Travail d'Étude et de Recherche

Les fonctions elliptiques

Par ARGOUD Thomas

Encadré par KOBEISSI Salim

Table des matières

Introduction.

Dans ce mémoire on se propose d'étudier les fonctions elliptiques, fonctions qui possèdent deux périodes indépendantes.

Les fonctions méromorphes peuvent se classer dans trois catégories différentes selon leur périodicité et l'une d'entre elles est celle des fonctions elliptiques.

Dans une première partie, nous démontrerons des résultats importants à propos des fonctions elliptiques, notamment le fait qu'une telle fonction entière est constante, nous parlerons aussi de l'ordre d'une fonction elliptique et les résultats qui découlent de cette définition.

Dans un second temps, nous étudierons de nombreux exemples de fonctions elliptiques telles que la fonction $\wp$ de Weierstrass, les fonctions de Jacobi ou bien le sinus lemniscatique ainsi que leurs applications aux fonctions elliptiques. En effet, nous verrons que toute fonction elliptique est une fraction rationnelle de $\wp$ et $\wp'$ ou encore un produit de fonctions de Jacobi θ_3.

1 Préliminaires.

Définition 1.1

*Une fonction méromorphe $f:\Omega \to \mathbb{C}$ est dite **périodique** de période $\tau \in \mathbb{C}^*$ si pour tout z dans $\mathbb{C}$:*

$$z+\tau \in \Omega \text{ et } f(z+\tau)=f(z)$$

Remarque 1.2

Il n'y a pas unicité de la période d'une telle fonction, en effet, pour tout λ dans $\tau\mathbb{Z}$, λ est une période de f.

On note Λ_f l'ensemble des périodes de la fonction f

Proposition 1.3

Soit f une fonction méromorphe non constante, de trois choses l'une :

- $\Lambda_f = \varnothing$
- *Il existe $\tau_1 \in \mathbb{C}^*$ une période de f avec $|\tau_1|$ minimal tel que $\Lambda_f = \tau_1\mathbb{Z}^*$*
- *Il existe $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{C}^*$ deux périodes de f tel que :*

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} \notin \mathbb{R} \text{ et } \forall \tau \in \Lambda_f : \exists!(n,m) \in \mathbb{Z}^2,\ \tau = n\tau_1 + m\tau_2$$

Nous appellerons de telles périodes τ_1 et τ_2 des périodes fondamentales de f

Proposition 1.4

Toute fonction méromorphe avec trois périodes indépendantes est constante

Remarques 1.5

(i) Le théorème nous dit en réalité que si nous sommes dans le $3^{\text{ème}}$ cas : $\Lambda_f = \tau_1\mathbb{Z} + \tau_2\mathbb{Z}$; avec τ_1 et τ_2 des périodes fondamentales de f

(ii) Il n'y a pas unicité des périodes fondamentales de f, par exemple, $\pm\tau_1$ et $\pm\tau_2$ en sont aussi

(iii) Toute fonction vérifiant le $3^{\text{ème}}$ cas est dite doublement périodique

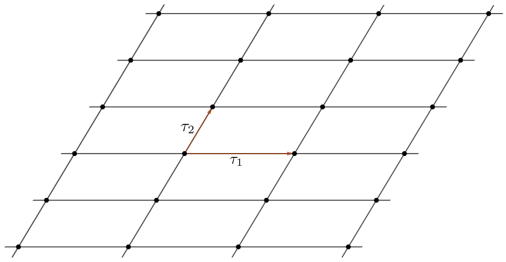


Illustration du $3^{\text{ème}}$ cas

Lemme 1.6

Soit f une fonction périodique non constante, l'ensemble Λ_f ne contient pas de point d'accumulation, c'est un ensemble discret de $\mathbb{C}$.

Démonstration.

On démontre ce lemme par l'absurde.

Posons $\alpha \in \Lambda_f$ un point d'accumulation et soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des pôles de f.

Il existe une suite (τ_n) de Λ_f telle que (τ_n) converge vers α tel que pour tout $i \neq j$: $\tau_j \neq \tau_i$

Soit $z_0 \in \mathbb{C} \backslash \mathcal{P}$, $z_0 + \alpha \in \mathbb{C} \backslash \mathcal{P}$ car $\alpha \in \Lambda_f$, par continuité de la fonction f et périodicité :

$$f(z_0 + \alpha) = \lim_{n \to +\infty} f(z_0 + \tau_n) = f(z_0)$$

Ainsi, $z_0 + \alpha$ est un zéro non isolé de la fonction méromorphe $f - f(z_0)$. Ainsi par le théorème des zéros isolés, $f - f(z_0)$ est identiquement nulle, donc $f \equiv f(z_0)$, ce qui est impossible car f est supposée non constante. $\square$

Remarque 1.7

Pour tout $\mathcal{A}$ non vide tel que $\mathcal{A} \subseteq \Lambda_f$. Alors, il existe $\tilde{\tau} \in \mathcal{A}$ tel que : $|\tilde{\tau}| = \inf\{|\tau|, \tau \in \mathcal{A}\}$

En effet, $\{|\tau|, \tau \in \mathcal{A}\}$ est une partie non vide minorée par 0 sans point d'accumulation. Elle admet donc un minimum.

Démonstration de la proposition.

Si $\Lambda_f = \{0\}$, nous sommes dans le 1^{er} cas. On suppose donc maintenant que $\Lambda_f \neq \{0\}$

D'après la remarque précédente, on sait qu'il existe $\tau_1 \in \Lambda_f$ tel que

$$|\tau_1| = \inf\{|\tau|, \tau \in \Lambda_f\}$$

Posons $\mathcal{B} = \tau_1 \mathbb{Z}$. Il est immédiat que $\mathcal{B} \subset \Lambda_f$.

Si $\mathcal{B} = \Lambda_f$, nous somme dans le $2^{\text{ème}}$ cas, en revanche si $\mathcal{B} \neq \Lambda_f$, il faut montrer que nous sommes dans le $3^{\text{ème}}$ cas.

En utilisant à nouveau la remarque pour $\Lambda_f \backslash \mathcal{B}$, il existe $\tau_2 \in \Lambda_f \backslash \mathcal{B}$ tel que

$$|\tau_2| = \inf\{|\tau|, \tau \in \Lambda_f \backslash \mathcal{B}\}$$

· Montrons pour commencer que $\frac{\tau_1}{\tau_2} \notin \mathbb{R}$. Supposons par l'absurde qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\tau_2 = \lambda \tau_1$. Alors $\lambda \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$, car $\tau_2 \in \Lambda_f \backslash \mathcal{B}$, et de plus $\tau_2 - \lfloor \lambda \rfloor \tau_1 = (\lambda - \lfloor \lambda \rfloor)\tau_1 \in \Lambda_f$, avec $\lambda - \lfloor \lambda \rfloor \in]0; 1[$, ce qui est impossible d'après la définition de τ_1

· Montrons maintenant que toute période τ de Λ_f peut s'écrire de manière unique sous la forme $\tau = n\tau_1 + m\tau_2$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

En effet, puisque $\frac{\tau_1}{\tau_2} \notin \mathbb{R}$, $\{\tau_1, \tau_2\}$ forme une base de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$ espace vectoriel; ce qui entraine l'existance de deux scalaires uniques λ_1 et λ_2 tels que $\tau = \lambda_1\tau_1 + \lambda_2\tau_2$.

