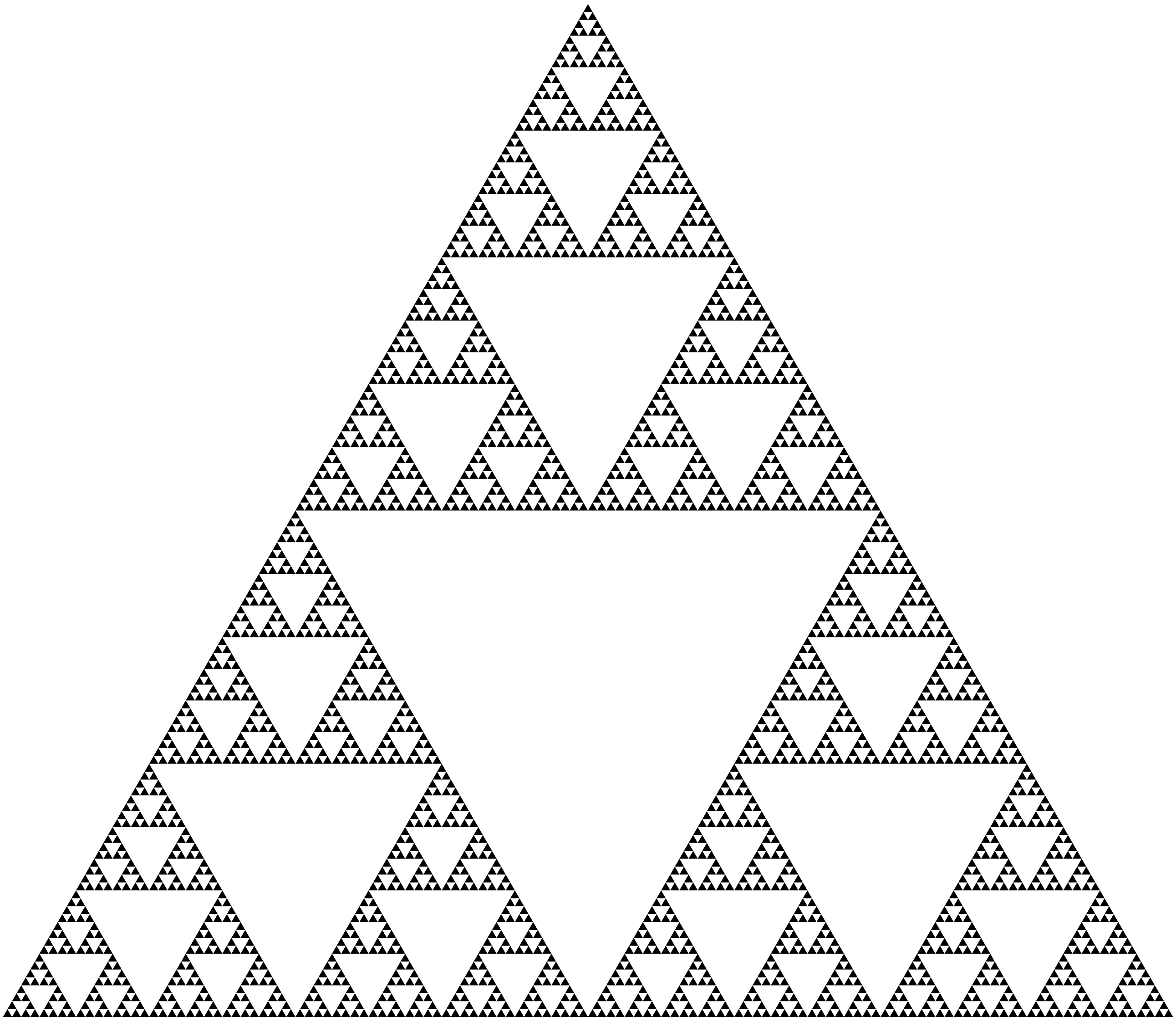
Analyse sur les fractales

Till RIGAUD

Encadrant : Baptiste DEVYVER



M1 Mathématiques Générales - Promotion 2022/2023

Table des matières

Dans ce document, nous commencerons par construire les ensembles auto-similaire sur un espace métrique complet (X, d), une structure principale qui nous guidera pour l'étude des fractales.
L'idée est la suivante : une fractale est un objet géométrique qui représente des motifs similaires sur une échelle arbitrairement fine, il semble donc légitime de vouloir exprimer une fractale comme un ensemble stable par image directe de contraction de lui-même, d'où la provenance de la notion "d'auto-similarité".
On peut voir d'une certaine manière ces constructions d'ensemble auto-similaire comme une extension du théorème de Banach-Picard, avec la donnée de non pas une seule application contractante, mais N applications contractante, et appliqué cette fois ci à des sous ensembles compact de X.

Par la suite on introduira la notion d'espace décalé, il s'agit de considérer un alphabet de N symboles et s'intéresser à l'ensemble des mots de longueur infini constitué de ces symboles.
Cette notion est étroitement reliée aux ensembles auto-similaire : on verra que l'on peux munir un espace décalé (que l'on notera Σ) d'une distance δ_r afin que (Σ, δ_r) soit un espace métrique complet, et on considérera des applications de décalage (qui seront des contractions) tel que Σ sera un ensemble auto-similaire par rapport à ces applications.
On définira par la suite une extension de la notion d'ensemble auto-similaire, que l'on nommera structure auto-similaire, et des notions tel que les ensembles critique, ensemble post-critique d'une structure auto-similaire.

Ensuite, nous nous intéresserons aux mesures de Bernoulli, aux mesures auto-similaires qui sont nécessaire pour aborder la notion de dimension de Hausdorff d'une partie bornée d'un espace métrique.

1 Construction des ensembles auto-similaires

Dans cette section, nous supposerons que (X, d) est un espace métrique complet et séparé .

Définition 1.1. On définit, $\forall A \subset X$ et $\forall r > 0$

$$U_r(A) = \bigcup_{x \in X} B(x, r)$$

Avec, $B(x, r)$ la boule ouverte centrée en x de rayon r.

On définit également,

$$C(X) = \{A \subset X \mid A \text{ est compact}\}$$

Nous allons maintenant munir $C(X)$ d'une distance δ :

Proposition 1.1 (Distance de Hausdorff)**.** *On définit,* $\forall A, B \in C(X)$,

$$\delta(A, B) = \inf \{r > 0 \mid B \subseteq U_r(A) \text{ et } A \subseteq U_r(B)\}$$

Alors, δ est une distance sur $C(X)$, et de plus, $(C(X), \delta)$ est un espace métrique complet.
On appellera cette distance la distance de Hausdorff.

Démonstration. On a bien, $\forall A, B \in C(X)$, $\delta(A, B) = \delta(B, A)$ par symétrie de la définition.

Si $\delta(A, B) = 0$, alors, $\forall n \in \mathbb{N}^*, B \subseteq U_{1/n}(A)$ donc, $\forall x \in A, \exists x_n \in B$ tel que $d(x, x_n) \leq \frac{1}{n}$
Or, comme B est compact, B est a *fortiori* fermé et comme $\lim_{n \to +\infty} d(x, x_n) = 0$, on a bien $x \in B$
Donc, $A \subseteq B$. De manière analogue, on a l'inclusion inverse $B \subseteq A$ et alors, $A = B$.

Soit $A, B, C \in C(X)$, et soit $s > \delta(B, C)$, $r > \delta(A, B)$.
Alors, en particulier : $C \subseteq U_s(B)$ et $B \subseteq U_r(A)$, donc, $C \subseteq U_s(U_r(A)) \subseteq U_{s+r}(A)$
On a de même, $A \subseteq U_r(B)$ et $B \subseteq U_s(C)$ donc, $A \subseteq U_r(U_s(C)) \subseteq U_{s+r}(C)$
Donc, en particulier, $\delta(A, C) < s + r$, ainsi en passant à la borne inférieure sur s : $\delta(A, C) \leq \delta(B, C) + r$, et en faisant de même pour r : $\delta(A, C) \leq \delta(B, C) + \delta(A, B)$ et alors, δ est bien une distance sur $C(X)$.

Montrons que $(C(X), \delta)$ est bien un espace métrique complet :

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $C(X)$, montrons que $B_n = \overline{\bigcup_{k \geq n} A_k}$ est une partie compacte de $C(X)$ pour tout entier naturel n.
Comme $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante pour l'inclusion, il suffit de montrer que B_1 est compact afin de démontrer que B_n est compact $\forall n \in \mathbb{N}^*$
Comme (X, d) est complet, il suffit de montrer que B_1 est précompact.
Soit donc $r > 0$, comme $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une est suite de Cauchy, $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n, m \geq N$, $\delta(A_n, A_m) \leq \epsilon$ et choisissons $\epsilon = \frac{r}{2}$
Ainsi, $\delta(A_n, A_N) \leq \frac{r}{2}$, on a donc $A_n \subseteq U_{\frac{r}{2}}(A_N)$ et ce $\forall n \geq N$
Comme A_N est compact,

$$\exists k_N \in \mathbb{N}^* \ , \ \exists \, (x_1, ..., x_{k_N}) \in X^{k_N} \ \text{ tel que } \ A_N \subseteq \overline{\bigcup_{i=1}^{k_N} B(x_i, \frac{r}{2})}$$

Donc, on a :

$$\bigcup_{i\geq N} A_i \subseteq U_{\frac{r}{2}}(A_N) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k_N} \overline{B(x_i,r)}$$

Ainsi, $\{x_1,...,x_{k_N}\}$ est un r-réseau de B_N.
Comme $A_1,...,A_{N-1}$ sont compacts, on a $\forall i \in [\![1,N-1]\!]$ on a un r-réseau I_i de A_i, et alors, $\left(\bigcup_{i=1}^{N-1} I_i\right) \cup (\{x_1,...,x_{k_N}\})$ est un r-réseau de B_1 et donc, B_1 est précompact.
comme $B_1 \subset X$ et (X,d) est complet, B_1 est compact, ce qui implique que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, B_n est compact.

Posons maintenant $A = \bigcap_{n\geq 1} B_n$
Comme $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non vide et décroissant pour l'inclusion, A est un compact non vide.
Soit $r > 0$, on a vu qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $B_n \subseteq U_r(A_N)$. Comme $A \subseteq B_n$, on a $A \subseteq U_r(A_N)$.

Montrons maintenant que $A_N \subseteq U_r(A)$.
On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $B_N \subseteq U_r(B_n)$, comme $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante pour l'inclusion, on a aussi $B_N \subseteq U_r(B_n)$ ce $\forall n \in [\![1,N-1]\!]$, d'où $A_N \subseteq B_N \subseteq U_r(A)$ et alors, $\delta(A_n,A) \leq r$, ce $\forall n \geq N$
On a bien ainsi $A_n \longrightarrow A$ pour δ, et alors $(C(X),\delta)$ est complet.

□

Lemme 1.1. *Soit $A_1,A_2,B_1,B_2 \in C(X)$, alors on a la majoration suivante :*

$$\delta(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \leq \max(\delta(A_1,B_1),\delta(A_2,B_2))$$

Démonstration. Soit $r > \max(\delta(A_1,B_1),\delta(A_2,B_2))$, alors, comme $r > \delta(A_1,B_1)$, on a $B_1 \subseteq U_r(A_1)$ comme $r > \delta(B_1,B_2)$, on a $B_2 \subseteq U_r(A_2)$ Ainsi, $B_1 \cup B_2 \subseteq U_r(A_1 \cup A_2)$ De manière symétrique, on a également $A_1 \cup A_2 \subseteq U_r(B_1 \cup B_2)$.
Cela nous indique que $r \geq \delta(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2)$, en faisant tendre r vers $\max(\delta(A_1,B_1),\delta(A_2,B_2))$, on obtient le résultat escompté. □

Lemme 1.2. *Soit $r < 1$ et soit f une fonction r-contractante de X dans X pour d, c'est à dire, $\forall a,b \in X$, $d(f(a),f(b)) \leq rd(a,b)$, alors : $\forall A,B \in C(X)$, $\delta(f(A),f(B)) \leq r\delta(A,B)$*

Démonstration. Premièrement, comme f est une contraction, f est continue de X dans X, donc, $\forall A \in C(X)$, on a bien $f(A) \in C(X)$ donc il fait bien sens de considérer pour $A,B \in C(X)$ l'expression $\delta(f(A),f(B))$.

Soit maintenant $s > 0$ tel que $A \subseteq U_s(B)$, et $B \subseteq U_s(A)$, soit $y \in f(B)$, on a bien $y \in f(U_s(A))$ c'est à dire, $\exists y' \in U_s(A)$ tel que, $y = f(y')$,
on a également $\forall x \in f(A), \exists x' \in A$ tel que $x = f(x')$, donc, $d(x,y) = d(f(x'),f(y')) \leq rd(x',y')$ et comme $y' \in U_s(A)$, $d(x',y') \leq s)$ d'où, $d(x,y) \leq rs$, ce qui implique que $y \in U_{sr}(f(A))$, ainsi, $f(B) \subseteq U_{sr}(f(A))$.
De manière symétrique, on arrive à $f(A) \subseteq U_{sr}(f(B))$, ainsi cela implique que $\delta(f(A),f(B)) \leq sr$, puis en faisant tendre s vers $\delta(A,B)$, on obtient bien le lemme voulu.

□

A l'aide de ces deux précédents lemmes, et de notre première proposition, on est maintenant à même de démontrer un théorème central permettant de définir la notion d'ensemble auto-similaires, relatifs à une donnée de N fonctions contractantes de X dans X.

Théorème 1.1. *Soit $N \in \mathbb{N}^*$, supposons que, $\forall i \in [\![1, N]\!]$, $f_i : X \longrightarrow X$ soit r_i-contractante pour d. Alors, $\exists! K \in C(X)$ tel que,*

$$K = \bigcup_{i=1}^{N} f_i(K)$$

Démonstration. Posons,

$$\forall A \in C(X)\ ,\ F(A) = \bigcup_{i=1}^{N} f_i(A)$$

Montrons alors que F est une contraction pour δ .
Soit $A, B \in C(X)$, on a

$$\delta(F(A), F(B)) = \delta\left(\bigcup_{i=1}^{N} f_i(A), \bigcup_{i=1}^{N} f_i(B)\right)$$

Or, le lemme 1.1 nous donne avec une récurrence que

$$\delta\left(\bigcup_{i=1}^{N} f_i(A), \bigcup_{i=1}^{N} f_i(B)\right) \leq \max_{i \in [\![1,N]\!]} \delta(f_i(A), f_i(B))$$

.
Or, d'après le lemme 1.2 , $\delta(F(A), F(B)) \leq \max_{i \in [\![1,N]\!]} r_i \delta(A, B)$, ainsi, en posant $R = \max_{i \in [\![1,N]\!]} r_i$, on a bien $R < 1$ et $\delta(F(A), F(B)) \leq R\delta(A, B)$ et F est alors bien une contraction.

