lambda_L \cup \{\delta\}} : \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset} \mathbf{w}(\mathbf{n}_2)} - \frac{\sum_{\mathbf{n}_1 \in \Omega_{\Lambda_L} : \partial \mathbf{n}_1 = \{x, y\}} \mathbf{w}(\mathbf{n}_1)}{\sum_{\mathbf{n}_1 \in \Omega_{\Lambda_L} : \partial \mathbf{n}_1 = \emptyset} \mathbf{w}(\mathbf{n}_1)} \\
&= \frac{\sum_{\substack{\mathbf{n}_1 \in \Omega_{\Lambda_L} : \partial \mathbf{n}_1 = \emptyset \\ \mathbf{n}_2 \in \Omega_{\Lambda_L \cup \{\delta\}} : \partial \mathbf{n}_2 = \{x, y\}}} \mathbf{w}(\mathbf{n}_1) \mathbf{w}(\mathbf{n}_2) - \sum_{\substack{\mathbf{n}_1 \in \Omega_{\Lambda_L} : \partial \mathbf{n}_1 = \{x, y\} \\ \mathbf{n}_2 \in \Omega_{\Lambda_L \cup \{\delta\}} : \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} \mathbf{w}(\mathbf{n}_1) \mathbf{w}(\mathbf{n}_2)}{\sum_{\substack{\mathbf{n}_1 \in \Omega_{\Lambda_L} : \partial \mathbf{n}_1 = \emptyset \\ \mathbf{n}_2 \in \Omega_{\Lambda_L \cup \{\delta\}} : \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} \mathbf{w}(\mathbf{n}_1) \mathbf{w}(\mathbf{n}_2)}.
\end{aligned}$$

En appliquant une fois le switching lemma on obtient que

$$\begin{aligned}
& \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda_L, \beta}^+ - \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda_L, \beta}^\emptyset \\
&= \frac{\sum_{\substack{\mathbf{n}_1 \in \Omega_{\Lambda_L} : \partial \mathbf{n}_1 = \emptyset \\ \mathbf{n}_2 \in \Omega_{\Lambda_L \cup \{\delta\}} : \partial \mathbf{n}_2 = \{x, y\}}} \mathbf{w}(\mathbf{n}_1) \mathbf{w}(\mathbf{n}_2) - \sum_{\substack{\mathbf{n}_1 \in \Omega_{\Lambda_L} : \partial \mathbf{n}_1 = \emptyset \\ \mathbf{n}_2 \in \Omega_{\Lambda_L \cup \{\delta\}} : \partial \mathbf{n}_2 = \{x, y\}}} \mathbf{w}(\mathbf{n}_1) \mathbf{w}(\mathbf{n}_2) \mathbb{1}_{\{x \xrightarrow{\widehat{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}} y \text{ dans } \Lambda_L\}}}{\sum_{\substack{\mathbf{n}_1 \in \Omega_{\Lambda_L} : \partial \mathbf{n}_1 = \emptyset \\ \mathbf{n}_2 \in \Omega_{\Lambda_L \cup \{\delta\}} : \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} \mathbf{w}(\mathbf{n}_1) \mathbf{w}(\mathbf{n}_2)} \\
&= \frac{\sum_{\substack{\mathbf{n}_1 \in \Omega_{\Lambda_L} : \partial \mathbf{n}_1 = \emptyset \\ \mathbf{n}_2 \in \Omega_{\Lambda_L \cup \{\delta\}} : \partial \mathbf{n}_2 = \{x, y\}}} \mathbf{w}(\mathbf{n}_1) \mathbf{w}(\mathbf{n}_2) \left(1 - \mathbb{1}_{\{x \xrightarrow{\widehat{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}} y \text{ dans } \Lambda_L\}} \right)}{\sum_{\substack{\mathbf{n}_1 \in \Omega_{\Lambda_L} : \partial \mathbf{n}_1 = \emptyset \\ \mathbf{n}_2 \in \Omega_{\Lambda_L \cup \{\delta\}} : \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} \mathbf{w}(\mathbf{n}_1) \mathbf{w}(\mathbf{n}_2)}.
\end{aligned}$$