De plus, il existe deux entiers n_1 et n_2 tels que $|\lambda_1 - n_1| \leqslant \frac{1}{2}$ et $|\lambda_2 - n_2| \leqslant \frac{1}{2}$.

Ainsi :

$$(\lambda_1 - n_1)\tau_1 + (\lambda_2 - n_2)\tau_2 = \tau - n_1\tau_1 - n_2\tau_2 \in \Lambda_f$$

Par conséquent :

1. Si $\lambda_1 - n_1 = \lambda_2 - n_2 = 0$, alors $\tau = n_1\tau_1 + n_2\tau_2$

2. Si $\lambda_1 - n_1 = 0$ et $\lambda_2 - n_2 \neq 0$, alors $(\lambda_2 - n_2)\tau_2 \in \Lambda_f$ et $|(\lambda_2 - n_2)\tau_2| \leqslant |\tau_2|$

Donc, par définition de τ_2, $(\lambda_2 - n_2)\tau_2 \in \mathcal{B}$, d'où l'existence d'un $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\tau = n\tau_1 + n_2\tau_2$$

3. Le cas $\lambda_1 - n_1 \neq 0$ et $\lambda_2 - n_2 = 0$ est impossible car $(\lambda_1 - n_1)\tau_1 \in \Lambda_f$ et $|(\lambda_1 - n_1)\tau_1| < |\tau_1|$, ce qui contredit la défintion de τ_1

4. Si $(\lambda_1 - n_1)(\lambda_2 - n_2) \neq 0$, on a, puisque $\frac{\tau_1}{\tau_2} \notin \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} |\tau - n_1\tau_1 - n_2\tau_2| & \leqslant & |(\lambda_1 - n_1)\tau_1| + |(\lambda_2 - n_2)\tau_2| \\ & \leqslant & \frac{1}{2}(|\tau_1| + |\tau_2|) \\ & \leqslant & |\tau_2| \end{array}$$

Donc, par défintion de τ_2, $\tau - n_1\tau_1 - n_2\tau_2 \in \mathcal{B}$, d'où l'existence d'un $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\tau = n\tau_1 + n_2\tau_2$$

$\square$

2 Fonctions elliptiques

2.1 Définitions.

Définition 2.1

On appelle ***fonction elliptique*** *toute fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ non constante doublement périodique*

Dans cette section, nous allons nous intéresser aux résultats principaux des fonctions elliptiques avant d'expliciter des exemples dans les sections suivantes.

Définition 2.2

Soient $a \in \mathbb{C}$ et $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{C}^*$, on appelle ***parallélogramme issu de a*** *l'ensemble :*

$$P_a(\tau_1, \tau_2) = \{a + r\tau_1 + s\tau_2, 0 \leqslant r, s < 1\}$$

Dans le cas où f est une fonction elliptique de périodes fondamentales τ_1 et τ_2 et $a = 0$, on parlera d'un **parallélogramme fondamental** de f. On le notera dans la suite $P(\tau_1, \tau_2)$

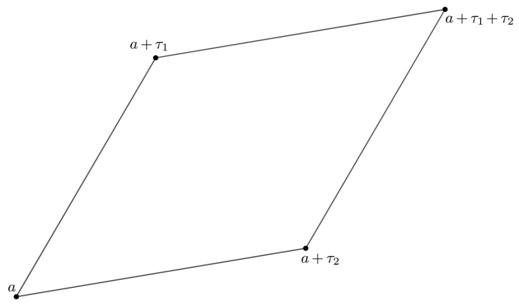


Illustration d'un parallélogramme issu de a

2.2 Théorème de Liouville.

Théorème 2.3

Toute fonction f elliptique holomorphe sur $\mathbb{C}$ est constante.

Lemme 2.4

Soient $a \in \mathbb{C}$ et $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{C}^*$ tels que $\dfrac{\tau_1}{\tau_2} \notin \mathbb{R}$. Alors pour tout z dans $\mathbb{C}$, on peut associer un unique $\zeta \in P_a(\tau_1, \tau_2)$ et deux uniques $n, m \in \mathbb{Z}$ tel que $z = \zeta + n\tau_1 + m\tau_2$

Démonstration.

La démonstration est similaire à celle du précédent lemme en considérant $z - a$.

En effet, $\dfrac{\tau_1}{\tau_2} \notin \mathbb{R}$, donc $\{\tau_1, \tau_2\}$ est une base de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$ espace vectoriel; ce qui entraine l'existance de deux scalaires uniques α et β tels que :

$$z - a = \alpha\tau_1 + \beta\tau_2 = \underbrace{(\alpha - \lfloor\alpha\rfloor)}_{\in[0,1[}\tau_1 + \underbrace{(\beta - \lfloor\beta\rfloor)}_{\in[0,1[}\tau_2 + \lfloor\alpha\rfloor\tau_1 + \lfloor\beta\rfloor\tau_2$$

Donc on a bien montré l'existance d'une telle décomposition, il faut desormais montrer l'unicité. Pour cela, supposons que :

$$\zeta_1 + n_1\tau_1 + m_1\tau_2 = z = \zeta_2 + n_2\tau_1 + m_2\tau_2$$

et donc

$$\zeta_2 - \zeta_1 = (n_1 - n_2)\tau_1 + (m_1 - m_2)\tau_2$$

De plus, $\zeta_1, \zeta_2 \in P_a(\tau_1, \tau_2)$, donc il existe $r, s \in]-1, 1[$ tel que $\zeta_2 - \zeta_1 = r\tau_1 + s\tau_2$

Par unicité de la décomposition dans la base $\{\tau_1, \tau_2\}$ on en déduit :

$$\begin{cases} r = n_1 - n_2 \in \mathbb{Z} \\ s = m_1 - m_2 \in \mathbb{Z} \end{cases} \implies \begin{cases} r = 0 \\ s = 0 \end{cases} \quad \text{car le seul entier entre } -1 \text{ et } 1 \text{ est } 0$$

D'où l'unicité. □

Remarque 2.5

Grâce à ce lemme, nous pouvons en déduire l'egalité suivante :

$$\mathbb{C} = \bigcup_{\gamma \in \Lambda_f} P_{a+\gamma}(\tau_1, \tau_2)$$

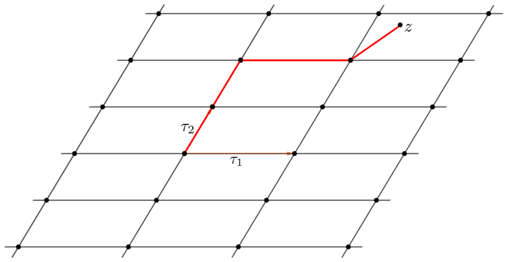


Illustration du lemme 2.4 et de l'égalité précédente

Démonstration du théorème 2.3.