D'après la proposition 1.1 , comme $(C(X), \delta)$ est complet, le théorème du point fixe de Banach-Picard nous affirme qu'il existe un unique $K \in C(X)$ tel que $K = F(K)$, de plus, un tel K étant donné par la limite de n en l'infini de la quantité $F^n(A)$, ce pour toute partie compacte A de X. □

Définition 1.2 (Ensemble auto-similaire)**.** Soit $N \in \mathbb{N}^*$, supposons que, $\forall i \in [\![1, N]\!]$, $f_i : X \longrightarrow X$ soit r_i-contractante pour d.
Alors, l'unique $K \in C(X)$ vérifiant

$$K = \bigcup_{i=1}^{N} f_i(K)$$

est appelé l'ensemble auto-similaire associé à $\{f_1, ..., f_n\}$

Exemple 1.1 (L'ensemble triadique de Cantor)**.** Considérons le cas où $X = [0, 1]$, muni de la distance euclidienne et les fonctions suivantes :

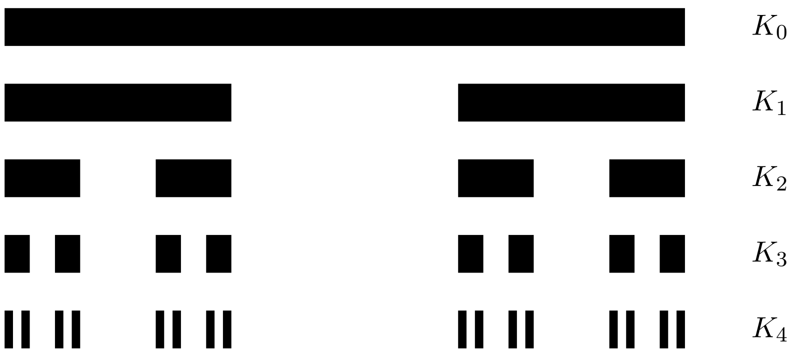
$$f_1 : \left|\begin{array}{rcl} [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \frac{x}{3} \end{array}\right.$$

$$f_2 : \left|\begin{array}{rcl} [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \frac{x+2}{3} \end{array}\right.$$

Alors, on peut définir l'ensemble triadique de Cantor K comme suit :
On pose $K_0 = [0, 1]$, et on définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$K_n = f_1(K_{n-1}) \cup f_2(K_{n-1})$$

Et on définit $K = \bigcap\limits_{n \geq 0} K_n$, voici une visualisation de la construction de l'ensemble K :



On peut remarquer que K est un ensemble compact :
Montrons premièrement que pour tout $n \in \mathbb{N}$, K_n est compact.
Effectivement, $K_0 = [0,1]$ est un ensemble compact, et si on suppose pour un entier $n > 0$ que K_n est compact, alors $f_1(K_n)$ et $f_2(K_n)$ sont compact comme image directe d'une fonction continue d'un compact, donc K_{n+1} est compact comme union de deux compact, et alors par récurrence K_n est compact pour tout entier n.
Ainsi, K est fermé par intersection de fermé, borné car contenu dans le segment $[0,1]$, et comme X est de dimension fini, être fermé borné est équivalent à être compact.

On a à présent

$$f_1(K) \cup f_2(K) = f_1\left(\bigcap_{n\geq 0} K_n\right) \cup f_2\left(\bigcap_{n\geq 0} K_n\right)$$

Comme f_1 et f_2 sont injectives, on a

$$f_1(K) \cup f_2(K) = \bigcap_{n\geq 0} f_1(K_n) \cup f_1(K_n) = \bigcap_{n\geq 0} K_{n+1}$$

Or, comme $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante pour l'inclusion, on a $\bigcap\limits_{n\geq 0} K_{n+1} = K_0 \cap \bigcap\limits_{n\geq 0} K_{n+1} = \bigcap\limits_{n\geq 0} K_n = K$.
Comme les fonctions f_1 et f_2 sont $\frac{1}{3}$ contractantes, par unicité des ensembles auto-similaire, on obtient que l'ensemble triadique de Cantor peut être en réalité vu comme l'ensemble auto-similaire associé à $\{f_1, f_2\}$.
On peut donc voir certaines fractales comme une construction donnée par des ensembles auto-similaire, en réalité, on peut voir chaque ensemble auto-similaire dans un espace euclidien comme une représentation fractale.

2 Ensembles décalés

Dans cette section, nous allons traiter la notion d'espace décalé, une structure fondamentale liée à la topologie des fractales.
De manière purement intuitive, il s'agit de prendre une collection finie de N symboles et de considérer l'ensemble formé des mots de longueur infini, cet espace sera défini comme l'espace décalé avec N symboles.
On verra par la suite que l'on peut munir un espace décalé d'une distance qui nous forme un espace métrique compact, et alors on sera en mesure de faire le lien avec la section précédente pour construire des ensembles auto-similaires sur des espaces décalés.

Définition 2.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $N \in \mathbb{N}^*$ on définit les objets suivants :

$$W_n^N = \{1, ..., N\}^n = \{w_1 w_2 ... w_n | w_i \in [\![1, N]\!]\}, \ \forall i \in [\![1, n]\!]\}$$

où W_n^N est défini comme l'ensemble des mots de longueur n par rapport aux symboles $\{1, ..., N\}$

$$W_0^N = \{\emptyset\}$$

avec $\emptyset$ défini comme le mot vide

$$W_*^N = \bigcup_{i \geq 1} W_i^N$$

W_*^N sera donc défini comme l'ensemble des mots de longueur finie
Pour $w \in W_*^N$, on notera aussi $|w|$ la longueur du mot w.

$$\Sigma^N = \{1, ..., N\}^{\mathbb{N}}$$

Σ^N sera défini comme l'espace décalé avec N symboles
On définit pour $n \in \mathbb{N}$ et $w = w_1 w_2 ... \in \Sigma^N, \tau \in W_*^N$ les applications suivantes

$$\sigma_\tau : \left| \begin{array}{ccc} \Sigma^N & \longrightarrow & \Sigma^N \\ w & \longmapsto & \tau w \end{array} \right.$$

$$\sigma^n : \left| \begin{array}{ccc} \Sigma^N & \longrightarrow & \Sigma^N \\ w & \longmapsto & w_{n+1} w_{n+2} ... \end{array} \right.$$

Avec pour $\tau = \tau_1 \tau_2 ... \tau_m$, la notation de concaténation $\tau w = \tau_1 \tau_2 ... \tau_m w_1 w_2 ...$
On définira également, pour $w \in W_*^N$, $\Sigma_w^N = \sigma_w(\Sigma^N)$.

Dans le reste de cette section, on se fixera $N > 0$ et on dénotera W_n^N, W_*^N , Σ^N, Σ_w^N par W_n, W_* , Σ , Σ_w.

Théorème 2.1. *Pour $w, \tau \in \Sigma$, $r < 1$ si $w \neq \tau$, alors on définit $\delta_r(w, \tau) = r^{s(w,\tau)}$ avec $s(w, \tau) = \min\{i \in \mathbb{N} \mid w_i \neq \tau_i\} - 1$ et si $w = \tau$, on pose $\delta_r(w, \tau) = 0$.*

Alors, (Σ, δ_r) est un espace métrique compact.

Démonstration. Soit $r < 1$, Montrons que δ_r est bien une distance sur Σ.
Par définition, $w = \tau \Leftrightarrow \delta_r(w, \tau) = 0$, et $\delta_r(w, \tau) = \delta_r(\tau, w)$ on a donc l'axiome de séparation et de symétrie. (on aussi que $\forall w, \tau \in \Sigma$, $\delta_r(w, \tau) \geq 0$)
Montrons maintenant l'inégalité triangulaire :
Remarquons premièrement une caractérisation de $s(w, \tau)$: pour $w, \tau \in \Sigma$: on a $(m = s(w, \tau)) \Leftrightarrow$

$(\forall i \in [\![1,m]\!]\ ,\ w_i = \tau_i$ et $w_{m+1} \neq \tau_{m+1}$) .
Soit $w, \tau, k \in \Sigma$ et supposons par l'absurde que l'on ait $\min(s(w,\tau), s(\tau,k)) > s(w,k)$.
Alors, notons $a = s(w,\tau)$ et $b = s(\tau,k)$, et supposons sans perte de généralité que $a \geq b$. On sait que :

$$\forall i \in [\![1,a]\!]\ ,\ w_i = \tau_i\ ,\ w_{a+1} \neq \tau_{a+1} \tag{1}$$

$$\forall i \in [\![1,b]\!]\ ,\ \tau_i = k_i\ ,\ \tau_{b+1} \neq k_{b+1} \tag{2}$$

en notant $c = s(w,k)$, on a

$$\forall i \in [\![1,c]\!]\ ,\ w_i = k_i\ ,\ w_{c+1} \neq k_{c+1}$$

Or, comme $a \geq b > c$, (1) nous affirme que $w_{c+1} = \tau_{c+1}$ et (2) nous affirme également que $\tau_{c+1} = k_{c+1}$, donc $w_{c+1} = k_{c+1}$, absurde.
Ainsi, on a pour tout $w, \tau \in \Sigma$, $\min(s(w,\tau), s(\tau,k)) \leq s(w,k)$, comme $r < 1$, on a

$$\delta_r(w,k) \leq \delta_r(w,\tau)$$

$$\delta_r(w,k) \leq \delta_r(\tau,k)$$

et, en sommant les deux inégalités, on obtient bien l'inégalité triangulaire voulu.
δ_r est donc bien une distance sur Σ.

Montrons maintenant que (Σ, δ_r) est un espace métrique compact.
Soit $\{w^n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ et montrons qu'il existe $\tau \in \Sigma$ tel que l'ensemble
$E_m = \{n \geq 1 \mid w_j^n = \tau_j\ ,\ \forall j \in [\![1,m]\!]\}$ soit de cardinal infini (avec la notation, w_j^n étant le j-ème symbole du terme $w^n \in \Sigma$)
Par récurrence, pour m=1 on a , $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_1^n \in [\![1,N]\!]$, ainsi, il existe $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante et au moins un $\tau_1 \in [\![1,N]\!]$ tel que $w_1^{\varphi(n)} = \tau_1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. (Donc E_1 est bien de cardinal infini)

Supposons maintenant l'existence de $m \in \mathbb{N}$, $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante et $\tau_1, ..., \tau_m \in [\![1,N]\!]$ tel que

$$\forall j \in [\![1,m]\!]\ ,\ w_j^{\varphi(n)} = \tau_j$$

on a , $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{m+1}^n \in [\![1,N]\!]$ et alors, comme précédemment,

$$\exists \tau_{m+1} \in [\![1,N]\!]\ ,\ \exists \psi\ :\ \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\ \ tel\ que\ \ \forall n \in \mathbb{N}, w_{m+1}^{\psi(n)} = \tau_{m+1}$$

Et alors,

$$\forall j \in [\![1,m+1]\!]\ ,\ w_j^{\varphi(\psi(n))} = \tau_j$$

On construit ainsi par récurrence une suite $\varphi_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ et $\tau \in \Sigma$ avec $\tau = \tau_1\tau_2...$ tel que
$\forall m \in \mathbb{N}$, $\forall j \in [\![1\ ,\ m]\!]$, $w_j^{\varphi_m(n)} = \tau_j$ et alors, par argument diagonal, en posant $\tilde{\varphi}(n) = \varphi_n(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a bien $w^{\tilde{\varphi}(n)} \longrightarrow \tau$ pour δ_r.
Comme dans un espace métrique, être compact est équivalent à être séquentiellement compact, (Σ, δ_r) est un espace métrique compact.

□

Pour le restant de ce document, on se fixera définitivement un réel $r < 1$.
On peut remarquer maintenant que pour $i \in [\![1,N]\!]$, $\sigma_i\ :\ \Sigma \longrightarrow \Sigma$ est une similitude de rapport r.
Effectivement, on a

$$\forall \tau, w \in \Sigma\ ,\ \delta_r(\sigma_i(w), \sigma_i(\tau)) = \delta_r(iw, i\tau) = r^{s(w,\tau)+1} = r\delta_r(w,\tau)$$

En l'occurrence, σ_i est une r-contraction, et on a

$$\Sigma = \bigcup_{i=1}^{N} \Sigma_i \Rightarrow \Sigma = \bigcup_{i=1}^{N} \sigma_i(\Sigma)$$

Et alors, Σ est l'ensemble auto-similaire associé à $\{\sigma_1, ..., \sigma_N\}$.

Théorème 2.2. *Soit $K \subseteq X$ l'ensemble auto-similaire associé à $\{f_1, ..., f_N\}$*
Pour $\tau \in W_*$ avec $\tau = \tau_1 ... \tau_m$, posons $f_\tau = f_{\tau_1} \circ f_{\tau_2} \circ ... \circ f_{\tau_m}$ ainsi que $K_\tau = f_\tau(K)$, on a alors

$$\forall w \in \Sigma \text{ avec } w = w_1 w_2 ... \ , \ \exists! x_w \in K \ \ \textit{tel que} \ \ \bigcap_{m \geq 1} K_{w_1 ... w_m} = \{x_w\}$$

En posant

$$\pi : \left| \begin{array}{ccc} \Sigma & \longrightarrow & K \\ w & \longmapsto & x_w \end{array} \right.$$

Alors, π est une application continue, surjective et on a la relation suivante : $\forall i \in [\![1, N]\!]$, $\pi \circ \sigma_i = f_i \circ \pi$.

Par abus le langage on sera parfois amené à confondre $\bigcap_{m \geq 1} K_{w_1 ... w_m}$ avec le singleton qu'il contient, soit $\pi(w)$.

Démonstration. Soit $w \in \Sigma$ tel que $w = w_1 w_2 ...$, alors on a $\forall m \in \mathbb{N}^*$,

$$K_{w_1 ... w_{m+1}} = f_{w_1 ... w_m}(K_{w_{m+1}}) \subseteq f_{w_1 ... w_m}(K) = K_{w_1 ... w_m}$$

Puisque $(K_{w_1 ... w_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de compact (car f_τ est continue $\forall \tau \in W_*$, l'image d'un compact par une application continue est un compact) et est décroissante pour l'inclusion, on sait alors que $\bigcap_{m \geq 1} K_{w_1 ... w_m}$ est (un compact) non vide.
Puisque les f_i sont par hypothèse r_i-contractantes pour $i \in [\![1, N]\!]$, en posant $R = \max\{r_i \mid i \in [\![1, N]\!]\}$, comme $R < 1$, les f_i sont R-contractantes et alors

$$\operatorname{diam}(f_i(K)) = \sup_{x,y \in f_i(K)} (d(x, y)) \leq R \sup_{x,y \in K} (d(x, y)) = R \operatorname{diam}(K)$$

Par récurrence, on obtient $\operatorname{diam}(K_{w_1 ... w_m}) \leq R^m \operatorname{diam}(K)$ et ce, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.
Cela implique que $\operatorname{diam}(\bigcap_{m \geq 1} K_{w_1 ... w_m}) = 0$, et comme $\bigcap_{m \geq 1} K_{w_1 ... w_m}$ est non vide, il s'agit d'un singleton.