Toute configuration \mathbf{n}_2 de sources x et y tels que x et y ne sont pas liés dans Λ_L satisfait nécessairement que x et y sont liés à δ . Ainsi,

$$\langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda_L, \beta}^+ - \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda_L, \beta}^\emptyset \leq \frac{\sum_{\substack{\mathbf{n}_1 \in \Omega_{\Lambda_L} : \partial \mathbf{n}_1 = \emptyset \\ \mathbf{n}_2 \in \Omega_{\Lambda_L \cup \{\delta\}} : \partial \mathbf{n}_2 = \{x, y\}}} \mathbf{w}(\mathbf{n}_1) \mathbf{w}(\mathbf{n}_2) \mathbb{1}_{\{x \xrightarrow{\widehat{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}} \delta\}}}{\sum_{\substack{\mathbf{n}_1 \in \Omega_{\Lambda_L} : \partial \mathbf{n}_1 = \emptyset \\ \mathbf{n}_2 \in \Omega_{\Lambda_L \cup \{\delta\}} : \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} \mathbf{w}(\mathbf{n}_1) \mathbf{w}(\mathbf{n}_2)}. \quad (6.1)$$

Nous allons maintenant estimer la somme au numérateur en la comparant à la somme dans laquelle la condition sur la source de $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)$ est $\partial \mathbf{n}_1 = \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset$.

Fixons des sommets $x = x_0, \dots, x_m = y$ avec $J_{x_i, x_{i+1}} > 0$ pour $0 \leq i < m$. Pour L suffisamment grand pour que $\Lambda_L \ni x_i$ pour tout $0 \leq i \leq m$, nous allons considérer une application Ψ qui a un courant \mathbf{n}_2 ω associe un courant où l'on a modifié \mathbf{n}_2 le long des arêtes $e_j = \{x_j, x_{j+1}\}$, $0 \leq j \leq m-1$, en changeant la parité de \mathbf{n}_{2e_j} et tel que la nouvelle valeur de \mathbf{n}_{2e_j} soit au moins égal à 1. Notons qu'en changeant les parités le long de ce chemin on ne change que la parité de la somme sur les voisins de x, y . Donc on a que la source de \mathbf{n}_2 devient $\partial \mathbf{n}_2 = \emptyset$ tout en gardant que $x \xrightarrow{\widehat{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}} \delta$.

Plus précisément, Ψ est définie de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{P}(\Omega_{\Lambda_L \cup \{\delta\}}) &\longrightarrow \mathcal{P}(\Omega_{\Lambda_L \cup \{\delta\}}) \\ \{\mathbf{n}_{2e_j} \text{ pair}\} &\longmapsto \{\mathbf{n}_{2e_j} \text{ impair}\} \\ \{\mathbf{n}_{2e_j} \text{ impair}\} &\longmapsto \{\mathbf{n}_{2e_j} \text{ pair non nul}\}, \end{aligned}$$

pour tout $j \in \{0, \dots, m-1\}$.

En faisant un développement très similaire à celui de (4.3) on obtient que

$$\frac{\widehat{\mathbb{P}}_{\Lambda_L, \beta}^+(\{\mathbf{n}_{2e_j} \text{ impair}\})}{\widehat{\mathbb{P}}_{\Lambda_L, \beta}^+(\{\mathbf{n}_{2e_j} \text{ pair}\})} = \frac{\sum_{\substack{\mathbf{n}_2 \in \Omega_{\Lambda_L \cup \{\delta\}} : \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset \\ \mathbf{n}_{2e_j} \text{ impair}}} \mathbf{w}(\mathbf{n}_2)}{\sum_{\substack{\mathbf{n}_2 \in \Omega_{\Lambda_L \cup \{\delta\}} : \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset \\ \mathbf{n}_{2e_j} \text{ pair}}} \mathbf{w}(\mathbf{n}_2)} = \frac{\sinh(\beta J_{e_j})}{\cosh(\beta J_{e_j})}$$

et

$$\frac{\widehat{\mathbb{P}}_{\Lambda_L, \beta}^+(\{\mathbf{n}_{2e_j} \text{ pair non nul}\})}{\widehat{\mathbb{P}}_{\Lambda_L, \beta}^+(\{\mathbf{n}_{2e_j} \text{ impair}\})} = \frac{\sum_{\substack{\mathbf{n}_2 \in \Omega_{\Lambda_L \cup \{\delta\}} : \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset \\ \mathbf{n}_{2e_j} \text{ pair non nul}}} \mathbf{w}(\mathbf{n}_2)}{\sum_{\substack{\mathbf{n}_2 \in \Omega_{\Lambda_L \cup \{\delta\}} : \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset \\ \mathbf{n}_{2e_j} \text{ impair}}} \mathbf{w}(\mathbf{n}_2)} = \frac{\cosh(\beta J_{e_j}) - 1}{\sinh(\beta J_{e_j})}.$$