Soit $P(\tau_1, \tau_2)$ un parallélogramme fondamental de f.

La fonction f étant holomorphe sur $\mathbb{C}$, elle est donc continue et ainsi bornée sur $\partial P(\tau_1, \tau_2)$, et par le principe du maximum, f est bornée sur $P(\tau_1, \tau_2)$.

Ainsi, d'après le lemme 2.4, tout nombre complexe z peut s'écrire sous la forme :

$$z = \zeta + n\tau_1 + m\tau_2 \quad \text{avec } \zeta \in P(\tau_1, \tau_2) \text{ et } n, m \in \mathbb{Z}$$

On en déduit donc

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| = \sup_{\zeta \in P(\tau_1, \tau_2)} |f(\zeta)| < +\infty$$

La fonction f est donc bornée et entière, donc constante par le théorème de Liouville.

□

2.3 Ordre d'une fonction elliptique.

Soit $z \in \mathbb{C}$. D'après le lemme 2.4, il existe $\zeta \in P(\tau_1, \tau_2)$ et $n, m \in \mathbb{Z}$ tel que $z = \zeta + n\tau_1 + m\tau_2$.
Vient alors :

Proposition 2.6

$z \in \mathbb{C}$ est un zéro ou un pôle d'ordre p d'une fonction elliptique f si et seulement si ζ est respectivement un zéros ou un pôle d'ordre p

Démonstration.

· Si z est un pôle d'ordre p, par la caracterisation des pôles il existe c tel que l'on ait :

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} h^p f(z+h)=c &\iff \lim_{h\to 0} h^p f(\zeta+n\tau_1+m\tau_2+h)=c\\ &\iff \lim_{h\to 0} h^p f(\zeta+h)=c\\ &\iff \zeta \text{ est un pôle d'ordre } p \text{ de } f\end{aligned}$$

· Si z est un zéro d'ordre p. Remarquons que si f est elliptique, $\frac{1}{f}$ est aussi elliptique ($\mathbb{C}$ est connexe donc $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ est un corps, $\frac{1}{f}$ est donc méromorphe), ainsi on a :

$$\begin{aligned} z \text{ est un zéro d'ordre } p \text{ de } f &\iff z \text{ est un pôle d'ordre } p \text{ de } \frac{1}{f}\\ &\iff \zeta \text{ est un pôle d'ordre } p \text{ de } \frac{1}{f}\\ &\iff \zeta \text{ est un zéro d'ordre } p \text{ de } f\end{aligned}$$

□

Théorème 2.7

Toute fonction elliptique f possède au moins un pôle dans $P(\tau_1,\tau_2)$

Démonstration.

Par l'absurde, si f ne possède aucun pôle dans $P(\tau_1,\tau_2)$. Par la proposition 2.6, f ne possède aucun pôle dans $\mathbb{C}$, ainsi, f est entière. Ainsi, f est donc constante, ce qui est une contradiction. □

Proposition 2.8

*Le nombre fini de pôle (compté avec multiplicité) d'une fonction elliptique f dans un de ses parrallélogrammes fondamentals $P(\tau_1,\tau_2)$ est appelé l'**ordre** de f.*

Démonstration.

Pour que cette définition ait un sens, il faut montrer que le nombre de pôle (compté avec multiplicité), est indépendant de la paire de périodes fondamentales.

Soient (τ_1,τ_2) et (ω_1,ω_2) deux paires de périodes fondamentales de f. Désignons $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ respectivement l'ensemble des pôles de f dans $P(\tau_1,\tau_2)$ et $P(\omega_1,\omega_2)$.

D'après le Théorème 2.7 et le lemme 2.4, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont non vides et finis.

Posons alors $j\colon \begin{array}{l}\mathcal{A}\to\mathcal{B}\\ z\longmapsto\zeta\end{array}$ avec $z=\zeta+n\omega_1+m\omega_2$, $\zeta\in\mathcal{B}$ et $n,m\in\mathbb{Z}$. Cette fonction est bien définie par unicité de la décomposition de z démontré dans le lemme 2.4. Il suffirait alors de montrer que j est bijective pour obtenir le résultat voulu.

· Soit $z_1, z_2\in\mathcal{A}$ tel que $j(z_1)=j(z_2)$. Alors, $z_1-z_2\in\Lambda_f$ et il existe, puisque (τ_1,τ_2) est une paire de période fondamentale et de ce fait forme une base de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$ espace vectoriel, deux scalaires r et s tels que :

$$z_1-z_2=r\tau_1+s\tau_2$$

Comme de plus $z_1,z_2\in P(\tau_1,\tau_2)$ et $z_1-z_2\in\Lambda_f$: $-1<r,s<1$, $r,s\in\mathbb{Z}$

Par conséquent, par l'unicité d'une telle décomposition, $r = s = 0$ et on a bien $z_1 = z_2$.

· Soit $\zeta \in \mathcal{B}$. Alors, il existe $z \in \mathcal{A}$ et $n, m \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$\zeta = z + n\tau_1 + m\tau_2$$

Ainsi, (ω_1, ω_2) étant une paire de périodes fondamentales de f, il existe $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\begin{aligned} z &= \zeta - n\tau_1 + m\tau_2 \\ &= \zeta - n(p_1\omega_1 + q_1\omega_2) - m(p_2\omega_1 + q_2\omega_2) \\ &= \zeta + (-n\,p_1 - m\,p_2)\omega_1 + (-n\,q_1 - m\,q_2)\omega_2 \end{aligned}$$

D'où, $j(z) = \zeta$

La fonction j est donc bijective, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ étants finis, on en déduit que $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}|$ □

Proposition 2.9

L'ordre d'une fonction elliptique est supérieur où égal à 2

Lemme 2.10

La somme des résidus des pôles de f dans un de ses parrallélogrammes $P_a(\tau_1, \tau_2)$ est nulle.

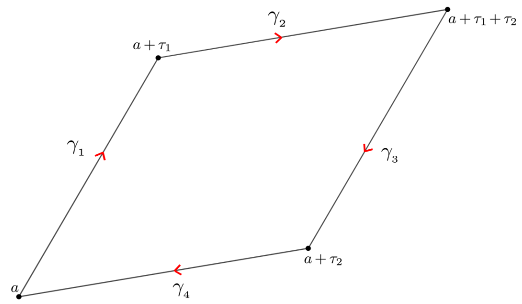
Démonstration.

Soient $\{b_1, \ldots, b_n\}$ les n pôles distincts de f contenus dans $P(\tau_1, \tau_2)$.

Supposons pour commencer que $\{b_1, \ldots, b_n\} \cap \partial P(\tau_1, \tau_2) = \varnothing$.