L'application π est donc bien définie, montrons que π est continue :
Soit $\epsilon > 0$, alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $R^m \operatorname{diam}(K) \leq \epsilon$
En posant $\lambda = r^m$, si on prends $w, \tau \in \Sigma$ tel que $\delta_r(w, \tau) \leq \lambda$, alors $\forall i \in [\![1, m]\!]$, $w_i = \tau_i$ et dans ce cas, $K_{w_1 ... w_m} = K_{\tau_1 ... \tau_m}$
Or, $\pi(w) \in K_{w_1 ... w_m}$ et $\tau \in K_{\tau_1 ... \tau_m}$ donc

$$d(\pi(x), \pi(\tau)) \leq \operatorname{diam}(K_{w_1 ... w_m}) \leq R^m \operatorname{diam}(K) \leq \epsilon$$

Et ainsi, π est bien continue.

Montrons maintenant que $\pi \circ \sigma_i = f_i \circ \pi$.
Soit $i \in [\![1, N]\!]$ et $w = w_1 w_2 .. \in \Sigma$, alors

$$\{\pi(\sigma_i(w))\} = \bigcap_{m \geq 1} K_{\sigma_i(w_1 ... w_m)} = \bigcap_{m \geq 1} K_{i w_1 ... w_m} = \bigcap_{m \geq 1} f_i(K_{w_1 ... w_m}) = f_i\left(\bigcap_{m \geq 1} K_{w_1 ... w_m}\right) = \{f_i(\pi(w))\}$$

Montrons maintenant que π est surjective.
D'après une remarque précédente, Σ est l'ensemble auto-similaire associé à $\{\sigma_1, ..., \sigma_N\}$, ainsi, $\Sigma = \bigcup_{i=1}^{N} \sigma_i(\Sigma)$ et alors, on a

$$\pi(\Sigma) = \pi\left(\bigcup_{i=1}^{N} \sigma_i(\Sigma)\right) = \bigcup_{i=1}^{N} f_i(\pi(\Sigma)) \quad (\text{car } \pi \circ \sigma_i = f_i \circ \pi)$$

Et alors, $\pi(\Sigma)$ est l'ensemble auto-similaire associé à $\{f_1, ..., f_N\}$, par unicité des ensembles auto-similaires, $K = \pi(\Sigma)$, π est bien surjective. $\square$

Proposition 2.1. *Soit $w \in W_*$, posons $\dot{w} = ww... \in \Sigma$*
Alors, $\pi(\dot{w})$ est le seul point fixe de f_w.

Démonstration. Soit $w \in W_*$, prouvons premièrement que $\pi \circ \sigma_w = f_w \circ \pi$.

La propriété étant vraie pour tout mot de longueur 1 (voir théorème 2.1), supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout mot $\tau \in W_n$ on ait $\pi \circ \sigma_\tau = f_\tau \circ \pi$.
Soit $\kappa \in W_{n+1}$, alors, $\exists i \in [\![1, N]\!]$ et $\exists \tau \in W_n$ tel que $\kappa = i\tau$.
Alors, on a

$$f_{i\tau} \circ \pi = f_i(f_\tau \circ \pi) = f_i(\pi \circ \sigma_\tau) = (f_i \circ \pi) \circ \sigma_\tau = (\pi \circ \sigma_i) \circ \sigma_\tau = \pi \circ \sigma_{i\tau}$$

Donc, la propriété est vraie pour tout mot de longueur $n + 1$, et par récurrence, on a prouvé ce premier résultat.

Maintenant, comme par définition $\sigma_w(\dot{w}) = \dot{w}$, on obtient $f_w(\pi(\dot{w})) = \pi(\sigma_w(\dot{w})) = \pi(\dot{w})$ donc, $\pi(\dot{w})$ est un point fixe de f_w, mais comme f_w est une contraction, le théorème de Banach-Picard nous affirme qu'il est unique. $\square$

Proposition 2.2. *Supposons que $\forall i \in [\![1, N]\!]$, f_i est injective.*
Alors, $\forall w, \tau \in \Sigma$ avec $w \neq \tau$, on a équivalence entre les deux propriétés suivantes :

$$i) \quad \pi(w) = \pi(\tau)$$

$$ii) \quad \pi(\sigma^{s(w,\tau)}(w)) = \pi(\sigma^{s(w,\tau)}(\tau))$$

Démonstration. *i)* $\Rightarrow$ *ii)* : Soit $w = w_1w_2... \in \Sigma$, $\tau = \tau_1\tau_2... \in \Sigma$ alors on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $w = \sigma_{w_1w_2...w_n} \circ \sigma^n(w)$.
Donc, en particulier pour $m = s(w, \tau)$, on a :

$$\pi(w) = (\pi \circ \sigma_{w_1w_2...w_m}) \circ \sigma^m(w) = f_{w_1w_2...w_m}(\pi(\sigma^m(w))$$

De même,

$$\pi(\tau) = f_{\tau_1\tau_2...\tau_m}(\pi(\sigma^m(\tau))$$

Or, comme $m = s(w, \tau)$, $\forall i \in [\![1, m]\!]$ on a $w_i = \tau_i$ et alors, puisque par hypothèse $\pi(w) = \pi(\tau)$, on a

$$f_{w_1w_2...w_m}(\pi(\sigma^m(w)) = f_{w_1w_2...w_m}(\pi(\sigma^m(\tau))$$

Puisque qu'une composée de fonctions injective est toujours injective, on obtient bien $\pi(\sigma^m(w)) = \pi(\sigma^m(\tau))$

ii) $\Rightarrow$ *i)* : en posant $m = s(w, \tau)$, on a $w_1w_2...w_m = \tau_1\tau_2...\tau_m$ et on a donc :

$$\pi(w) = f_{w_1w_2...w_m}(\pi(\sigma^m(w)) = f_{\tau_1\tau_2...\tau_m}(\pi(\sigma^m(w)) = f_{\tau_1\tau_2...\tau_m}(\pi(\sigma^m(\tau)) = \pi(\tau)$$

$\square$

3 Structure auto-similaire

Pour S un ensemble fini, on définit l'ensemble décalé avec S symboles de manière analogue à la section précédente.
En d'autres termes, on posera $\Sigma(S) = S^{\mathbb{N}}$ l'ensemble décalé avec S symboles, $W_n(S) = S^n$, $W_*(S) = \bigcup_{n\geq 1} W_n(S)$ et pour $w \in \Sigma(S)$, $\tau \in W_*(S)$, $n \in \mathbb{N}$ on définira également $\sigma_\tau(w) = \tau w$, $\sigma^n(w_1w_2...) = w_{n+1}w_{n+2}...$, $\Sigma_\tau(S) = \sigma_\tau(\Sigma(S))$.
Si le contexte est clair, on notera également $\Sigma(S), W_n(S), W_*(S), \Sigma_\tau(S)$ par $\Sigma, W_n, W_*, \Sigma_\tau$.
On peut remarquer que l'ensemble des résultats obtenus à la section précédente sur les espaces décalés à N symboles sont toujours valides pour les ensembles décalés à S symboles.

Définition 3.1 (Structure auto-similaire)**.** Soit (K, d) un espace métrique compact, S un ensemble fini.
Posons $\Sigma = S^{\mathbb{N}}$ et , $\forall i \in S$, $F_i : K \longrightarrow K$ est une application injective continue.
Alors, le triplet $\mathscr{L} = \{K, S, \{F_i\}_{i\in S}\}$ est appelé une structure auto-similaire si par définition il existe une application $\pi : \Sigma \longrightarrow K$ continue surjective tel qu'on ait la relation $\forall i \in S$, $F_i \circ \pi = \pi \circ \sigma_i$

On peut remarquer que d'après la section précédente, si $S = [\![1, N]\!]$ avec $N \in \mathbb{N}^*$, et si l'on se donne un ensemble auto-similaire K relatif à $\{f_1, ..., f_N\}$, alors $\{K, S, \{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}\}$ est bien une structure auto-similaire.

Proposition 3.1. *Si $\{K, S, \{F_j\}_{i\in S}\}$ est une structure auto-similaire, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour $\tau = \tau_1\tau_2...\tau_n \in W_n$, si on pose $F_\tau = F_{\tau_1} \circ F_{\tau_2} \circ ... \circ F_{\tau_n}$, et en posant également $K_\tau = F_\tau(K)$, on a le fait suivant*

$$\forall w \in \Sigma \text{ avec } w = w_1w_2... , \bigcap_{m\geq 1} K_{w_1...w_m} = \{\pi(w)\}$$

Ainsi, l'application π est unique et est définie par la formule ci-dessus.

Démonstration. Premièrement, nous pouvons montrer que $\forall w \in W_*$, on a toujours la relation
$F_w \circ \pi = \pi \circ \sigma_w$.

La propriété $F_w \circ \pi = \pi \circ \sigma_w$ étant vraie par définition pour tout mot de longueur 1, supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout mot $\tau \in W_n$ on ait $F_\tau \circ \pi = \pi \circ \sigma_\tau$.
Soit $\kappa \in W_{n+1}$, alors, $\exists i \in S$ et $\exists \tau \in W_n$ tel que $\kappa = i\tau$.
Alors, on a

$$F_\kappa \circ \pi = F_{i\tau} \circ \pi = F_i(F_\tau \circ \pi) = F_i(\pi \circ \sigma_\tau) = (F_i \circ \pi) \circ \sigma_\tau = (\pi \circ \sigma_i) \circ \sigma_\tau = \pi \circ \sigma_{i\tau} = \pi \circ \sigma_\kappa$$

(il s'agit ici d'une preuve analogue à celle faite dans la proposition 2.1)

Cela nous indique que, $\forall w = w_1w_2... \in \Sigma$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\pi(w) = \pi(\sigma_{w_1w_2...w_n}(\sigma^n(w)) = F_{w_1w_2...w_n}(\pi(\sigma^n(w)) \in F_{w_1w_2...w_n}(K) = K_{w_1w_2...w_n}$$

d'où, $\pi(w) \in \bigcap_{n\geq 1} K_{w_1w_2...w_n}$.

Soit maintenant $x \in \bigcap_{n\geq 1} K_{w_1w_2\ldots w_n}$, autrement dit, pour $m \in \mathbb{N}^*$, $\exists x_m \in K$ tel que $x = F_{w_1w_2\ldots w_m}(x_m)$.
Par hypothèse, π est surjective, donc $\exists \tau_m \in \Sigma$ tel que $x_m = \pi(\tau_m)$, on a alors

$$x = (F_{w_1w_2\ldots w_m} \circ \pi)(\tau_m) = \pi(\sigma_{w_1w_2\ldots w_m}(\tau_m)) = \pi(\tilde{\tau}_m)$$

Avec $\tilde{\tau}_m = \sigma_{w_1w_2\ldots w_m}(\tau_m) \in \Sigma_{w_1w_2\ldots w_m}$.

Or, $\delta_r(\tilde{\tau}_m, w) \leq r^m \longrightarrow 0$ lorsque $m \longrightarrow +\infty$, comme π est par hypothèse continue, $d(\pi(\tilde{\tau}_m), \pi(w)) \longrightarrow 0$ lorsque $m \longrightarrow +\infty$, d'où puisque $x = \pi(\tilde{\tau}_m)$, on a bien $d(x, \pi(w)) = 0$ donc $\pi(w) = x$ et alors, l'ensemble $\bigcap_{n\geq 1} K_{w_1w_2\ldots w_n}$ est réduit au singleton $\{\pi(w)\}$, ainsi l'application π est unique, et est bien définie par la formule ci-dessus.

$\square$

Définition 3.2. Soit $\mathscr{L} = \{K, S, \{F_i\}_{i\in S}\}$ une structure auto-similaire.
On définit les objets suivants

$$C_{\mathscr{L}} = \bigcup_{i,j\in S, i\neq j} (F_i(K) \cap F_j(K))$$

$$\mathscr{C}_{\mathscr{L}} = \pi^{-1}(C_{\mathscr{L}})$$

$$\mathscr{P}_{\mathscr{L}} = \bigcup_{n\geq 1} \sigma^n(\mathscr{C}_{\mathscr{L}})$$

$$V_0 = \pi(\mathscr{P}_{\mathscr{L}})$$

$C_{\mathscr{L}}$ sera appelé l'ensemble critique de $\mathscr{L}$, et $\mathscr{P}_{\mathscr{L}}$ sera appelé l'ensemble post-critique de $\mathscr{L}$.

Pour la suite, on se fixera $\mathscr{L} = \{K, S, \{F_i\}_{i\in S}\}$ une structure auto-similaire, et dans ce contexte on notera à présent $C, \mathscr{C}, \mathscr{P}, V_0$ à la place de $C_{\mathscr{L}}, \mathscr{C}_{\mathscr{L}}, \mathscr{P}_{\mathscr{L}}, V_0(\mathscr{L})$.

Proposition 3.2. *On a*

i) $\pi^{-1}(V_0) = \mathscr{P}$

ii) *Si pour* $w, \tau \in W_*$ *on a* $\Sigma_w \cap \Sigma_\tau = \emptyset$, *alors* $K_w \cap K_\tau = F_w(V_0) \cap F_\tau(V_0)$

iii) $\mathscr{C} = \emptyset \Leftrightarrow \pi$ *est injective*

Démonstration. Preuve de *i)* : Montrons $\pi^{-1}(V_0) \subseteq \mathscr{P}$.

Soit $w \in \pi^{-1}(V_0)$, *i.e.* $\exists v \in \mathscr{P}$ tel que $\pi(w) = \pi(v)$, d'où $\exists n \in \mathbb{N}^*$, $\exists \tau \in \mathscr{C}$ tel que $\pi(w) = \pi(\sigma^n(\tau))$.
Posons $\kappa = \sigma_{\tau_1\ldots\tau_n}(w)$, on obtient :

$$\pi(\kappa) = (\pi \circ \sigma_{\tau_1\ldots\tau_n})(w) = F_{\tau_1\ldots\tau_m}(\pi(w)) = (F_{\tau_1\ldots\tau_m} \circ \pi)(\sigma^m(\tau)) = \pi(\sigma_{\tau_1\ldots\tau_m}(\sigma^m(\tau)) = \pi(\tau)$$

Or, comme $\tau \in \mathscr{C}$, on a bien $\pi(\kappa) = \pi(\tau) \in C$ d'où, $\kappa \in \mathscr{C}$.
Or, par construction, $\sigma^m(\kappa) = w$ et $\sigma^m(\kappa) \in \mathscr{P}$, donc finalement, $w \in \mathscr{P}$.
L'autre inclusion étant immédiate, car on a nécessairement pour toute application $f : \Sigma \longrightarrow K$, pour

toute partie A de Σ la relation $A \subseteq f^{-1}(f(A))$, ainsi, $\mathscr{P} = \pi^{-1}(V_0)$.

Preuve de *ii)* : Soient $w, \tau \in W_*$ tel que $\Sigma_w \cap \Sigma_\tau = \emptyset$ et montrons que $F_w(K) \cap F_\tau(K) \subseteq F_w(V_0) \cap F_\tau(V_0))$.