Ainsi, en posant

$$\Gamma_{x,y} = \prod_{j=0}^{m-1} \min \left\{ \frac{\cosh(\beta J_{e_j}) - 1}{\sinh(\beta J_{e_j})}, \frac{\sinh(\beta J_{e_j})}{\cosh(\beta J_{e_j})} \right\},$$

on a que

$$\Gamma_{x,y} \widehat{\mathbb{P}}_{\Lambda_L, \beta}^+(\mathbf{n}_2) \leq \widehat{\mathbb{P}}_{\Lambda_L, \beta}^+(\Psi(\mathbf{n}_2)).$$

Cela nous permet d'en conclure que

$$\sum_{\substack{\mathbf{n}_1 \in \Omega_{\Lambda_L} : \partial \mathbf{n}_1 = \emptyset \\ \mathbf{n}_2 \in \Omega_{\Lambda_L \cup \{\delta\}} : \partial \mathbf{n}_2 = \{x, y\}}} \mathbf{w}(\mathbf{n}_1) \mathbf{w}(\mathbf{n}_2) \mathbb{1}_{\{x \xrightarrow{\widehat{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}} \delta\}} \leq \Gamma_{x,y}^{-1} \sum_{\substack{\mathbf{n}_1 \in \Omega_{\Lambda_L} : \partial \mathbf{n}_1 = \emptyset \\ \mathbf{n}_2 \in \Omega_{\Lambda_L \cup \{\delta\}} : \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} \mathbf{w}(\mathbf{n}_1) \mathbf{w}(\mathbf{n}_2) \mathbb{1}_{\{x \xrightarrow{\widehat{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}} \delta\}}$$

En utilisant cela dans l'inégalité (6.1) nous obtenons que

$$\langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda_L, \beta}^+ - \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda_L, \beta}^\emptyset \leq \Gamma_{x,y}^{-1} \mathbb{P}_{\Lambda_L, \beta}^\emptyset \otimes \mathbb{P}_{\Lambda_L, \beta}^+(x \xrightarrow{\widehat{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}} \delta).$$

En prenant la limite quand $L \rightarrow \infty$, qui existe d'après le Théorème 4.1, nous avons que

$$0 \leq \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_\beta^+ - \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_\beta^\emptyset \leq \Gamma_{x,y}^{-1} \mathbb{P}_\beta(x \longleftrightarrow \infty).$$

On considère maintenant $\beta > 0$ tel que $\widetilde{M}_{LRO}(\beta) = 0$. D'après le Théorème 5.4 $\mathbb{P}_\beta(x \longleftrightarrow \infty) = 0$ donc pour tous $x, y \in \mathbb{Z}^d$, $\langle \sigma_x \sigma_y \rangle_\beta^+ = \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_\beta^\emptyset$. En utilisant l'inégalité FKG

$$0 \leq \langle \sigma_0 \rangle_\beta^+ \langle \sigma_x \rangle_\beta^+ \leq \langle \sigma_0 \sigma_y \rangle_\beta^+ = \langle \sigma_0 \sigma_x \rangle_\beta^\emptyset$$

pour tout $y \in \mathbb{Z}^d$. On a que $\langle \sigma_0 \rangle_\beta^+ = \langle \sigma_x \rangle_\beta^+$ par invariance par translation. Donc le membre de gauche ne dépend pas de x . L'hypothèse que la moyenne des $\langle \sigma_0 \sigma_x \rangle_\beta^\emptyset$ sur les translations est égale à 0 donne que $\langle \sigma_x \rangle_\beta^+ = 0$, i.e., $m^*(\beta) = 0$.

Ainsi, pourvu que $\widetilde{M}_{LRO}(\beta_c) = 0$, on a que $m^*(\beta_c) = 0$. □

6.1.1 La borne infrarouge et l'ordre à longue distance au paramètre critique

Il reste à établir que $\widetilde{M}_{LRO}(\beta_c(d)) = 0$ pour avoir la continuité de l'aimantation spontanée. C'est en effet le cas pour tout $d \geq 2$ dans le modèle plus-proches-voisins. Une preuve pour $d \geq 3$ dans le modèle plus-proche-voisins peut être obtenue en utilisant la *borne infrarouge* (ou borne de domination Gaussienne) [FSS76; Frö+78]. Celle-ci ne sera pas présentée ici.