En supposant le bord $P(\tau_1, \tau_2)$ orienté positivement, on a d'après le théorème des résidus :

$$-2i\pi \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}(f, b_j) = \int_{\partial P(\tau_1, \tau_2)} f(z)\,\mathrm{d}z$$



Ainsi :

$$\begin{aligned} \int_{\partial P(\tau_1, \tau_2)} f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_4} f(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \tau_1 \int_0^1 f(t\tau_1)\,\mathrm{d}t + \tau_2 \int_0^1 f(\tau_1 + t\tau_2)\,\mathrm{d}t - \tau_1 \int_0^1 f(\tau_2 + t\tau_1)\,\mathrm{d}t - \tau_2 \int_0^1 f(t\tau_2)\,\mathrm{d}t \\ &= \tau_1 \int_0^1 f(t\tau_1)\,\mathrm{d}t + \tau_2 \int_0^1 f(t\tau_2)\,\mathrm{d}t - \tau_1 \int_0^1 f(t\tau_1)\,\mathrm{d}t - \tau_2 \int_0^1 f(t\tau_2)\,\mathrm{d}t \\ &= 0 \end{aligned}$$

Supposons desormais qu'au moins un des pôles b_j se trouve sur le bord de $P(\tau_1, \tau_2)$.

Les pôles étant isolés, il existe $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tel que sur le bord du parallélogramme fondamental translaté

$$P_\alpha = \{\zeta + \alpha, \zeta \in P(\tau_1, \tau_2)\}$$

il n'y ai aucun pôle de la fonction f mais que son intérieur contienne tous les pôles de f contenus dans $P(\tau_1, \tau_2)$ et seulement ceux-ci.

En effet, soit S l'ensembe des pôles de f, $S \cap P_\alpha$ est fini, donc il existe $\tilde{r} \in [0, 1[$ tel que :

$$\{\tilde{r}\tau_1 + s\tau_2, s \in [0, 1[\} \cap S = \varnothing$$

De même, il existe $\tilde{s} \in [0, 1[$ tel que

$$\{r\tau_1 + \tilde{s}\tau_2, r \in [0, 1[\} \cap S = \varnothing$$

On pose alors $\alpha = \tilde{r}\tau_1 + \tilde{s}\tau_2$, ainsi :

$$\partial(P_\alpha) = \{(\tilde{r} + r)\tau_1 + \tilde{s}\tau_2, r \in [0, 1[\} \cup \{\tilde{r}\tau_1 + (s + \tilde{s})\tau_2, s \in [0, 1[\} \cup \{(\tilde{r} + r)\tau_1 + (\tilde{s} + 1)\tau_2, r \in [0, 1[\} \cup \{(\tilde{r} + 1)\tau_1 + (\tilde{s} + s)\tau_2, s \in [0, 1[\} \cup \{(\tilde{r} + 1)\tau_1 + (\tilde{s} + 1)\tau_2\}$$

n'intersecte pas S par Λ_f périodicité de f.

Ainsi par un calcul identique au précédent appliqué au parallélogramme P_α, on obtient que la somme des résidus est nulle. □

Démonstration de la proposition 2.9.

Supposons par l'absurde que $o(f) < 2$.

· Si $o(f) = 0$, f ne possède pas de pôle et est donc holomorphe. Or toute fonction elliptique holomorphe est constante, ce qui contredit l'hypothèse

· Si $o(f) = 1$. Posons p l'unique pôle (simple) de f.

Au voisinnage de p on peut alors écrire $f(z) = \dfrac{\lambda}{z - p} + g(z)$, avec g une fonction holomorphe.

Mais alors, $\text{Res}(f, p) = \lambda$, d'après le lemme 2.10 on a donc $\lambda = 0$, donc f est est holomorphe; finalement f est constante contrairement à l'hypothèse.

□

Théorème 2.11

Toute fonction elliptique d'ordre m possède exactement m zéros (comptés avec multiplicité) dans $P_a(\tau_1, \tau_2)$, $a \in \mathbb{C}$

Lemme 2.12

Soit f une fonction elliptique Λ_f-périodique, f' est une fonction ellitique Λ_f-périodique.

Démonstration.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \Lambda_f$: $f(z + \lambda) = f(z)$

Ainsi en dérivant cette égalité on obtient : $f'(z + \lambda) = f'(z)$

La dérivée d'une fonction méromorphe est aussi une fonction méromorphe, on en déduit alors que f' est une fonction élliptique Λ_f-périodique.

□

Démonstration du théorème.

Supposons pour commencer qu'il n'y ait ni zéro ni pôle de f sur $\partial P(\tau_1,\tau_2)$.

En supposant $\partial P(\tau_1,\tau_2)$ orienté positivement, d'après le théorème de l'indice :

$$\begin{aligned}
2i\pi(\mu-\nu) &= \int_{\partial P(\tau_1,\tau_2)} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z \\
&= \tau_1\int_0^1 \frac{f'(t\tau_1)}{f(t\tau_1)}\,\mathrm{d}t + \tau_2\int_0^1 \frac{f'(\tau_1+t\tau_2)}{f(\tau_1+t\tau_2)}\,\mathrm{d}t - \tau_1\int_0^1 \frac{f'(\tau_2+t\tau_1)}{f(\tau_2+t\tau_1)}\,\mathrm{d}t - \tau_2\int_0^1 \frac{f'(t\tau_2)}{f(t\tau_2)}\,\mathrm{d}t \\
&= \tau_1\int_0^1 \frac{f'(t\tau_1)}{f(t\tau_1)}\,\mathrm{d}t + \tau_2\int_0^1 \frac{f'(t\tau_2)}{f(t\tau_2)}\,\mathrm{d}t - \tau_1\int_0^1 \frac{f'(t\tau_1)}{f(t\tau_1)}\,\mathrm{d}t - \tau_2\int_0^1 \frac{f'(t\tau_2)}{f(t\tau_2)}\,\mathrm{d}t \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ou μ et ν sont réspectivement le nombre de zéros et de pôles (comptés avec multiplicité) de la fonction f dans $P(\tau_1,\tau_2)$.

Suppsons à présent qu'au moins un des pôles ou un des zéros de f se trouve sur le bord $\partial P(\tau_1,\tau_2)$. Les pôles étant isolés, il existe $\alpha\in\mathbb{C}^*$ tel que sur le bord du parallélogramme fondamental translaté

$$P_\alpha = \{\zeta+\alpha,\ \zeta\in P(\tau_1,\tau_2)\}$$

il n'y ait aucun pôle de la fonction f mais que son intérieur contienne tous les pôles de f contenus dans $P(\tau_1,\tau_2)$ et seulement ceux-ci.

Ainsi par un calcul identique au précédent appliqué au parallélogramme $P_\alpha(\tau_1,\tau_2)$, on montre que dans $P_\alpha(\tau_1,\tau_2)$, donc dans $P(\tau_1,\tau_2)$, la fonction f a le même nombre de zéros que de pôles (comptés avec multiplicité). $\square$

Remarque 2.13

Nous avons démontré au passage que l'ensemble des fonctions élliptiques de périodes τ_1 et τ_2 est stable par dérivation et que c'est un corps pour l'addition et la multiplication, mais nous ne savons pas encore s'il existe des fonctions elliptiques non triviales.