Soit $x \in F_w(K) \cap F_\tau(K)$. *i.e.* $\exists a, b \in \Sigma$ tel que $x = \pi(wa) = \pi(\tau b)$.
Comme $\Sigma_w \cap \Sigma_\tau = \emptyset$, $\exists k \in \mathbb{N}^*$ tel qu'on ait :

$$k < |w|,\ k < |\tau|\ et,\ \forall i \in [\![1, k]\!],\ w_i = \tau_i\ et\ w_{k+1} \neq \tau_{k+1}$$

On a $\pi(wa) = F_{w_1 \dots w_k}(\pi(\sigma^k(wa)))$ et $\pi(\tau b) = F_{\tau_1 \dots \tau_k}(\sigma^k(\tau b)))$
Mais, $w_1 \dots w_k = \tau_1 \dots \tau_k$ et comme $F_{w_1 \dots w_k}$ est injective, on obtient $\pi(\sigma^k(wa)) = \pi(\sigma^k(\tau b)$, Or

$$\pi(\sigma^k(wa)) = \bigcap_{m \geq 1} F_{(\sigma^k(wa))_1 \dots (\sigma^k(wa))_m}(K) \subseteq F_{(\sigma^k(wa))_1}(K) = F_{w_{k+1}}(K)$$

Puisque l'on a $(\sigma^k(wa))_1 = w_{k+1}$ par choix de $k < |w|$.

Symétriquement, $\pi(\sigma^k(\tau b)) \subseteq F_{\tau_{k+1}}(K)$ on a alors :

$$\pi(\sigma^k(wa)) \in F_{w_{k+1}}(K) \cap F_{\tau_{k+1}}(K)$$

Comme $w_{k+1} \neq \tau_{k+1}$, on obtient que $\sigma^k(wa) \in \mathscr{C}$.
Or, $k < |w|$, donc $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $k + n = |w|$ et alors,

$$a = \sigma^{k+n}(wa) = \sigma^n(\sigma^k(wa))$$

Comme $\sigma^k(wa) \in \mathscr{C}$, $a \in \mathscr{P}$.

De manière analogue, on conclut que $b \in \mathscr{P}$, d'où $\pi(a), \pi(b) \in V_0$

Cela nous amène à

$$x = \pi(wa) = (\pi \circ \sigma_w)(a) = F_w(\pi(a)) \in F_w(V_0)$$
$$x = \pi(\tau b) = (\pi \circ \sigma_\tau)(b) = F_\tau(\pi(b)) \in F_\tau(V_0)$$

Ce qui nous affirme finalement que $x \in F_w(V_0) \cap F_\tau(V_0)$ d'où $F_w(K) \cap F_\tau(K) \subseteq F_w(V_0) \cap F_\tau(V_0))$.
Et comme $F_w(V_0) \cap F_\tau(V_0) \subseteq F_w(K) \cap F_\tau(K)$, on a égalité .

Preuve de *iii)* : Si π est injective, supposons que $\exists i, j \in S$ tel que $F_i(K) \cap F_j(K) \neq \emptyset$.

Alors, comme π est surjective, $\exists w \in \Sigma$ tel que $\pi(w) \in F_i(K) \cap F_j(K)$.
Puisque $\pi(w) \in F_i(K)$, alors nécessairement, $\exists \tau \in \Sigma$ tel que $\pi(w) = \pi(i\tau)$, de même, on a l'existence de $\kappa \in \Sigma$ tel que $\pi(w) = \pi(j\kappa)$, et par injectivité de π, $i\tau = j\kappa$, absurde car $i \neq j$. donc $F_i(K) \cap F_j(K) = \emptyset$ et alors il s'en suit que $\mathscr{C} = \emptyset$.

Par contraposition, si π est non injective, d'après la proposition 2.2, si il existe $w, \tau \in \Sigma$ tel que $\pi(w) = \pi(\tau)$ et $w \neq \tau$, alors en prenant $m = s(w, \tau)$, on a $\pi(\sigma^m(w)) = \pi(\sigma^m(\tau))$.

En posant $w = w_1 w_2 \dots$ et $\tau = \tau_1 \tau_2 \dots$, on a $(\sigma^m(w))_1 = w_{m+1}$, $(\sigma^m(\tau))_1 = \tau_{m+1}$ ainsi,

$$\pi(\sigma^m(w)) = \bigcap_{k \geq 1} K_{w_{m+1} \dots w_{m+k}} \subseteq K_{w_{m+1}}$$

$$\pi(\sigma^m(w)) = \pi(\sigma^m(\tau)) \subseteq K_{\tau_{m+1}}$$

On a donc $F_{w_{m+1}} \cap F_{\tau_{m+1}} \neq \emptyset$ or, par choix de $m = s(w,\tau)$, on a bien $w_{m+1} \neq \tau_{m+1}$ et alors $\mathscr{C} \neq \emptyset$. $\square$

Proposition 3.3. *Soit $x \in K$, et soit $m \geq 1$, posons*

$$K_{m,x} = \bigcup_{\substack{w \in W_n \\ x \in K_w}} K_w$$

Alors, $\{K_{m,x}\}_{m\geq 0}$ est un système fondamental de voisinage de x.

Démonstration. Montrons que pour $m \geq 1$, $K_{m,x}$ est un voisinage de x.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, Prenons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ tel que $x_n \longrightarrow x$ pour d.
Alors, comme π est surjective, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists w^n \in \Sigma$ tel que $\pi(w^n) = x_n$.
Comme Σ est compact, $\exists w \in \Sigma$, $\exists \varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante tel que $w^{\varphi(n)} \longrightarrow w$ pour δ_r.
Par continuité de π, $\pi(w^{\varphi(n)}) \longrightarrow \pi(w)$ pour d.
Donc, par unicité de la limite, $\pi(w) = x$ et $\pi(w^{\varphi(n)}) \longrightarrow x$ pour d.

Comme $w^{\varphi(n)} \longrightarrow w$ pour δ_r, il existe donc $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq N$ on ait $\delta_r(w^{\varphi(n)}, w) \leq r^m$, donc , $\forall i \in [\![1,m]\!]$, $w_i^{\varphi(n)} = w_i$.

Cela implique donc,

$$\begin{aligned} x_{\varphi(n)} = \pi(w^{\varphi(n)}) &= (\pi \circ \sigma_{(w^{\varphi(n)})_1 (w^{\varphi(n)})_2 \ldots (w^{\varphi(n)})_m})(\sigma^m(w^{\varphi(n)}) \\ &= (\pi \circ \sigma_{w_1 w_2 \ldots w_m})(\sigma^m(w^{\varphi(n)})) \\ &= F_{w_1 w_2 \ldots w_m}(\pi(\sigma^m(w^{\varphi(n)}) \in K_{w_1 w_2 \ldots w_m} \end{aligned}$$

Ainsi, comme on a de plus $x \in K_{w_1 w_2 \ldots w_m}$ car $x = \pi(w) \subseteq K_{w_1 w_2 \ldots w_m}$, on a $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que, $\forall n \geq N$, $x_{\varphi(n)} \in K_{m,x}$. Ainsi, $K_{m,x}$ est bien un voisinage de x.

Afin de montrer maintenant que $\{K_{m,x}\}_{m\geq 1}$ est un système fondamental de voisinage de x, il est suffisant de prouver que $\lim\limits_{m \to +\infty} \operatorname{diam}(K_{m,x}) = 0$, ce faisant, pour V_x un voisinage de x donné, il existera $m \geq 1$ tel que $K_{m,x} \subseteq V_x$.

Commençons par montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \max\limits_{w \in W_n} (K_w) = 0$.
Par l'absurde, supposons qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $w(n) \in W_n$ tel que $\inf\limits_{n\geq 0} \operatorname{diam}(K_{w^n}) \geq \epsilon$.

Alors, on peut prendre $x_n, y_n \in K_{w^n}$ tel que l'on ait $d(x_n, y_n) \geq \dfrac{\operatorname{diam}(K_{w^n})}{2} \geq \dfrac{\epsilon}{2}$.

Comme π est surjective, $\exists w^*(n), w_*(n) \in \Sigma$ tel que $x_n = \pi(w^*(n))$ et $y_n = \pi(w_*(n))$.
On peut remarquer que l'on peut choisir $w_*(n) \in \Sigma_{w(n)}$ et $w^*(n) \in \Sigma_{w(n)}$.
Effectivement, cela est lié au fait qu'il existe $k \in K$ tel que $x_n = F_{w(n)}(k)$, et par surjectivité de π, $\exists \tau \in \Sigma$ tel que l'on ait $\pi(\tau) = k$, d'où

$$x_n = (F_{w(n)} \circ \pi)(\tau) = \pi(\sigma_{w(n)}(\tau))$$

Et alors, on pose $w^*(n) = \sigma_{w(n)}(\tau) \in \Sigma_{w(n)}$.
De manière analogue pour y_n, on peut choisir $w_*(n) \in \Sigma_{w(n)}$.

Puisque $w_*(n) \in \Sigma_{w(n)}$ et $w^*(n) \in \Sigma_{w(n)}$, on a le fait que $\delta_r(w^*(n), w_*(n)) \leq r^n$ d'où, $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta_r(w^*(n), w_*(n)) = 0$.
Par continuité de π,

$$\lim_{n\to+\infty}(d(x_n, y_n)) = \lim_{n\to+\infty} d(\pi(w^*(n), \pi(w_*(n)) = 0$$

Ce qui est absurde, car $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $d(x_n, y_n) \geq \frac{\epsilon}{2}$.

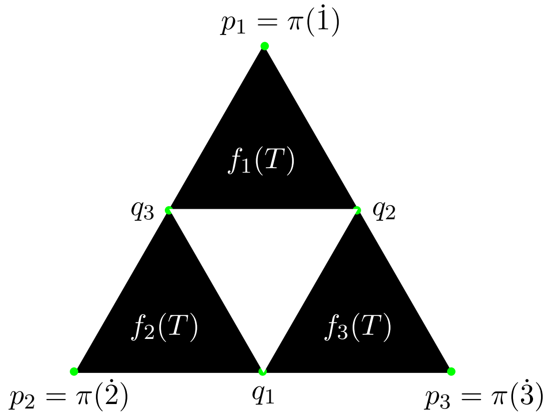
Ainsi, on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} \max\limits_{w\in W_n} \operatorname{diam}(K_w) = 0$ donc a *fortiori*, $\lim\limits_{n\to+\infty} \max\limits_{\substack{w\in W_n \\ x\in K_w}} \operatorname{diam}(K_w) = 0$, et donc

$$\operatorname{diam}(K_{m,x}) = \operatorname{diam}(\bigcup_{\substack{w\in W_m \\ x\in K_w}} K_w) \leq 2 \max_{\substack{w\in W_m \\ x\in K_w}} \operatorname{diam}(K_w)$$

Donc, $\lim\limits_{m\to+\infty} \operatorname{diam}(K_{m,x}) = 0$, $K_{m,x}$ est donc bien un système fondamental de voisinage de x.

$\square$

Exemple 3.1 (Triangle de Sierpiński)**.** Soit $X = \mathbb{C}$ muni de sa distance euclidienne et $\Sigma = \{1, 2, 3\}$, considérons le triangle équilatéral $T \subseteq \mathbb{C}$ donné par ses sommets $\{p_1, p_2, p_3\}$ avec $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{C}$.
Pour $1 \leq i \leq 3$, considérons les applications suivante qui à $z \in \mathbb{C}$ associe $f_i(z) = \frac{z-p_i}{2}$, alors, le triangle de Sierpiński est défini comme l'ensemble auto-similaire K associé à $\{f_1, f_2, f_3\}$



L'illustration ci-dessus permet de se représenter le domaine de définition des différentes fonction f_1, f_2, f_3, de manière intuitive, elles contractent le triangle équilatéral en divisant sa taille par 3 et le déplacent de part et d'autre des différents sommets.

En définissant $F(A) = f_1(A) \cup f_2(A) \cup f_3(A)$ pour une partie $A \subseteq T$, et une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $T_0 = T$, et pour tout $n > 0$, $T_n = F(T_{n-1})$, on a $K = \bigcap\limits_{n\geq 0} T_n$.

De cette manière, on remarque donc que $K \subseteq T$ et

$$f_1(K) \cap f_2(K) = f_1(T) \cap f_2(T) = \{q_3\}$$

$$f_1(K) \cap f_3(K) = f_1(T) \cap f_3(T) = \{q_2\}$$

$$f_2(K) \cap f_3(K) = f_2(T) \cap f_3(T) = \{q_1\}$$

On a , $\pi^{-1}(\{q_1\}) = \{2\dot{3}, 3\dot{2}\}$, $\pi^{-1}(\{q_2\}) = \{1\dot{3}, 3\dot{1}\}$, $\pi^{-1}(\{q_3\}) = \{1\dot{2}, 2\dot{1}\}$.
On a donc une expression de l'ensemble critique de $\mathscr{L} = \{K, \{1, 2, 3\}, \{f_1, f_2, f_3\}\}$:

$$\mathscr{C}_{\mathscr{L}} = \pi^{-1}(\{q_1\} \cup \{q_2\} \cup \{q_3\}) = \pi^{-1}(\{q_1\}) \cup \pi^{-1}(\{q_2\}) \cup \pi^{-1}(\{q_3\}) = \{1\dot{2}, 1\dot{3}, 2\dot{1}, 2\dot{3}, 3\dot{1}, 3\dot{2}\}$$

Et alors, on a aussi une expression de l'ensemble post-critique de $\mathscr{L}$, $\mathscr{P}_{\mathscr{L}} = \{\dot{1}, \dot{2}, \dot{3}\}$

4 Mesure auto-similaire

Dans cette section, pour un espace métrique (X, d), on notera $B(X, d)$ sa tribu borélienne, ou $B(X)$ lorsque le contexte est clair.
Il s'agit ici d'une partie assez théorique qui nous est nécessaire à la construction de la dimension de Hausdorff d'une partie.

Définition 4.1. Soit (X, d) un espace métrique, $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable ainsi que μ une mesure sur $(X, \mathcal{M})$.
Alors, μ est une mesure complétée si toute partie d'un ensemble mesurable de mesure nulle est mesurable.
Une mesure sera dite borélienne si sa tribu contient la tribu borélienne.
Si μ est une mesure borélienne, alors μ est dite régulière si $\forall A \in \mathcal{M}$, il existe $B \in B(X)$ tel que $\mu(A) = \mu(B)$.