Références

- [ADS15] Michael AIZENMAN, Hugo DUMINIL-COPIN et Vldas SIDORAVICIUS. “Random Currents and Continuity of Ising Model’s Spontaneous Magnetization”. In : *Commun. Math. Phys.* 334.2 (mars 2015), p. 719-742. ISSN : 1432-0916. DOI : [10.1007/s00220-014-2093-y](https://doi.org/10.1007/s00220-014-2093-y).
- [AF86] M. AIZENMAN et R. FERNÁNDEZ. “On the critical behavior of the magnetization in high-dimensional Ising models”. en. In : *J Stat Phys* 44.3 (août 1986), p. 393-454. ISSN : 1572-9613. DOI : [10.1007/BF01011304](https://doi.org/10.1007/BF01011304).
- [Aiz82] Michael AIZENMAN. “Geometric analysis of ϕ^4 fields and Ising models. Parts I and II”. English (US). In : *Communications in Mathematical Physics* 86.1 (mars 1982), p. 1-48. ISSN : 0010-3616. DOI : [10.1007/BF01205659](https://doi.org/10.1007/BF01205659).
- [BK89] R. M. BURTON et M. KEANE. “Density and uniqueness in percolation”. In : *Commun.Math. Phys.* 121.3 (sept. 1989), p. 501-505. ISSN : 1432-0916. DOI : [10.1007/BF01217735](https://doi.org/10.1007/BF01217735).
- [Dum16] Hugo DUMINIL-COPIN. *Graphical representations of lattice spin models*. Les cours Peccot. Spartacus-Idh, 2016, p. 110. ISBN : 978-2-36693-022-1.
- [FKG71] C. M. FORTUIN, P. W. KASTELEYN et J. GINIBRE. “Correlation inequalities on some partially ordered sets”. In : *Commun.Math. Phys.* 22.2 (juin 1971), p. 89-103. ISSN : 1432-0916. DOI : [10.1007/BF01651330](https://doi.org/10.1007/BF01651330).
- [Frö+78] Jürg FRÖHLICH, Robert ISRAEL, Elliot H. LIEB et Barry SIMON. “Phase transitions and reflection positivity. I. General theory and long range lattice models”. In : *Commun.Math. Phys.* 62.1 (août 1978), p. 1-34. ISSN : 1432-0916. DOI : [10.1007/BF01940327](https://doi.org/10.1007/BF01940327).
- [FSS76] J. FRÖHLICH, B. SIMON et T. SPENCER. “Infrared bounds, phase transitions and continuous symmetry breaking”. In : *Commun.Math. Phys.* 50.1 (fév. 1976), p. 79-95. ISSN : 1432-0916. DOI : [10.1007/BF01608557](https://doi.org/10.1007/BF01608557).
- [FV17] Sacha FRIEDLI et Yvan VELENIK. *Statistical Mechanics of Lattice Systems : A Concrete Mathematical Introduction*. Cambridge University Press, 2017. DOI : [10.1017/9781316882603](https://doi.org/10.1017/9781316882603).
- [GHS70] Robert B. GRIFFITHS, C. A. HURST et S. SHERMAN. “Concavity of Magnetization of an Ising Ferromagnet in a Positive External Field”. In : *Journal of Mathematical Physics* 11.3 (1970), p. 790-795. ISSN : 0022-2488. DOI : [10.1063/1.1665211](https://doi.org/10.1063/1.1665211).
- [OR22] David OPALIC et Ritvik RAMANAN RADHAKRISHNAN. *Translation invariant Gibbs states of the Ising model*. 2022.
- [Wae41] B. L. van der WAERDEN. “Die lange Reichweite der regelmäßigen Atomanordnung in Mischkristallen”. de. In : *Zeitschrift für Physik* 118.7 (juill. 1941), p. 473-488. ISSN : 0044-3328. DOI : [10.1007/BF01342928](https://doi.org/10.1007/BF01342928).
- [Yan52] C. N. YANG. “The Spontaneous Magnetization of a Two-Dimensional Ising Model”. In : *Phys. Rev.* 85 (5 mars 1952), p. 808-816. DOI : [10.1103/PhysRev.85.808](https://doi.org/10.1103/PhysRev.85.808).