Corollaire 2.14

Soit f une fonction elliptique d'ordre m. Alors $\forall\omega\in\mathbb{C}$, l'équation $f(z)=\omega$ admet exactement m solutions (comptés avec multiplicité).

Proposition 2.15

Soit f une fonction elliptique. Alors, si $a_1,\dots,a_p$ sont les p zéros distincts d'ordres respectifs $n_1,\dots,n_p$ et $b_1,\dots,b_q$ les pôles distincts d'ordre respectifs $m_1,\dots,m_p$ de la fonction f dans $P_a(\tau_1,\tau_2)$, $a\in\mathbb{C}$, il existe deux entiers n et m tel que :

$$\sum_{j=1}^{p} n_j a_j - \sum_{j=1}^{q} m_j b_j = n\tau_1 + m\tau_2$$

Démonstration.

Supposons pour commencer qu'il n'y a ni zéros ni pôles de f sur $\partial P(\tau_1,\tau_2)$. En supposant $\partial P(\tau_1,\tau_2)$ orienté positivement, d'après le théorème des résidus :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial P(\tau_1,\tau_2)} z\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{p} \mathrm{Res}_{a_j}\left(\mathrm{Id}\frac{f'}{f}\right) + \sum_{j=1}^{q} \mathrm{Res}_{b_j}\left(\mathrm{Id}\frac{f'}{f}\right)$$

• a_j étant un zéro d'ordre n_j de f, il existe $\delta_j > 0$ et $g_j \in \mathcal{H}(B(a_j, \delta_j))$ tel que $\forall z \in B(a_j, n_j)$:

$$f(z) = (z - a_j)^{n_j} g_j(z) \text{ et } g_j(z) \neq 0$$

et donc, on a

$$z\frac{f'(z)}{f(z)} = n_j + \frac{n_j a_j}{z - a_j} + z\frac{g_j'(z)}{g_j(z)}$$

D'où

$$\mathrm{Res}_{a_j}\left(\mathrm{Id}\frac{f'}{f}\right) = n_j a_j$$

• b_j étant un pôle d'ordre m_j de f, il existe $\rho_j > 0$ et $h_j \in \mathcal{H}(B(b_j, \rho_j))$ tel que $\forall z \in B(b_j, \rho_j)$:

$$f(z) = (z - b_j)^{-\rho_j} h_j(z) \text{ et } h_j(z) \neq 0$$

et donc, on a

$$z\frac{f'(z)}{f(z)} = -m_j + \frac{m_j b_j}{z - b_j} + z\frac{h_j'(z)}{h_j(z)}$$

D'où

$$\mathrm{Res}_{b_j}\left(\mathrm{Id}\frac{f'}{f}\right) = -m_j b_j$$

D'autre part, en revenant à la définition de l'intégrale curviligne, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\partial P(\tau_1,\tau_2)} z\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z &= \tau_1\int_0^1 \tau_1 t\frac{f'(\tau_1 t)}{f(\tau_1 t)}\,\mathrm{d}t + \tau_2\int_0^1 (\tau_1 + \tau_2 t)\frac{f'(\tau_1 + \tau_2 t)}{f(\tau_1 + \tau_2 t)}\,\mathrm{d}t \\
&\quad -\tau_1\int_0^1 (\tau_1 t + \tau_2)\frac{f'(\tau_1 t + \tau_2)}{f(\tau_1 t + \tau_2)}\,\mathrm{d}t - \tau_2\int_0^1 \tau_2 t\frac{f'(\tau_2 t)}{f(\tau_2 t)}\,\mathrm{d}t \\
&= \tau_1\int_0^1 \tau_2\frac{f'(\tau_2 t)}{f(\tau_2 t)}\,\mathrm{d}t - \tau_2\int_0^1 \tau_1\frac{f'(\tau_1 t)}{f(\tau_1 t)}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Montrons désormais que pour $j = 1, 2$:

$$\int_0^1 \tau_j\frac{f'(\tau_j t)}{f(\tau_j t)}\,\mathrm{d}t = k_j 2i\pi \quad k_j \in \mathbb{Z}$$

Pour cela, posons pour $s \in [0,1]$: $u_j(s) = f(\tau_j s)e^{-v_j(s)}$ où $v_j(s) = \displaystyle\int_0^s \tau_j\frac{f'(\tau_j t)}{f(\tau_j t)}\,\mathrm{d}t$

Ainsi, pour tout $s \in]0,1[$ on a :

$$u_j'(s) = \tau_j f'(\tau_j s)e^{-v_j(s)} - \tau_j\frac{f'(\tau_j s)}{f(\tau_j s)} f(\tau_j s)e^{-v_j(s)} = 0$$

Puis, grâce à la continuité de la fonction u, pour tout $s \in [0,1]$: $u_j(s) = f(0)$

Par conséquent,

$$f(0) = u_j(1) = f(\tau_j)e^{-v_j(1)} = f(0)e^{-v_j(1)}$$

et donc

$$v_j(1) = \int_0^1 \tau_j\frac{f'(\tau_j t)}{f(\tau_j t)}\,\mathrm{d}t = k_j 2i\pi \quad k_j \in \mathbb{Z}$$

En résumé,

$$\sum_{j=1}^{p} n_j a_j - \sum_{j=1}^{q} m_j b_j = k_2\tau_1 - k_1\tau_2$$

et en prenant $n = k_2$ et $m = -k_1$, on obtient le résultat.

Supposons à présent qu'au moins un des pôles ou un des zéros de f se trouve sur le bord $\partial P(\tau_1, \tau_2)$. Les pôles étant isolés, il existe $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tel que sur le bord du parallélogramme fondamental translaté

$$P_\alpha = \{\zeta + \alpha, \zeta \in P(\tau_1, \tau_2)\}$$

il n'y ai aucun pôle de la fonction f mais que son intérieur contienne tous les pôles de f contenus dans $P(\tau_1, \tau_2)$ et seulement ceux-ci.

Ainsi par un calcul identique au précédent appliqué au parallélogramme P_α, on peut conclure. $\square$

3 La fonction $\wp$ de Weierstrass

Dans le chapitre précédent, nous avons vu de nombreux résultats sur les fonctions elliptiques. Il est très aisé de constuire des fonctions ne possédant qu'une seule période, cependant, il est beaucoup plus compliquer de construire des fonctions (non triviales) admettant deux periodes fondamentales distinctes. Dans cette partie nous allons traiter l'exemple de la fonction $\wp$ de Weierstrass. Après avoir construit cette fonction, nous montrerons que toute fonction elliptique de même période que $\wp$ est une fonction rationnelle de $\wp$ et $\wp'$.