Proposition 4.1. *Soit (X, d) un espace métrique, $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable, μ une mesure borélienne régulière sur $(X, \mathcal{M})$ et $\mu(X) < +\infty$.*
Alors, on a

$$\forall A \in \mathcal{M},\ \mu(A) = \inf\{\mu(U) \mid U \text{ est ouvert de } X \text{ et } A \subseteq U\} = \sup\{\mu(F) \mid F \text{ est fermé de } X \text{ et } F \subseteq A\}$$

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{M}$, comme μ est régulière, il existe $B \in B(X, d)$ tel que $\mu(A) = \mu(B)$.
Pour $\epsilon > 0$, il existe F_ϵ un fermé de X tel que $\mu(B \backslash F_\epsilon) \leq \epsilon$.
Comme X est de mesure finie, $\mu(B \backslash F_\epsilon) = \mu(B) - \mu(F_\epsilon) \leq \epsilon$ d'où, $\mu(B) - \epsilon \leq \mu(F_\epsilon) \leq \mu(B)$.
Ainsi, on a alors

$$\mu(B) = \sup\{\mu(F) \mid F \text{ est fermé de } X \text{ et } F \subseteq B\}$$

Pour $\epsilon > 0$, il existe un ouvert O_ϵ un ouvert de X tel que $\mu(O_\epsilon \backslash B) \leq \epsilon$, et alors comme précédemment, on a également

$$\mu(B) = \inf\{\mu(U) \mid U \text{ est ouvert de } X \text{ et } B \subseteq U\}$$

$\square$

Proposition 4.2 (Mesure de Bernoulli)**.** *Soit S un ensemble fini.*
Si $p = \{p_i\}_{i \in S}$ vérifiant $\sum_{i \in S} p_i = 1$ et pour tout $i \in S$, $0 < p_i < 1$, alors il existe une unique mesure borélienne régulière complétée μ^p sur $(\Sigma, \mathcal{M}^p)$ où $\Sigma = S^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\text{pour tout } w = w_1 w_2 ... w_m \in W_*,\ \mu^p(\Sigma_w) = \prod_{i=1}^{m} p_{w_i}$$

On dira alors que μ^p sera la mesure de Bernoulli de poids p sur Σ.

On a également le fait que μ^p est caractérisée par l'unique mesure borélienne régulière sur σ satisfaisant la relation suivante :

$$\forall A \in B(\Sigma, \delta_r),\ \mu^p(A) = \sum_{i \in S} p_i \mu^p(\sigma_i^{-1}(A))$$

.

La preuve cette proposition, et la suivante également, sont admise. Cette preuve est lié au fait que l'on construit cette mesure auto-similaire à partir d'une mesure extérieure μ^* restreint à sa tribu extérieure $\mathcal{M}(\mu^*)$, le cours de Jean-François Le Gall dans son ouvrage "Intégration, Probabilités et Processus Aléatoires" nous donne une construction de mesures à partir de mesures extérieure données.

Proposition 4.3 (Mesure auto-similaire)**.** *Soit $\mathscr{L} = \{K, S, \{F_i\}_{i\in S}\}$ une structure auto-similaire, et π l'unique application surjective continue de $\Sigma \longrightarrow K$ tel que pour tout $w \in W_*, F_w \circ \pi = \pi \circ \sigma_w$. Soit μ^p la mesure de Bernoulli de poids p sur Σ, et posons $\mathcal{N}^p = \{A \mid A \subseteq K \text{ et } \pi^{-1}(A) \in \mathcal{M}^p\}$. Alors, $(K, \mathcal{N}^p)$ est un espace mesurable, et on définit ν^p la mesure sur $(K, \mathcal{N}^p)$ vérifiant*

$$\forall A \in \mathcal{N}^p,\ \nu^p(A) = \mu^p(\pi^{-1}(A))$$

Alors, ν^p est une mesure borélienne régulière sur $(K, \mathcal{N}^p)$.
μ^p sera appelé la mesure auto-similaire sur K de poids p.

Théorème 4.1. *Soit $\mathscr{L} = \{K, S, \{F_i\}_{i\in S}\}$ une structure auto-similaire, et π l'unique application surjective continue de $\Sigma = S^{\mathbb{N}} \longrightarrow K$ tel que pour tout $w \in W_*, F_w \circ \pi = \pi \circ \sigma_w$.*
Soit μ^p la mesure de Bernoulli sur Σ de poids p
Soit ν^p la mesure auto-similaire sur K de poids p
Soit $\mathcal{I}_\infty = \{w \in \Sigma \mid |\pi^{-1}(\pi(w))| = +\infty\}$.

Alors, on a équivalence entre les deux propriétés suivantes

$$i)\ \forall w = w_1 w_2 \ldots w_m \in W_*,\ \nu^p(K_w) = \prod_{i=1}^{m} p_{w_i}$$

$$ii)\ \mu^p(\mathcal{I}_\infty) = 0$$

Remarque : Notons premièrement que dans le cadre général, on a toujours $\nu^p(K_w) \geq \prod_{i=1}^{m} p_{w_i}$.

Effectivement, pour $w = w_1 w_2 \ldots w_m \in W_*$ on a

$$\pi \circ \sigma_w(\Sigma) = F_w \circ \pi(\Sigma)$$

Comme π est surjective, $\pi(\Sigma) = K$, on a donc alors

$$\pi \circ \sigma_w(\Sigma) = F_w(K) = K_w$$

$$\Rightarrow \pi^{-1} \circ \pi \circ \sigma_w(\Sigma) = \pi^{-1}(K_w)$$

Comme $\sigma_w(\Sigma) \subseteq \pi^{-1} \circ \pi \circ \sigma_w(\Sigma)$, on a donc

$$\sigma_w(\Sigma) \subseteq \pi^{-1}(K_w) \Rightarrow \mu^p(\sigma_w(\Sigma)) \leq \mu^p(\pi^{-1}(K_w)) \Rightarrow \prod_{i=1}^{m} p_{w_i} \leq \nu^p(K_w)$$

Le théorème ci-dessus nous permet alors d'affirmer dans quels cas cette inégalité est un cas d'égalité. Pour prouver ce théorème, nous allons avoir besoin dans un premier temps de deux lemmes qui nous permettront de réduire l'équivalence du théorème à démontrer en une équivalence plus agréable à prouver.

Lemme 4.1. *Soit $A \in \mathcal{M}^p$, posons*

$$A_0 = \{w \in \Sigma \mid \sigma^m(w) \in A \text{ pour une infinité de } m \in \mathbb{N}\}$$

Alors, A_0 appartient à $\mathcal{M}^p$, et $\mu^p(A_0) \geq \mu^p(A)$.

Démonstration. Pour $A \in \mathcal{M}^p$, posons $A_m = \bigcup_{w \in W_m} \sigma_w(A)$ pour $m \in \mathbb{N}$, et montrons que $A_0 = \limsup(A_m)$.
Remarquons premièrement que l'on a, pour $m \in \mathbb{N}$,

$$\tau \in \bigcup_{w \in W_m} \sigma_w(A) \Leftrightarrow \sigma^m(\tau) \in A$$

Effectivement, si il existe $w \in W_m$ avec $w = w_1 w_2 ... w_m$ tel que l'on ait $\tau \in \sigma_w(A)$, alors il existe $\kappa \in A$ tel que $\tau = w\kappa$ et alors

$$\sigma^m(\tau) = \sigma^m(w\kappa) = \kappa \in A$$

Si maintenant on a pour $\tau = \tau_1 \tau_2 ... \in \Sigma$ tel que $\sigma^m(\tau) \in A$, alors pour $\tilde{\tau} = \tau_1 \tau_2 ... \tau_m \in W_m$, on a bien $\tau \in \sigma_{\tilde{\tau}}(A)$.
Cela nous indique que :

$$A_m = \bigcup_{w \in W_m} \sigma_w(A) = (\sigma^m)^{-1}(A)$$

D'où

$$\limsup(A_n) = \limsup((\sigma^n)^{-1}(A)) = A_0$$

Comme σ^m est continue, donc mesurable, et comme $A_m = (\sigma^m)^{-1}(A)$, puisque $A \in \mathcal{M}^p$, on a $A_m \in \mathcal{M}^p$, et donc $A_0 = \limsup(A_n) \in \mathcal{M}^p$.

On a

$$\liminf(A_n^c) = \bigcup_{m \geq 0} \bigcap_{k \geq m} A_n^c = \bigcup_{m \geq 0} \left(\bigcup_{k \geq m} A_n \right)^c = \left(\bigcap_{m \geq 0} \bigcup_{k \geq m} A_n \right)^c = (\limsup(A_n))^c$$

On a aussi

$$\mu^p(\Sigma) = \mu^p \left(\bigcup_{i \in S} \Sigma_i \right)$$

Il s'agit bien d'une union disjointe : deux mots ne commençant pas pas par le même symbole sont différents, donc :

$$\mu^p(\Sigma) = \sum_{i \in S} \mu^p(\Sigma_i) = \sum_{i \in S} p_i = 1$$

Donc, μ^p est une mesure de probabilité.

Ainsi, d'après le lemme de Fatou, on a

$$\mu^p(\liminf(A_n^c)) \leq \liminf(\mu^p(A_n^c))$$

$$\Rightarrow \mu^p((\limsup(A_n))^c) \leq \liminf(\mu^p(A_n^c))$$

Comme,

$$\liminf(\mu^p(A_n^c)) = \liminf(1 - \mu^p(A_n)) = 1 + \lim_{n \to +\infty} \inf_{k \geq n} (-\mu^p(A_n) = 1 - \lim_{n \to +\infty} \sup_{k \geq n} (\mu^p(A_n) = 1 - \limsup(\mu^p(A_n))$$

Et d'autre part,

$$\mu^p(\limsup(A_n)^c) = 1 - \mu^p(\limsup(A_n))$$

Cela nous indique bien que

$$\mu^p(\limsup(A_n)) \geq \limsup(\mu^p(A_n))$$

Calculons maintenant pour $m \in \mathbb{N}$, $\mu^p(A_m)$.
On a,

$$\mu^p(A_m) = \mu^p\left(\bigcup_{w\in W_m} \sigma_w(A)\right)$$

Or, il s'agit ici une union disjointe, car si on a deux mots $w, \tau \in W_m$ avec $w \neq \tau$, tous les mots qui commencent par w diffèreront des mots qui commencent par τ donc a *fortiori*, $\sigma_w(A) \cap \sigma_\tau(A) = \emptyset$.

Ainsi,

$$\mu^p(A_m) = \sum_{w\in W_m} \mu^p(\sigma_w(A))$$

Montrons premièrement par récurrence sur $m \in \mathbb{N}^*$ que pour tout $w \in W_m$,

$$\mu^p(\sigma_w(A)) = p_w \mu^p(A)$$

Pour $m = 1$, $j \in S$, on a :

$$\mu^p(\sigma_j(A)) = \sum_{w\in W_1} p_w \mu^p(\sigma_w^{-1}(\sigma_j(A))) = \sum_{i\in S} p_i \mu^p(\sigma_i^{-1}(\sigma_j(A)))$$

Or, pour $i \in S$, on a $\sigma_i^{-1}(\sigma_j(A)) = \emptyset$ si $i \neq j$ donc , $\mu^p(\sigma_i^{-1}(\sigma_j(A))) = 0$ si $i \neq j$.
Comme d'autre part σ_j est injective (si $\sigma_j(w) = \sigma_j(\tau)$ alors $jw = j\tau$ et donc $w = \tau$)
on a $\sigma_j^{-1}(\sigma_j(A)) = A$ et alors, on a bien l'initialisation de la récurrence .

$$\mu^p(\sigma_j(A)) = \sum_{i\in S} p_i \mu^p(\sigma_i^{-1}(\sigma_j(A))) = p_j \mu^p(A)$$

Pour l'hérédité, soit $m \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $\mu^p(\sigma_w(A)) = p_w \mu^p(A)$, alors, soit $w \in W_{m+1}$, il existe $\tau \in W_m$ et $j \in S$ tel que l'on ait $w = j\tau$.
Ainsi,

$$\mu^p(\sigma_w(A)) = \mu^p(\sigma_j(\sigma_\tau(A)) = \sum_{i\in S} p_i \mu^p(\sigma_i^{-1}(\sigma_j(\sigma_\tau(A))))$$

on a, $\sigma_i^{-1}(\sigma_j(\sigma_\tau(A))) = \emptyset$ si $i \neq j$ et $\sigma_j^{-1}(\sigma_j(\sigma_\tau(A))) = \sigma_\tau(A))$, donc

$$\mu^p(\sigma_w(A)) = p_j \mu^p(\sigma_\tau(A))$$

Par hypothèse de récurrence, $\mu^p(\sigma_\tau(A)) = p_\tau \mu^p(A)$ et comme $p_j p_\tau = p_{j\tau} = p_w$, on a bien l'hérédité.

Montrons deuxièmement par récurrence que $\sum_{w\in W_m} p_w = 1$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.
L'initialisation étant vérifiée par hypothèses, si on a maintenant $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\displaystyle\sum_{w\in W_m} p_w = 1$, alors

$$\sum_{w\in W_{m+1}} p_w = \sum_{i\in S} \sum_{w\in W_m} p_{iw} = \sum_{i\in S} \sum_{w\in W_m} p_i p_w = \left(\sum_{i\in S} p_i\right)\left(\sum_{w\in W_m} p_w\right) = 1$$

L'hérédité est bien vérifiée, et alors

$$\mu^p(A_m) = \sum_{w\in W_m} \mu^p(\sigma_w(A)) = \sum_{w\in W_m} p_w \mu^p(A) = \mu^p(A)$$

Comme maintenant, $\mu^p(\limsup(A_n)) = \mu^p(A_0)$, cela nous amène finalement à

$$\mu^p(A_0) \geq \limsup(\mu^p(A_n)) = \limsup(\mu^p(A)) = \mu^p(A)$$

Et le lemme est prouvé. $\square$

Lemme 4.2. *Posons,* $\mathcal{I} = \{w \in \Sigma \mid |\pi^{-1}(\pi(w))| > 1\}$ *Alors,* $\mathcal{I} \in B(\Sigma, \delta_r)$, $\mathcal{I}_\infty \in \mathcal{M}^p$, *et on a*

$$\mathcal{I}_0 \subseteq \mathcal{I}_\infty \subseteq \mathcal{I} \text{ et } \mu^p(\mathcal{I}_0) = \mu^p(\mathcal{I}_\infty) = \mu^p(\mathcal{I})$$

Démonstration. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, posons

$$I_m = \bigcup_{\substack{w,v \in W_m \\ w \neq v}} K_w \cap K_v$$

I_m étant fermé comme union finie d'intersection de fermé, ainsi on a bien $I_m \in B(\Sigma)$.

Montrons à présent que $\mathcal{I} = \bigcup_{m \geq 1} \pi^{-1}(I_m)$
Cela permettra alors de conclure que comme π est continue, pour $m \geq 1$, $\pi^{-1}(I_m)$ sera un borélien, et donc $\mathcal{I}$ sera un borélien.

Montrons que $\mathcal{I} \subseteq \bigcup_{m \geq 1} \pi^{-1}(I_m)$.
Soit $w = w_1 w_2 ... \in \mathcal{I}$, alors il existe $a = a_1 a_2 ... \in \Sigma$ avec $a \neq w$ et $\pi(a) = \pi(w)$. En posant

$$m = s(a, w) + 1, \ a^* = a_1 a_2 ... a_m \in W_m \ , \ w^* = w_1 w_2 ... w_m \in W_m$$

on a $a_m \neq w_m$ donc $a^* \neq w^*$, et

$$\pi(w) = \pi(\sigma_{w^*}(\sigma^m(w)) = F_{w^*}(\pi(\sigma^m(w))) \in K_{w^*}$$

$$\pi(w) = \pi(a) \in K_{a^*}$$

Ainsi, $\pi(w) \in I_m$, donc

$$w \in \pi^{-1}(I_m) \subseteq \bigcup_{n \geq 1} \pi^{-1}(I_n)$$

Montrons que $\bigcup_{m \geq 1} \pi^{-1}(I_m) \subseteq \mathcal{I}$.
Supposons qu'il existe $m \geq 1$ tel que $w = w_1 w_2 ... \in \pi^{-1}(I_m)$.
i.e, il existe $a^* \in W_m$, $w^* \in W_m$ avec $a^* \neq w^*$ tel que $\pi(w) \in K_{w^*} \cap K_{a^*}$.
Comme $\pi(w) \in K_{w^*}$, il existe $k \in K$ tel que $\pi(w) = F_{w^*}(k)$.
Comme π est surjective, il existe $\tau \in \Sigma$ tel que $\pi(\tau) = k$, et alors

$$\pi(w) = F_{w^*}(\pi(\tau)) = \pi(\sigma_{w^*}(\tau))$$

Par un raisonnement analogue, il existe $\kappa \in \Sigma$ tel que

$$\pi(w) = \pi(\sigma_{a^*}(\kappa))$$

comme $\sigma_{w^*}(\tau) \neq \sigma_{a^*}(\kappa)$, on a $w \in \mathcal{I}$.
Ainsi, $\bigcup_{m \geq 1} \pi^{-1}(I_m) = \mathcal{I}$, et alors comme remarqué précédemment, $\mathcal{I} \in B(\Sigma)$.

Montrons maintenant que $\mathcal{I}_0 \subseteq \mathcal{I}_\infty$.
Soit $w = w_1 w_2 ... \in \mathcal{I}_0$, alors, il existe une suite strictement croissante $\{m_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sigma^{m_k}(w) \in \mathcal{I}$.
En d'autre termes, pour $k \in \mathbb{N}$, il existe $\tau(k) \in \Sigma$ tel que l'on ait

$$\pi(\sigma^{k_m}(w)) = \pi(\tau(k)) \text{ et } \tau(k) \neq \sigma^{k_m}(w)$$

Posons à présent,

$$w(k) = w_1 w_2 ... w_{m_k} \tau(k)$$

Posons n_k le premier indice tel que $w_{n_k} \neq w(k)_{n_k}$ et $n_k > k_m$.
Quitte à prendre une suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ strictement croissante avec $u_0 = 1$ tel que l'on ait $m_{u_k} > n_k$, on a

$$m_{u_0} < n_{u_0} < m_{u_1} < n_{u_1} < m_{u_2} < n_{u_2}...$$

On a, $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\pi(w(k)) = \pi(\sigma_{w_1 w_2 ... w_{m_k}}(\tau(k)) = F_{w_1 w_2 ... w_{m_k}}(\pi(\tau(k))) = F_{w_1 w_2 ... w_{m_k}}(\pi(\sigma^{k_m}(w))) = \pi(w)$$

Et, pour $k < p$, on a $u_k < u_p$, et on a d'une part le fait que $w(u_p)_{n_{u_k}} = w_{n_{u_k}}$, et d'autre part, on a $w(u_k)_{n_{u_k}} \neq w_{n_{u_k}}$, ainsi $w(u_p) \neq w(u_k)$.
Comme, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\pi(w_{u_k}) = \pi(w)$, on a donc $|\pi^{-1}(\pi(w))| = +\infty$, et donc $w \in \mathcal{I}_\infty$ et on a alors montré que $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}_\infty$.

Or, d'après le lemme 4.1, comme on a montré que $\mathcal{I} \in B(\Sigma) \subseteq \mathcal{M}^p$, on a $\mu^p(\mathcal{I}_0) \geq \mu^p(\mathcal{I})$, et alors $\mu^p(\mathcal{I}_0) = \mu^p(\mathcal{I})$.
Comme on a le fait que $\mathcal{I}_\infty \subseteq \mathcal{I}$, on a $\mathcal{I}_0 \subseteq \mathcal{I}_\infty \subseteq \mathcal{I}$, et donc comme on sait que μ^p est une mesure complétée et finie, on a également $\mathcal{I}_\infty \in \mathcal{M}^p$ et donc on a le lemme voulu

$$\mu^p(\mathcal{I}_0) = \mu^p(\mathcal{I}_\infty) = \mu^p(\mathcal{I})$$

□

On peut à présent prouver le théorème 4.1.
Le lemme 4.2 nous affirme que $\mu^p(I_\infty) = \mu^p(\mathcal{I}_0)$, ce qui, comme annoncé précédemment, nous suggère une équivalence plus simple à démontrer.

Preuve du théorème 4.1 . Si $\mu^p(\mathcal{I}) = 0$, alors, pour tout $w \in W_*$,

$$\nu^p(K_w) = \mu^p(\pi^{-1}(K_w))$$

Or, on a $\pi^{-1}(K_w) = \pi^{-1}(F_w(K))$, comme π est surjective, on a $K = \pi(\Sigma)$, et alors on a

$$\pi^{-1}(K_w) = \pi^{-1}(F_w(\pi(\Sigma))) = \pi^{-1}(\pi(\sigma_w(\Sigma))) = \pi^{-1}(\pi(\Sigma_w))$$

Par hypothèse, π est μ^p-presque sûrement injective, on a donc

$$\mu^p(\pi^{-1}(\pi((\Sigma_w))) = \mu^p(\Sigma_w)$$

Ainsi,

$$\nu^p(K_w) = \mu^p(\pi^{-1}(K_w)) = \mu^p(\Sigma_w) = p_w$$

.

Réciproquement, si $\mu^p(\mathcal{I}) > 0$, alors on a

$$\nu^p(K_w) = \mu^p(\pi^{-1}(K_w)) > \mu^p(\Sigma_w) = p_w$$

Et donc, on a équivalence entre $\mu^p(\mathcal{I}) = 0$ et $\nu^p(K_w) = p_w$, puisque $\mu^p(\mathcal{I}_\infty) = \mu^p(\mathcal{I})$, on a équivalence entre $\mu^p(\mathcal{I}_\infty) = 0$ et $\nu^p(K_w) = p_w$, donc le théorème est prouvé. □

Corollaire 4.1. *Si, on a pour tout $x \in K$ l'ensemble $\pi^{-1}(x)$ fini, alors pour tout $w \in W_*$, on a $\nu^p(K_w) = p_w$.*

Démonstration. Par hypothèse on a pour tout $\tau \in \Sigma$, $|\pi^{-1}(\pi(\tau))| < +\infty$ et alors $I_\infty = \emptyset$, et donc $\mu(I_\infty) = 0$ d'où le résultat à l'aide du théorème 4.1. □

Théorème 4.2. *Soit $\mathscr{L} = \{K, S, \{F_i\}_{i\in S}\}$ une structure auto-similaire, et π l'unique application surjective continue de $\Sigma = S^{\mathbb{N}} \longrightarrow K$ tel que pour tout $w \in W_*, F_w \circ \pi = \pi \circ \sigma_w$.*
Soient μ une mesure borélienne sur $(K, \mathcal{M}(\mu))$, μ^p la mesure de Bernoulli sur Σ de poids $p = (p_i)_{i\in S}$, ν^p la mesure auto-similaire associée à μ^p de poids $p = (p_i)_{i\in S}$ et

$$\mu^p(\mathcal{I}) = 0 \text{ avec } \mathcal{I} = \{w \in \Sigma \mid |\pi^{-1}(\pi(w))| > 1\}$$

Si, il existe $c > 0$ tel que l'on ait

$$\forall w \in W_*,\ \mu(K_w) \leq c\nu^p(K_w)$$

Alors,

$$\forall A \in \mathcal{M}(\mu) \cap \mathcal{M}(\nu^p),\ \mu(A) \leq c\nu^p(A)$$

Démonstration. Pour U un ouvert de K, posons

$$W(U) = \{w \in W_* | K_w \subseteq U\}$$

Définissons une relation d'ordre sur $W(U)$: pour $w, \tau \in W(U)$, posons $w \leq \tau$ ssi $\Sigma_w \subseteq \Sigma_\tau$.
Effectivement, $\leq$ est réflexive par définition car l'inclusion est réflexive, elle est antisymétrique, car pour $w, \tau \in W(U)$, si $\Sigma_w = \Sigma_\tau$ on a $w = \tau$ et elle est transitive car l'inclusion est transitive.
En posant $W^+(U)$ l'ensemble des éléments maximaux de $W(U)$ pour $\leq$, on a la caractérisation suivante :

$$w = w_1w_2...w_m \in W^+(U) \text{ ssi } K_w \subseteq U \text{ et } K_{w_1w_2...w_{m-1}} \nsubseteq U \qquad (*)$$

En effet, si $w = w_1w_2...w_m \in W(U)$ vérifiant $(*)$, et si on a $\tau \in W(U)$ tel que $w \leq \tau$, *i.e* $w = \tau\tilde{w}$ avec $\tilde{w} \in W_*$.
Comme $\tau \in W(U)$, si $\tilde{w} \neq \emptyset$, on aurait l'existence de $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\tilde{w} \in W_n$ et,

$$w_1w_2...w_{m-n} = \tau \text{ , et alors, } K_{w_1w_2...w_{m-n}} = K_\tau \subseteq U$$

Ce qui est absurde car

$$K_{w_1w_2...w_{m-n}} \subseteq K_{w_1w_2...w_{m-1}} \nsubseteq U$$

.
Donc, $\tilde{w}$ est le mot vide, et $w = \tau$. et alors $w \in W^+(U)$.
Si maintenant $w = w_1w_2...w_m \in W^+(U)$, supposons que $\tilde{w} = w_1w_2...w_{m-1} \in W(U)$, alors comme $\Sigma_w \subseteq \Sigma_{\tilde{w}}$, et vu que $w \neq \tilde{w}$, w ne serait plus un élément maximal de $W(U)$ et on aboutit à une contradiction.

Montrons à présent que $U = \bigcup_{w\in W^+(U)} K_w$.
Soit $k \in U$. Comme π est surjective, il existe $w = w_1w_2... \in \Sigma$ tel que $k = \pi(w)$. prenons maintenant $m = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid k \in K_{w_1w_2...w_n}\}$.
D'après la caractérisation précédente, $w_1w_2...w_m$ appartient à $W^+(U)$, et $k \in K_{w_1w_2...w_m}$ et donc, $k \in \bigcup_{w\in W^+(U)} K_w$.
Comme pour tout $w \in W^+(U)$, on a par définition $K_w \subseteq U$, on a l'inclusion inverse $U \supseteq \bigcup_{w\in W^+(U)} K_w$ et on a alors égalité.

On a donc

$$\mu(U) \leq \sum_{w\in W^+(U)} \mu(K_w) \leq c \sum_{w\in W^+(U)} \nu^p(K_w)$$

Montrons que

$$\sum_{w\in W^+(U)} \nu^p(K_w) = \nu^p\left(\bigcup_{w\in W^+(U)} K_w\right)$$

Premièrement, si il s'agit d'une union disjointe, alors c'est automatique.
Soit $w, v \in W^+(U)$ avec $w \neq v$ et $w = w_1w_2...w_n \in W_n$, $v = v_1v_2...v_m \in W_m$ et $K_w \cap K_v \neq \emptyset$ et soit $k \in K_w \cap K_v$.
Comme $k \in K_w$, alors $\exists \alpha \in \Sigma$ tel que $k = F_w(\pi(\alpha)) = \pi(\sigma_w(\alpha))$. De même, $\exists \beta \in \Sigma$ tel que $k = \pi(\sigma_v(\beta))$.
Donc, $w \in \mathcal{I}$, et alors, puisque $k = \pi(w)$, on a $k \in \pi(\mathcal{I})$.
Donc, $\nu^p(K_w \cap K_v) = 0$ car $K_w \cap K_v \subseteq \pi(\mathcal{I})$, d'où $\nu^p(K_w \cap K_v) \leq \nu^p(\pi(\mathcal{I}))$.
On peut à présent remarquer que $\nu^p(\pi(\mathcal{I})) = \mu^p(\mathcal{I})$, par définition on a

$$\nu^p(\pi(\mathcal{I})) = \mu^p(\pi^{-1}(\pi(\mathcal{I})))$$

Or, on peut démontrer que $\pi^{-1}(\pi(\mathcal{I})) = \mathcal{I}$, pour ce faire il suffit de montrer que $\pi^{-1}(\pi(\mathcal{I})) \subseteq \mathcal{I}$ (l'autre inclusion étant vraie dans le cas général pour toute fonction de Σ dans K).
Soit $\eta \in \pi^{-1}(\pi(\mathcal{I}))$, il existe donc $w \in \mathcal{I}$ tel que $\pi(\eta) = \pi(w)$.
Par définition de $\mathcal{I}$, $|\pi^{-1}(\pi(w))| > 1$ Or

$$|\pi^{-1}(\pi(\eta))| = |\pi^{-1}(\pi(w))| > 1$$

Donc, $\eta \in \mathcal{I}$, et alors $\mathcal{I} = \pi^{-1}(\pi(\mathcal{I}))$, cela implique donc que $\nu^p(\pi(\mathcal{I})) = \mu^p(\mathcal{I}) = 0$ donc $\nu^p(K_w \cap K_v) = 0$.