3.1 Définition de la fonction $\wp$ de Weierstrass.

Soient $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{C}^*$ tels que $\frac{\tau_1}{\tau_2} \notin \mathbb{R}$ fixés et posons

$$\forall k \in \mathbb{N} : \Upsilon_k = \{(n,m) \in \mathbb{Z}^2, \max(|n|,|m|) = k\}$$

Tous les Υ_k sont symétriques par rapport à l'origine. Autrement dit,

$$(n,m) \in \Upsilon_k \quad \Leftrightarrow \quad (-n,-m) \in \Upsilon_k$$

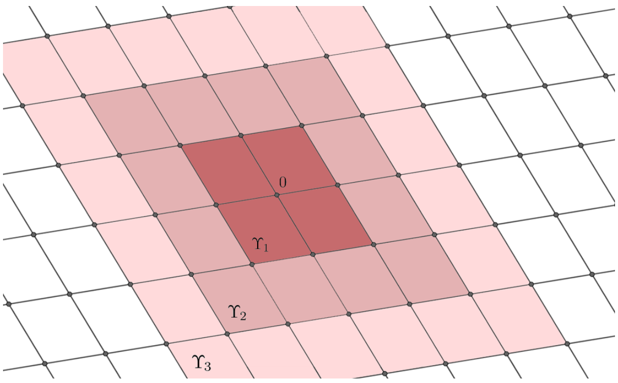


Illustration de Υ_k pour $k = 1,2,3$

Posons de plus :

$$\forall n,m \in \mathbb{Z} : \sigma_{n,m} = n\tau_1 + m\tau_2$$

$$\Lambda = \{\sigma_{n,m}, n,m \in \mathbb{Z}\} \quad \text{et} \quad \Lambda^* = \Lambda \backslash \{0\}$$

Λ définit un **réseau** symétrique par rapport à l'origine.

Proposition / Définition 3.1

Étant donné un réseau Λ, on lui associe une fonction notée $\wp_\Lambda$, ou $\wp$ s'il n'y a pas de confusion à craindre, et définie sur $\mathbb{C}\backslash\Lambda$ par

$$\wp_\Lambda(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\gamma \in \Lambda^*} \left(\frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right)$$

Cette fonction est appelée **fonction $\wp$ de Weierstrass**.

Proposition 3.2

La fonction $\wp$ est méromorphe dans $\mathbb{C}$. Plus particulierement :

1. $\wp \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\backslash\Lambda)$ *et* $\wp'(z) = -2 \sum_{\gamma \in \Lambda} \frac{1}{(z-\gamma)^3}$

2. *Tous les points du réseau Λ sont des pôles doubles de $\wp$ de résidu 0*

Pour montrer cette proposition ainsi que la bonne définition de $\wp$, nous allons d'abord démontrer deux lemmes :

Lemme 3.3

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{(n,m)\in\Upsilon_k} \frac{1}{|\sigma_{n,m}|^3} \leqslant \frac{8}{\delta^3 k^2}$$

où $\delta = \min\{|\sigma_{n,m}|, (n,m) \in \Upsilon_1\}$

Démonstration.

On a pour tout $k > 0$:

$$\begin{aligned} |\Upsilon_k| &= |\{(n,m)\in\mathbb{Z}^2, \max(|n|,|m|)\leqslant k\}| - |\{(n,m)\in\mathbb{Z}^2, \max(|n|,|m|)\leqslant k-1\}| \\ &= (2k+1)^2-(2k-1)^2 \\ &= 8k \end{aligned}$$

Υ_k contient donc $8k$ points.

Ensuite, pour tout $(n,m)\in\Upsilon_k$: $|\sigma_{n,m}|\geqslant k\delta$. En effet, supposons sans perte de généralité $|\tau_1|\geqslant|\tau_2|$ Nécessairement, $\delta = |\tau_2| = |\sigma_{0,1}|$. Ainsi on a :

$$|n\tau_1+m\tau_2| \geqslant \max(|n|,|m|)|\tau_2| = k\delta$$

On a alors immédiatement :

$$\begin{aligned} \sum_{(n,m)\in\Upsilon_k} \frac{1}{|\sigma_{n,m}|^3} &\leqslant \sum_{(n,m)\in\Upsilon_k} \frac{1}{(k\delta)^3} \\ &\leqslant \frac{8}{\delta^3 k^2} \end{aligned}$$

□

Lemme 3.4

Pour tout $\omega\in\Lambda$, la suite $(\Psi_{w,p})$ définie par

$$\Psi_{\omega,p}(z) = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{\substack{(n,m)\in\Upsilon_k \\ \sigma_{n,m}\neq\omega}}\left(\frac{1}{(z-\sigma_{n,m})^2}-\frac{1}{\sigma_{n,m}^2}\right)\right)$$

est uniformément convergente sur tout compact $K\subset\mathbb{C}\backslash(\Lambda^*\backslash\{\omega\})$

Démonstration.

K étant un compact, il existe un nombre $r>0$ tel que $K\subset B(0,r)$. Ainsi, puisque pour tout $z\in K$ et tout $|\sigma_{n,m}| = |n\tau_1+m\tau_2| > 2r$:

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{(z-\sigma_{n,m})^2}-\frac{1}{\sigma_{n,m}^2}\right| &= \left|\frac{\sigma_{n,m}^2-(z^2-2z\sigma_{n,m}+\sigma_{n,m}^2)}{\sigma_{n,m}^2(z-\sigma_{n,m})^2}\right| \\ &= \left|\frac{z(z-2\sigma_{n,m})}{\sigma_{n,m}^2(z-\sigma_{n,m})^2}\right| \\ &= \frac{|z|\left|2-\dfrac{z}{\sigma_{n,m}}\right|}{|\sigma_{n,m}|^3\left|1-\dfrac{z}{\sigma_{n,m}}\right|^2} \\ &< \frac{10r}{|\sigma_{n,m}|^3} \end{aligned}$$

On obtient ainsi, d'après le lemme précédent, que pour tout couple d'entier $j > l > \dfrac{2r}{\delta}$:

$$\begin{aligned}
\sup_{z\in K} |\Psi_{\omega,j}(z) - \Psi_{\omega,l}(z)| &= \sup_{z\in K} \left| \sum_{k=l+1}^{j} \left(\sum_{\substack{(n,m)\in\Upsilon_k \\ \sigma_{n,m}\neq\omega}} \left(\frac{1}{(z-\sigma_{n,m})^2} - \frac{1}{\sigma_{n,m}^2} \right) \right) \right| \\
&\leqslant 10r \sum_{k=l+1}^{j} \left(\sum_{(n,m)\in\Upsilon_k} \frac{1}{|\sigma_{n,m}|^3} \right) \\
&\leqslant \frac{80r}{\delta^3} \sum_{k=l+1}^{j} \frac{1}{k^2}
\end{aligned}$$

Par conséquent, $(\Psi_{\omega,p})_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy sur K pour $\|\cdot\|_\infty$, elle est donc uniformément convergente sur K. □

Nous pouvons désormais démontrer la proposition 3.2.

Démonstration.

1. Pour montrer que la fonction $\wp$ est bien définie sur $\mathbb{C}\backslash\Lambda$, on écrit :

$$\begin{aligned}
\wp(z) &= \frac{1}{z^2} + \sum_{\gamma\in\Lambda^*} \left(\frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right) \\
&= \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{(n,m)\in\Upsilon_k} \left(\frac{1}{(z-\sigma_{n,m})^2} - \frac{1}{\sigma_{n,m}^2} \right) \right) \\
&= \frac{1}{z^2} + \lim_{p\to+\infty} \Psi_{0,p}(z)
\end{aligned}$$

Ensuite, d'après le théorème de Weierstrass[3.1] et le lemme 3.4, la fonction

$$\Psi_0 = \lim_{p\to+\infty} \Psi_{0,p}$$

est holomorphe dans $\mathbb{C}\backslash\Lambda^*$ et

$$\begin{aligned}
\Psi_0'(z) &= \lim_{p\to+\infty} \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{(n,m)\in\Upsilon_k} \left(\frac{1}{(z-\sigma_{n,m})^2} - \frac{1}{\sigma_{n,m}^2} \right)' \right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{(n,m)\in\Upsilon_k} \left(-\frac{2}{(z-\sigma_{n,m})^3} \right) \right) \\
&= -2 \sum_{\gamma\in\Lambda^*} \frac{1}{(z-\gamma)^3}
\end{aligned}$$

D'où $\wp \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\backslash\Lambda)$ et

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + \Psi_0'(z) = -2 \sum_{\gamma\in\Lambda} \frac{1}{(z-\gamma)^3}$$

3.1. Soit (f_n) une suite de fonction holomorphes dans un ouvert U de $\mathbb{C}$ qui convergent compactement sur U vers une fonction f. Alors f est holomorphe dans U, et pour tout $k\in\mathbb{N}$, la suite des dérivées k-ième $\left(f_n^{(k)}\right)$ convergent compactement sur U vers $f^{(k)}$

2. D'après ce qui précède :

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \Psi_0(z)$$

avec Ψ_0 une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\Lambda^*$, donc au voisinage de 0. Ainsi la fonction $\wp$ possède en 0 un pôle double de résidu 0.

Maintenant, soit $\omega \in \Lambda^*$, posons

$$\Psi_\omega(z) = \lim_{p\to+\infty} \Psi_{\omega,p}(z) = \sum_{\gamma\in\Lambda^*\backslash\{\omega\}} \left(\frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2}\right)$$

Alors, puisque $\Psi_\omega \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\backslash(\Lambda^*\backslash\{\omega\}))$ et

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \Psi_\omega(z) + \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}$$

la fonction $\wp$ possède en ω un pôle double de résidu 0. □

Remarque 3.5

Le résau Λ étant symétrique par rapport à l'origine, on a :

$$\sum_{\gamma\in\Lambda^*} \left(\frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2}\right) = \sum_{\gamma\in\Lambda^*} \left(\frac{1}{(z+\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2}\right)$$

3.2 Propriétés de la fonction $\wp$.

Proposition 3.6

La fonction $\wp$ est paire.

Démonstration.

Pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\Lambda$:

$$\begin{aligned}
\wp_\Lambda(-z) &= \frac{1}{z^2} + \sum_{\gamma\in\Lambda^*} \left(\frac{1}{(-z-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2}\right) \\
&= \frac{1}{z^2} + \sum_{\gamma\in\Lambda^*} \left(\frac{1}{(z+\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2}\right) \\
&= \wp_\Lambda(z)
\end{aligned}$$

□

Proposition 3.7

(τ_1, τ_2) est une paire de périodes fondamentales de la fonction $\wp$. Autrement dit, $\Lambda_\wp = \Lambda^*$

Démonstration.

Il n'est pas évident de voir que τ_1 et τ_2 sont deux périodes de la fonction $\wp$. En revanche, pour la fonction $\wp'$ c'est est clair. En effet, remplacer z par $z+\tau_i$ $(i=1,2)$ dans l'expression de $\wp'$ revient à effectuer une bijection sur les indices, qui laisse invariante la somme.

On a donc pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\Lambda$:

$$\wp'(z+\tau_j) - \wp'(z) = 0 \quad j = 1, 2$$

Ainsi, $\mathbb{C}\backslash\Lambda$ étant un domaine (ouvert connexe de $\mathbb{C}$), il existe deux constantes c_1 et c_2 telles que pour tout $z\in\mathbb{C}\backslash\Lambda$:

$$\wp(z+\tau_j)-\wp(z)=c_j \quad j=1,2$$

Ainsi, en prenant $z=-\frac{\tau_j}{2}$, on a, $\wp$ étant une fonction paire, que

$$c_j=\wp\left(\frac{\tau_j}{2}\right)-\wp\left(-\frac{\tau_j}{2}\right)=0$$

Par conséquent, τ_1 et τ_2 sont deux périodes de la fonction $\wp$. D'où $\Lambda^*\subset\Lambda_\wp$.

Montrons à présent l'inclusion réciproque. Pour cela, soit $\tau\in\Lambda_\wp$. Alors, puisque l'origine est un pôle double de la fonction $\wp$ d'après la proposition 3.2, on a :

$$\lim_{h\to0}h^2\wp(\tau+h)=\lim_{h\to0}h^2\wp(h)=l\neq0$$

Par conséquent, la fonction $\wp$ possédant un pôle double en τ, on a que $\tau\in\Lambda^*$. $\square$

Théorème 3.8

La fonction $\wp$ est elliptique paire d'ordre 2 qui admet (τ_1,τ_2) pour périodes fondamentales.

Proposition 3.9

$\wp'$ est une fonction elliptique impaire d'ordre 3 dont (τ_1,τ_2) est une paire de périodes fondamentales. De plus dans $P_{\wp'}(\tau_1,\tau_2)$:

1. *0 est son unique pôle. C'est un pôle triple de résidu 0*
2. *$\frac{\tau_1}{2},\frac{\tau_2}{2}$ et $\frac{\tau_1+\tau_2}{2}$ sont ses trois uniques zéros (simples)*

Démonstration.

1. Nous avons déja vus dans la précédente démonstration que la fonction $\wp'$ est périodique avec pour périodes fondamentales le couple (τ_1,τ_2).

Ensuite, on a

$$\wp'(z)=-\frac{2}{z^3}+\Psi_0'(z)$$

et $\Psi_0'\in\mathcal{H}(\mathbb{C}\backslash\Lambda^*)$, son unique pôle dans $P_{\wp'}(\tau_1,\tau_2)$ est un pôle triple en 0 de résidu 0.

Ainsi, la fonction dérivée $\wp'$ est une fonction elliptique impaire (car $\wp$ est paire) d'ordre 3 dont (τ_1,τ_2) est une paire de périodes fondamentales.

2. Soit $z_0\in\left\{\frac{\tau_1}{2},\frac{\tau_2}{2},\frac{\tau_1+\tau_2}{2}\right\}$. Alors,

$$\wp'(z_0)=-\wp'(-z_0)=\wp'(-z_0+2z_0)=-\wp'(z_0) \quad\Rightarrow\quad \wp'(z_0)=0$$

Ainsi, $\frac{\tau_1}{2},\frac{\tau_2}{2}$ et $\frac{\tau_1+\tau_2}{2}$ sont les trois uniques zéros (simples) de la fonction $\wp'$ dans $P_{\wp'}(\tau_1,\tau_2)$. $\square$

Définition 3.10

On définit pour tout $j\in\mathbb{N}$, $j\geqslant3$:

$$G_j(\Lambda)=\sum_{\gamma\in\Lambda^*}\frac{1}{\lambda^j}$$

Lemme 3.11

La famille $\left(\frac{1}{|\gamma|^\alpha}\right)_{\gamma\in\Lambda^*}$ est sommable pour $\alpha>2$.