En posant maintenant pour $w \in W^+(U)$

$$A_w = K_w \setminus \bigcap_{\substack{v \in W^+(U) \\ v \neq w}} K_v$$

Alors, comme ν^p est une mesure finie,

$$\nu^p(A_w) = \nu^p(K_w) - \nu^p \left(\bigcap_{\substack{v \in W^+(U) \\ v \neq w}} K_v \right)$$

Comme $\bigcap_{\substack{v \in W^+(U) \\ v \neq w}} K_v \subseteq K_w \cap K_{w'}$ avec $w' \neq w$ et $w' \in W^+(U)$, on a

$$\nu^p \left(\bigcap_{\substack{v \in W^+(U) \\ v \neq w}} K_v \right) = 0$$

Et alors,

$$\nu^p(K_w) = \nu^p(A_w)$$

Comme les évènements $(A_w)_{w \in W^+(U)}$ sont disjoints deux à deux,

$$\nu^p \left(\bigcup_{w \in W^+(U)} K_w \right) = \nu^p \left(\bigcup_{w \in W^+(U)} A_w \right) = \sum_{w \in W^+(U)} \nu^p(A_w) = \sum_{w \in W^+(U)} \nu^p(K_w)$$

On a donc

$$\mu(U) \leq \sum_{w \in W^+(U)} \mu(K_w) \leq c \sum_{w \in W^+(U)} \nu^p(K_w) = c\nu^p \left(\bigcup_{w \in W^+(U)} K_w \right) = c\nu^p(U)$$

à l'aide de la proposition 4.1, pour tout $A \in M^p \cap M(\mu)$, il existe une suite d'ouverts décroissante pour l'inclusion $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que $\mu(\bigcap_{n \geq 0} U_n) = \mu(A)$ et $\nu^p(\bigcap_{n \geq 0} U_n) = \nu^p(A)$.
Comme $\mu(U_n) \leq c\nu^p(U_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a finalement $\mu(A) \leq c\nu^p(A)$. □

5 Dimension de Hausdorff

Définition 5.1. Soit (X, d) un espace métrique
Pour toute partie $A \subset X$ bornée, et pour $s \geq 0$, $\delta > 0$, on définit la quantité

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \inf\{\sum_{i\geq 1} \text{diam}(E_i)^s \mid A \subseteq \bigcup_{i\geq 1} E_i \ , \ \text{diam}(E_i) \leq \delta\}$$

On définit également $\mathcal{H}^s(A) = \lim\limits_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A)$

Lemme 5.1. *Soit (X, d) un espace métrique*
Alors, pour toute partie bornée $A \subset X$, on a, pour $t > s \geq 0$, on a

$$\mathcal{H}^t_\delta(A) \leq \delta^{t-s}\mathcal{H}^s_\delta(A)$$

Démonstration. Si $A \subseteq \bigcup\limits_{i\geq 1} E_i$ avec $\text{diam}(E_i) \leq \delta$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\sum_{i\geq 1} \text{diam}(E_i)^t = \sum_{i\geq 1} \text{diam}(E_i)^{t-s}\text{diam}(E_i)^s \leq \delta^{t-s} \sum_{i\geq 1} \text{diam}(E_i)^s$$

En passant à la borne inférieure, on obtient $\mathcal{H}^t_\delta(A) \leq \delta^{t-s}\mathcal{H}^s_\delta(A)$ □

Proposition 5.1. *Soit (X, d) un espace métrique*
Pour toute partie $A \subset X$ bornée, on a

$$\sup\{s \in \mathbb{R}_+ \mid \mathcal{H}^s(A) = +\infty\} = \inf\{s \in \mathbb{R}_+ \mid \mathcal{H}^s(A) = 0\}$$

Démonstration. Remarquons premièrement que pour $s \in \mathbb{R}_+$, si $\mathcal{H}^s(A) < +\infty$, alors grâce au lemme 5.1, $\forall t > s$, on a $\forall \delta > 0$, $\mathcal{H}^t_\delta(A) \leq \delta^{t-s}\mathcal{H}^s_\delta(A)$, et alors en faisant tendre δ vers 0, on obtient $\mathcal{H}^t(A) = 0$.

On a également, en supposant $\mathcal{H}^s(A) > 0$, alors $\forall t < s$, $\forall \delta > 0$, on a $\mathcal{H}^t_\delta(A) \geq \dfrac{\mathcal{H}^s_\delta(A)}{\delta^{s-t}}$ donc $\mathcal{H}^t(A) = +\infty$.

Maintenant, posons $A = \{s \in \mathbb{R}_+ \mid \mathcal{H}^s(A) = +\infty\}$ et $B = \{s \in \mathbb{R}_+ \mid \mathcal{H}^s(A) = 0\}$.
Posons $a = \sup(A)$, et $b = \inf(B)$, et supposons que $a \neq b$, c'est à dire $b > a$ d'après la remarque précédente.
Posons $\epsilon = \dfrac{a+b}{2}$, on a deux cas possibles :

Premier cas, $\mathcal{H}^\epsilon(A) < +\infty$
Alors, comme $\dfrac{\epsilon + b}{2} > \epsilon$, d'après la remarque précédente on a $\mathcal{H}^{\frac{\epsilon+b}{2}}(A) = 0$, donc $\dfrac{\epsilon + b}{2} \in B$, mais comme $\dfrac{\epsilon + b}{2} < b$, b n'est plus minorant de B, absurde.

Deuxième cas, $\mathcal{H}^\epsilon(A) = +\infty$
Avec un raisonnement similaire au cas précédent, comme $\dfrac{\epsilon + a}{2} < \epsilon$, la remarque précédente nous affirme que $\mathcal{H}^{\frac{\epsilon+a}{2}}(A) = +\infty$, a n'est donc plus majorant de A, absurde.
On a donc $a = b$ et on a prouvé la proposition. □

Définition 5.2 (Dimension de Hausdorff)**.** Soit (X, d) un espace métrique
Pour toute partie $A \subset X$ bornée, on appelle la dimension de Hausdorff de A l'unique réel a tel que l'on ait

$$a = \sup\{s \in \mathbb{R}_+ \mid \mathcal{H}^s(A) = +\infty\} = \inf\{s \in \mathbb{R}_+ \mid \mathcal{H}^s(A) = 0\}$$

et on la dénotera $\dim_H(A)$.

Lemme 5.2. *Soit (K, d) un espace métrique compact.*
Si $\mathcal{H}^\alpha(K) < +\infty$, et si il existe des réels strictement positifs c, l_0, une mesure de probabilité μ sur $(K, B(K))$ tel que pour tout $x \in K$, $l \in]0, l_0[$ on ait

$$\mu(B(x, l)) \leq cl^\alpha$$

Alors, pour tout borélien $A \subset K$, on a

$$\mu(A) \leq c\mathcal{H}^\alpha(A)$$

Démonstration. Soit $A \in B(K)$, alors soit $l \in]0, l_0[$, $(U_i)_{i \in I}$ avec $U_i \subset K$, $\mathrm{diam}(U_i) \leq l$ pour tout $i \in I$ et $A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$.
On a, pour tout $i \in I$, $\forall x_i \in U_i$, $U_i \subseteq B(x_i, \mathrm{diam}(U_i))$.
Effectivement, pour $a \in U_i$, comme $x_i \in U_i$, on a bien $d(a, x_i) \leq \mathrm{diam}(U_i)$ par définition du diamètre d'une partie, et donc $a \in B(x_i, \mathrm{diam}(U_i))$.
On obtient donc par hypothèse que $\mu(B(x_i, \mathrm{diam}(U_i))) \leq c\ \mathrm{diam}(U_i)^\alpha$, et alors

$$\mu(A) \leq \mu\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) \leq \sum_{i \in I} \mu(U_i) \leq \sum_{i \in I} \mu(B(x_i, \mathrm{diam}(U_i)) \leq c \sum_{i \in I} (\mathrm{diam}(U_i))^\alpha$$

On a alors

$$\mu(A) \leq \mathcal{H}_l^\alpha(A)$$

En faisant tendre l vers 0, on obtient le lemme voulu

$$\mu(A) \leq \mathcal{H}^\alpha(A)$$

. ☐

Définition 5.3. Pour $0 < a < 1$, $N \in \mathbb{N}^*$, $R = (r_1, ..., r_N) \in \mathbb{R}^N$ avec, pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, $0 < r_i < 1$, on définit

$$\Lambda(R, a) = \{w = w_1 w_2 ... w_m \in W_*^N \mid r_{w_1 w_2 ... w_{m-1}} > a \geq r_{w_1 w_2 ... w_m}\}$$

avec, pour $m \in \mathbb{N}^*$, $r_{w_1 w_2 ... w_m} = \prod_{i=1}^{m} r_{w_i}$

Théorème 5.1. *Soit (K, d) un espace métrique compact, supposons que pour $R = (r_1, ..., r_N)$ avec pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, $0 < r_i < 1$ supposons l'existence de $c_1, c_2, c_*, M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que l'on ait*

$$\forall w \in W_*^N, \quad \mathrm{diam}(K_w) \leq c_1 r_w$$

ainsi que , pour tout $x \in K$, pour tout $a \in]0, c_*[$

$$|\{w \in W_*^N \mid w \in \Lambda(R, a)\ ,\ d(x, K_w) \leq c_2 a\}| \leq M$$

En posant ν la mesure auto-similaire sur K de poids $(r_i^\alpha)_{i \in [\![1, N]\!]}$, et en posant α l'unique réel tel que

$$\sum_{i=1}^{N} r_i^\alpha = 1$$

Alors, il existe $c_3, c_4 \in \mathbb{R}_*^N$ tel que pour tout $A \in B(K, d)$ on ait

$$c_3 \nu(A) \leq \mathcal{H}^\alpha(A) \leq c_4 \nu(A)$$

Remarque : Cela nous indiquera donc que $0 < \mathcal{H}^\alpha(K) < +\infty$, et donc $\dim_H(K) = \alpha$.
Ce théorème nous permet donc sous certaines hypothèses de calculer efficacement la dimension de Hausdorff de K.

Démonstration. Commençons par remarquer que sous les hypothèses du théorème, en posant μ la mesure de Bernoulli sur Σ de poids $(r_i^\alpha)_{i\in[\![1,N]\!]}$, alors on a nécessairement $\mu(\mathcal{I}) = 0$.

Effectivement, la condition $|\{w \in W_*^N \mid w \in \Lambda(R,a)\ ,\ d(x, K_w) \leq c_2 a\}| \leq M$ pour tout $x \in K$ implique que, pour tout $x \in K$ l'ensemble $\pi^{-1}(x)$ est de cardinal majoré par M et est donc fini.
En invoquant le corolaire 4.1, on a $\mu(\mathcal{I}_\infty) = 0$ avec $\mathcal{I}_\infty = \{w \in \Sigma \mid |\pi^{-1}(\pi(w))| = +\infty\}$, d'après le lemme 4.2, on obtient $\mu(\mathcal{I}) = 0$.
Cela nous permettra donc en particulier d'utiliser dans la suite de cette démonstration le théorème 4.2.

Pour $0 < a < 1$, on note $\Lambda_a = \Lambda(a, R)$ et pour $w \in W_*^N$ on définit
$\Lambda_a(w) = \{v \in W_*^N \mid wv \in \Lambda_a\}$

Montrons que pour $a < r_w \min\limits_{i\in[\![1,N]\!]}(r_i)$

$$r_w^\alpha = \sum_{v\in\Lambda_a(v)} r_{wv}^\alpha$$

Pour cela, prouvons d'abord que pour $a < \min\limits_{i\in[\![1,N]\!]}(r_i)$

$$\sum_{v\in\Lambda_a} r_v^\alpha = 1 \qquad (*)$$

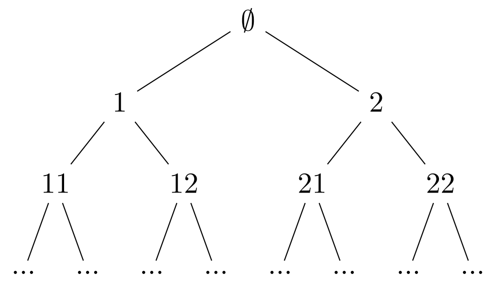
(Notons que si $a \geq \min\limits_{i\in[\![1,N]\!]}(r_i)$, alors $\Lambda_a = \emptyset$)

Considérons la preuve dans le cas $N = 2$, avec donc $\Sigma = \Sigma(2) = \{1,2\}^{\mathbb{N}}$.
Posons $a < \min(r_1, r_2)$.
Si premièrement on a $p = r_1 = r_2$, alors, il existe un unique $n \in \mathbb{N}$ tel que $p^n > a \geq p^{n-1}$, et donc $\Lambda_a = W_n = \{1,2\}^n$. On a alors

$$\sum_{v\in\Lambda_a} r_v^\alpha = \sum_{v\in\{1,2\}^n} p^{n\alpha} = 2^n p^{n\alpha} = \prod_{i=1}^n (p^\alpha + p^\alpha) = 1$$

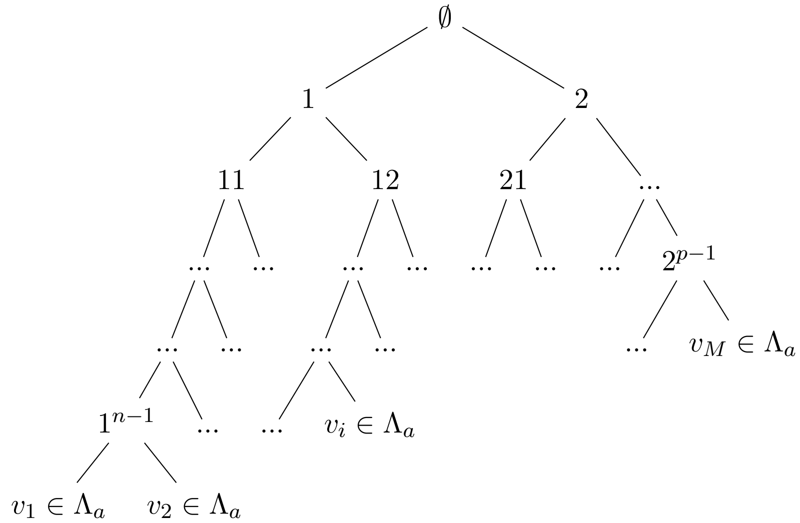
Si maintenant $r_1 \neq r_2$, supposons sans perte de généralité que $r_1 > r_2$.

Considérons l'arbre binaire suivant où l'ensemble des nœuds représente l'ensemble des éléments de W_* :



Considérons cet arbre en ajoutant une condition supplémentaire : si un nœud représenté par $v \in W_*$ appartient à Λ_a, alors on supprime de l'arbre l'ensemble de ses descendants.
Cette construction nous permet d'obtenir un arbre binaire de hauteur finie (de hauteur majorée par l'unique entier n tel que $r_1^n \leq a$ et $r_1^{n-1} > a$) et dont l'ensemble des feuilles sont les différents éléments

de Λ_a.
Remarquons que si $\tau = \tau_1\tau_2...\tau_m \in \Lambda_a$ avec τ finissant par 1, alors son voisin $\tau' = \tau_1...\tau_{m-1}2$ appartient également à Λ_a, effectivement, si on a $r_{\tau_1...\tau_{m-1}} > a \geq r_\tau$, alors $r_{\tau'_1...\tau'_{m-1}} = r_{\tau_1...\tau_{m-1}} > a$ et $r_{\tau'_1...\tau'_m} < r_\tau \leq a$ donc $\tau' \in \Lambda_a$. En notant $M = |\Lambda_a|$, on a la représentation suivante :



Avec $\Lambda_a = \{v_i \in W_* \ , \ i \in [\![1, M]\!]\}$, n l'unique entier tel que tel que $r_1^n \leq a$ et $r_1^{n-1} > a$ et p l'unique entier tel que tel que $r_2^p \leq a$ et $r_2^{p-1} > a$
Intéressons nous premièrement aux éléments de Λ_a commençant par 1.
Considérons l'élément représenté par la feuille la plus à gauche dans notre représentation binaire $v_1 = 1^n \in \Lambda_a$ et le second $v_2 = 1^{n-1}2 \in \Lambda_a$.
En considérant la somme des deux termes $r_{v_1}^\alpha + r_{v_2}^\alpha$, on obtient

$$r_{v_1}^\alpha + r_{v_2}^\alpha = r_1^{n\alpha} + r_1^{(n-1)\alpha} r_2^\alpha = r_1^{(n-1)\alpha}(r_1^\alpha + r_2^\alpha) = r_1^{(n-1)\alpha}$$

On supprime désormais de l'arbre binaire le parent de v_1 et v_2 et on cherche désormais l'élément v_3 le plus à gauche de notre nouvel arbre binaire.
En posant $\tau = 1^{n-2}2$, on a deux cas possibles :
Soit $r_\tau \leq a$, alors $\tau \in \Lambda_a$ il s'agit donc de $v_3 \in \Lambda_a / \{v_1, v_2\}$.
Pour la somme des 3 premiers éléments de $(*)$, on a

$$r_{v_1}^\alpha + r_{v_2}^\alpha + r_{v_3}^\alpha = r_1^{(n-1)\alpha} + r_1^{(n-2)\alpha} r_2^\alpha = r_1^{(n-2)\alpha}(r_1^\alpha + r_2^\alpha) = r_1^{(n-2)\alpha}$$

On supprime désormais de l'arbre binaire le parent de v_3 et on cherche désormais l'élément v_4 le plus à gauche de notre nouvel arbre binaire.

Si maintenant $r_\tau > a$, on a alors $\tau 1 \in \Lambda_a$ car $r_{\tau 1} = r_\tau r_1 = r_1^{n-1}2 = r_{v_2} \leq a$ et donc $\tau 2 \in \Lambda_a$, $v_3 = \tau 1$, et on a également le deuxième élément le plus à gauche de notre arbre est $v_4 = \tau 2$ car v_3 finit par 1 , on a alors

$$r_{v_3}^\alpha + r_{v_4}^\alpha = r_1^{(n-1)\alpha} r_2^\alpha + r_1^{(n-2)\alpha} r_2^{2\alpha} = r_1^{(n-2)\alpha} r_2^\alpha (r_1^\alpha + r_2^\alpha) = r_1^{(n-2)\alpha} r_2^\alpha$$

Pour la somme des 4 premiers éléments de $(*)$, on obtient :

$$r_{v_1}^\alpha + r_{v_2}^\alpha + r_{v_3}^\alpha + r_{v_4}^\alpha = r_1^{(n-1)\alpha} + r_1^{(n-2)\alpha} r_2^\alpha = r_1^{(n-2)\alpha}$$

On supprime désormais de l'arbre binaire le parent de v_3, v_4 et on cherche désormais l'élément v_5 le plus à gauche de notre nouvel arbre binaire.

On procède ainsi par récurrence pour trouver que la somme de $(*)$ des mots commençant par 1 vaut r_1^α, on procède de manière analogue pour trouver que la somme de $(*)$ des mots commençant par 2 vaut r_2^α, et alors, on obtient que

$$\sum_{v\in\Lambda_a} r_v^\alpha = \sum_{\substack{v\in\Lambda_a \\ v=1\tau,\tau\in W_*}} r_v^\alpha + \sum_{\substack{v\in\Lambda_a \\ v=2\tau,\tau\in W_*}} r_v^\alpha = r_1^\alpha + r_2^\alpha = 1$$

à présent, pour $w \in W_*$ avec $w = w_1 w_2 ... w_m$, on a

$$\Lambda_a(w) = \{v = v_1 v_2 ... v_n \in W_* \mid wv \in \Lambda_a\}$$

$$= \{v = v_1 v_2 ... v_n \in W_* \mid r_{(wv)_1 ... (wv)_{m+n-1}} > a \geq r_{wv}\}$$

$$= \{v = v_1 v_2 ... v_n \in W_* \mid r_w r_{v_1 ... v_n} > a \geq r_w r_v\}$$

$$= \{v = v_1 v_2 ... v_n \in W_* \mid r_{v_1 ... v_n} > \frac{a}{r_w} \geq r_v\} = \Lambda_{\frac{a}{r_w}}$$

On a donc pour $b \leq \dfrac{a}{r_w}$

$$\sum_{v\in\Lambda_b} r_v^\alpha = 1 \Leftrightarrow \sum_{v\in\Lambda_a(w)} r_{wv}^\alpha = r_w^\alpha$$

Pour $N = 2$.
Nous admettrons le résultat ci-dessus dans le cadre général.
Montrons à présent que pour $w \in W_*$,

$$K_w = \bigcup_{v\in\Lambda_a(w)} K_{wv}$$

Comme on a $K_{wv} = F_w(K_v) \subseteq F_w(K) = K_w$, on a la première inclusion $K_w \supseteq \bigcup_{v\in\Lambda_a(w)} K_{wv}$.
Soit à présent $k \in K_w$, il existe $\tau = \tau_1 \tau_2 ... \in \Sigma$ tel que $k = f_w(\pi(\tau)) = \pi(\sigma_w(\tau))$.
pour $b < r_w \min_{i\in[\![1,N]\!]}(r_i)$, on a l'existence de $\tilde{\tau} = \tau_1 \tau_2 ... \tau_n \in W_n$ tel que $r_{\tau_1 \tau_2 ... \tau_{n-1}} > b \geq r_{\tilde{\tau}}$, (en prenant donc $\tilde{\tau} \in \Lambda_b$) et alors

$$k = \pi(\sigma_w(\tau)) = \pi(\sigma_w(\sigma_{\tilde{\tau}}(\sigma^n(\tau))) = \pi(\sigma_{w\tilde{\tau}}(\sigma^n(\tau)) = f_{w\tilde{\tau}}(\sigma^n(\tau)) \in K_{w\tilde{\tau}}$$

En prenant b tel que $\Lambda_b = \Lambda_a(w)$, on obtient le résultat voulu $K_w = \bigcup_{v\in\Lambda_a(w)} K_{wv}$
Or par hypothèse, on a pour $v \in \Lambda_a(w)$, $\mathrm{diam}(K_{wv}) \leq c_1 r_{wv} \leq c_1 a$, donc on obtient

$$\mathcal{H}^\alpha_{c_1 a}(K_w) \leq \sum_{v\in\Lambda_a(w)} \mathrm{diam}(K_{wv})^\alpha \leq (c_1)^\alpha \sum_{v\in\Lambda_a(w)} r_{wv}^\alpha = (c_1 r_w)^\alpha$$

Comme $\mu(\mathcal{I}_\infty) = \mu(\mathcal{I}) = 0$, on a $\nu^p(K_w) = r_w^\alpha$ d'après le théorème 4.1
Ainsi, on a

$$\mathcal{H}^\alpha_{c_1 a}(K_w) \leq (c_1)^\alpha \nu(K_w)$$

En faisant tendre a vers 0, on obtient

$$\mathcal{H}^\alpha(K_w) \leq (c_1)^\alpha \nu(K_w)$$

Montrons à présent que pour tout $x \in K$, pour tout $a \in]0, c_*[$, en notant $\Lambda_{a,x} = \{v \in \Lambda_a \mid d(x, K_v) \leq c_2 a\}$, on a

$$\pi^{-1}(B(x, c_2 a)) \subset \bigcup_{v\in\Lambda_{a,x}} \Sigma_v \qquad (**)$$

Soit $x \in K$, on a $\pi^{-1}(B(c_2 a, x)) = \{\tau \in \Sigma \mid d(x, \pi(\tau)) \leq c_2 a\}$ en particulier, $\forall N \in \mathbb{N}$, pour $\tau = \tau_1 \tau_2 ... \in \pi^{-1}(B(c_2 a, x))$

$$d(x, K_{\tau_1 \tau_2 ... \tau_N}) \leq d(x, \pi(\tau)) \leq c_2 a$$

et, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $r_{\tau_1 ... \tau_{n-1}} > a \geq r_{\tau_1 \tau_2 ... \tau_n}$
En posant $\tilde{\tau} = \tau_1 \tau_2 ... \tau_n$, on a $\tilde{\tau} \in \Lambda_{a,x}$, et comme par choix de $\tilde{\tau}$ on a $\tau \in \Sigma_{\tilde{\tau}}$ donc on a bien l'inclusion $(**)$.
Cela implique que

$$\nu(B(x, c_2 a)) = \mu(\pi^{-1}(B(x, c_2 a))) \leq \sum_{v \in \Lambda_{a,x}} \mu(\Sigma_v) = \sum_{v \in \Lambda_{a,x}} r_v^\alpha$$

Or, par hypothèse, $|\Lambda_{a,x}| \leq M$, et puisque pour $v \in \Lambda_a$ on a $r_v \leq a$, cela implique que

$$\nu(B(x, c_2 a)) \leq M a^\alpha$$

Réécrivons à présent $M a^\alpha = M c_2^{-\alpha} (c_2 a)^\alpha$, alors comme pour tout $x \in K$ on a $\nu(B(x, c_2 a)) \leq M c_2^{-\alpha} (c_2 a)^\alpha$, et comme le résultat précédent nous indique que $\mathcal{H}^\alpha(K) \leq c_1^\alpha \nu(K) < \infty$, le lemme 5.2 nous affirme alors que pour tout $A \in B(K, d)$

$$c_3 \nu(A) \leq \mathcal{H}^\alpha(A)$$

Avec $c_3 = M^{-1} c_2^\alpha$.
De plus, comme on a $\mathcal{H}^\alpha(K_w) \leq c_1^\alpha \nu(K_w)$ alors comme $\mathcal{H}^\alpha$ est une mesure borélienne sur (K, d), le théorème 4.2 nous indique que pour tout $A \in B(K, d)$, on a

$$\mathcal{H}^\alpha(A) \leq c_4 \nu(A)$$

Avec $c_4 = c_1^\alpha$.

$\square$

Proposition 5.2. *Soit $\mathbb{R}^n$ muni de sa distance euclidienne d, soit pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, F_i une r_i similitude avec $0 < r_i < 1$, soit K l'ensemble auto-similaire associé à $\{F_1, ... F_N\}$, soit $R = (r_i)_{i \in [\![1,N]\!]}$, et considérons $\Sigma = \Sigma(N) = [\![1, N]\!]^{\mathbb{N}}$.*
Alors, si il existe un ouvert $O \subseteq \mathbb{R}^n$ non vide borné tel que

$$\bigcup_{i=1}^{N} F_i(O) \subset O \text{ et } F_i(O) \cap F_j(O) = \emptyset \text{ pour } i \neq j \qquad (*)$$

Alors, il existe $c_1, c_2, M > 0$ tel que, pour tout $w \in W_*$, pour tout $0 < a < 1$

$$\operatorname{diam}(K_w) \leq c_1 r_w$$

Et, pour tout $x \in K$,

$$|\{w \in \Lambda(R, a) \mid d(x, K_w) \leq c_2 a\}| \leq M$$

Avec pour $w = w_1 w_2 ... w_m$, $r_w = \prod_{i=1}^{m} r_{w_i}$

Démonstration. Soit $O \subset \mathbb{R}^n$ satisfaisant $(*)$, montrons que $K \subset \overline{O}$.
En posant pour tout partie $A \subset \mathbb{R}^n$, $\tilde{F}(A) = \bigcup_{i=1}^{N} F_i(A)$, et en posant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $O_n = \tilde{F}(O_{n-1})$ et $O_0 = O$, par récurrence on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $O_n \subseteq O$, et alors $\lim_{n \to +\infty} (O_n) \subseteq \overline{O}$, d'après le théorème 1.1 , on a $K = \lim_{n \to +\infty} (O_n) \subseteq \overline{O}$.
Cette relation nous indique en particulier que pour tout $w \in W_*$, $K_w \subseteq \overline{O}_w \subseteq \overline{O_w}$.
Sans perte de généralité, on peut supposer que $\operatorname{diam}(O) \leq 1$ et donc $\operatorname{diam}(K_w) \leq \operatorname{diam}(\overline{O_w}) = \operatorname{diam}(O_w) = r_w$.

Montrons à présent que pour tout $x \in K$, pour tout $0 < a < 1$, en notant $\Lambda(R,a) = \Lambda_a$ et en définissant $\Lambda_{a,x} = \{v \in \Lambda_a \mid d(x, K_v) \leq a\}$, on a

$$\bigcup_{w \in \Lambda_{a,x}} O_w \subseteq B(x, 2a)$$

Soit $w = w_1 w_2 ... w_m \in \Lambda_{a,x}$, donc $r_{w_1 w_2 ... w_{m-1}} > a \geq r_w$ et $d(x, K_w) \leq a$ et montrons que pour tout $y \in O_w$, $d(x,y) \leq 2a$.
On sait que $K_w \subseteq \overline{O_w}$, on a donc plusieurs cas possible :

(i) : $y \notin K_w$, $x \notin O_w$
Alors, pour $c \in K_w$, on a

$$d(x,y) \leq d(x,c) + d(c,y) \Rightarrow d(x,y) \leq \inf_{c \in K_w} (d(x,c)) + \mathrm{diam}(O_w) \leq 2a$$

(ii) : $y \notin K_w$, $x \in O_w$, alors $d(x,y) \leq \mathrm{diam}(O_w) \leq a \leq 2a$
(iii) : $y \in K_w$, $x \notin O_w$, le résultat du calcul effectué dans le cas (i) reste valide.
(iv) : $y \in K_w$, $x \in O_w$, le résultat du calcul effectué dans le cas (ii) reste valide.
On a donc bien $O_w \subseteq B(x, 2a)$ et on a prouvé $\bigcup_{w \in \Lambda_{a,x}} O_w \subseteq B(x, 2a)$.
Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$, alors comme par hypothèse, si $w \neq v$, on a $O_w \cap O_v = \emptyset$ et donc

$$\lambda\left(\bigcup_{w \in \Lambda_{a,x}} O_w\right) = \sum_{w \in \Lambda_{a,x}} \lambda(O_w) = \lambda(O) \sum_{w \in \Lambda_{a,x}} (r_w)^n$$

Donc

$$\lambda(O) \sum_{w \in \Lambda_{a,x}} (r_w)^n \leq \lambda(B(x, 2a)) = C(2a)^n$$

Avec $C = \lambda(B(0,1))$.
En posant $D = \min_{i \in [\![1,N]\!]} (r_i)$, on a pour $w = w_1 w_2 ... w_m \in \Lambda_{a,x}$

$$r_w = \prod_{i=1}^{m} r_{w_i} \geq D \prod_{i=1}^{m-1} r_{w_i} > Da$$

Donc

$$\lambda(O) \sum_{w \in \Lambda_{a,x}} a^n D^n \leq C(2a)^n$$

$$\Rightarrow |\Lambda_{a,x}| \leq \frac{C 2^n}{\lambda(O) D^n}$$

Et, la proposition est démontrée. $\square$

Corollaire 5.1. *Sous les hypothèses de la proposition 5.2, on a alors* $\dim_H(K,d) = \alpha$ *où* α *est l'unique réel satisfaisant*

$$\sum_{i=1}^{N} r_i^{\alpha} = 1$$

Démonstration. La proposition 5.2 nous permet d'appliquer le théorème 5.1, et alors $0 < \mathcal{H}^{\alpha}(K) < +\infty$, et donc $\dim_H(K) = \alpha$. $\square$

Exemple 5.1. L'ensemble triadique de Cantor K vérifie les hypothèses de la proposition 5.2 (par exemple avec l'ouvert $O =]0, \frac{1}{2}[$), comme le rapport de similitude des fonctions $\{f_1, f_2\}$ associés à K sont de $\frac{1}{3}$, il suffit de trouver le nombre α tel que $2(\frac{1}{3})^{\alpha} = 1$ et alors, $\dim_H(K) = \frac{\ln(2)}{\ln 3)}$.
Le triangle de Sierpiński précédemment évoqué est quand à lui de dimension $\frac{\ln(3)}{\ln(2)}$.

Bibliographie

- *"Analysis on Fractals"* de Jun Kigami
- *"Intégration, Probabilités et Processus Aléatoires"* de Jean-François Le Gall