Démonstration.

Nous avons déja démontré le cas $\alpha=3$ plus haut mais nous aurons besoin du cas général pour la suite.

$$\begin{aligned}
\sum_{\gamma\in\Lambda^*}\frac{1}{|\gamma|^\alpha} &= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{(n,m)\in\Upsilon_k}\frac{1}{|\sigma_{n,m}|^\alpha}\right)\\
&\leqslant \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{(n,m)\in\Upsilon_k}\frac{1}{(k\delta)^\alpha}\right)\\
&\leqslant \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{8k}{(k\delta)^\alpha}\right)\\
&\leqslant \frac{8}{\delta^\alpha}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{\alpha-1}}
\end{aligned}$$

Cette série est convergente car $\alpha>2$. □

Cherchons à présent le développement de Laurent de $\wp$ au voisinage de zéro.

Posons pour cela la fonction f défini par $f(z)=\sum_{\gamma\in\Lambda^*}\left(\frac{1}{(z+\gamma)^2}-\frac{1}{\gamma^2}\right)$, qui est holomorphe au voisinage de 0 d'après les différents lemmes qui précèdent. De plus, les dérivées successives de f se calculent aisément en dérivant terme à terme sous le signe $\sum$:

$$f^{(n)}(z)=(-1)^n(n+1)!\sum_{\gamma\in\Lambda^*}\frac{1}{(z+\gamma)^{n+2}}$$

En prenant $z=0$, il vient

$$f^{(n)}(0)=(-1)^n(n+1)!\sum_{\gamma\in\Lambda^*}\frac{1}{\gamma^{n+2}}$$

On rappelle de plus que si $\gamma\in\Lambda^*$, on a aussi $-\gamma\in\Lambda^*$. La famille $\left(\frac{1}{\gamma^{n+2}}\right)_{\gamma\in\Lambda^*}$ étant sommable, nous pouvons réorganiser l'ordre des termes dans le calcul de la somme. Ainsi, si n est impair, la somme $\frac{1}{\gamma^{n+2}}+\frac{1}{(-\gamma)^{n+2}}$ est nulle, donc aussi $f^{(n)}(0)$. Finalement, la formule de Taylor nous donne le développement en série entière de f à l'origine, donc le développement de Laurent de $\wp$:

Au voisinage de 0 on a

$$\begin{aligned}
\wp(z) &= \frac{1}{z^2}+f(z)\\
&= \frac{1}{z^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left((-1)^n\frac{(n+1)!}{n!}\left(\sum_{\gamma\in\Lambda^*}\frac{1}{\gamma^{n+2}}\right)z^n\right)\\
&= \frac{1}{z^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{\gamma\in\Lambda^*}\frac{2n+1}{\gamma^{2n+2}}\right)z^{2n}\\
&= \frac{1}{z^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(2n+1)G_{2n+2}\,z^{2n}
\end{aligned}$$

Théorème 3.12

La fonction $\wp$ est solution de l'équation différentielle :

$$u'^2=4u^3-60G_4u-140G_6$$

Démonstration.

On a les développements limités au voisinage de 0 suivants :

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + 3G_4 z^2 + 5G_6 z^4 + O(z^5)$$

$$\wp'(z) = \frac{-2}{z^3} + 6G_4 z + 20G_6 z^3 + O(z^4)$$

$$\wp'(z)^2 = \frac{4}{z^6} - \frac{24G_4}{z^2} + 80G_6 + O(z)$$

$$\wp(z)^3 = \frac{1}{z^6} + \frac{9G_4}{z^2} + 15G_6 + O(z)$$

Ainsi, un simple calcul montre que l'on a :

$$\wp'^2(z) - 4\wp^3(z) + 60G_4\wp(z) + 140G_6 = O(z)$$

Par conséquent, la fonction $\wp'^2 - 4\wp^3 + 60G_4\wp + 140G_6$ est une fonction entière elliptique. Ainsi, par le Théorème 2.3, elle est constante. Cette constante étant nulle (il suffit de prendre la limite $z \to 0$), on obtient alors :

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - 60G_4\wp - 140G_6$$

□

Dans la suite, on pose :

$$g_2 = g_2(\Lambda) = 60G_4$$
$$g_3 = g_3(\Lambda) = 140G_4$$

L'équation différentielle s'écrit alors :

$$u'^2 = 4u^3 - g_2 u - g_3$$

Corollaire 3.13

Le polynôme $f = 4X^3 - g_2X - g_3$ possède trois zéros distincts, à savoir $\wp\left(\frac{\tau_1}{2}\right)$, $\wp\left(\frac{\tau_2}{2}\right)$ et $\wp\left(\frac{\tau_1+\tau_2}{2}\right)$ et par conséquent on a, pour tout réseau Λ, $g_2(\Lambda)^3 - 27g_3(\Lambda)^2 \neq 0$

Démonstration.

La prémière partie provient du fait que $f(\wp) = \wp'^2$ et que les trois uniques zéros de $\wp'$ dans $P(\tau_1, \tau_2)$ sont $\frac{\tau_1}{2}$, $\frac{\tau_2}{2}$ et $\frac{\tau_1+\tau_2}{2}$. De plus, les trois valeurs $\wp\left(\frac{\tau_1}{2}\right)$, $\wp\left(\frac{\tau_2}{2}\right)$ et $\wp\left(\frac{\tau_1+\tau_2}{2}\right)$ sont distinctes deux à deux, sinon pour $j = 1, 2$ l'équation $\wp(z) = \wp\left(\frac{\tau_j}{2}\right)$ aurait quatres solutions dans $P(\tau_1, \tau_2)$ comme le montre le lemme 3.9 (comptées avec leurs ordres de multiplicité) au lieu de 2, qui est l'ordre de la fonction $\wp$, ce qui est en contradiction avec le corollaire 2.14.

Enfin, on sait que l'équation $x^3 + px + q = 0$ possède une racine double si et seulement si

$$\Delta = 4p^3 + 27q^2 = 0$$

Ainsi, en considérant l'équation $4x^3 - g_2(\Lambda)x - g_3(\Lambda) = 0$, dont nous venons de trouver les 3 solutions distinctes deux à deux, on a

$$4\left(\frac{-g_2(\Lambda)}{4}\right)^3 + 27\left(\frac{-g_3(\Lambda)}{4}\right)^2 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad g_2^3(\Lambda) - 27g_3^2(\Lambda) \neq 0$$

□

3.3 Application aux fonctions elliptiques.

Lemme 3.14

Soit $z_0 \in P(\tau_1, \tau_2)$. Alors :

1. *Si $z_0 \notin \left\{0, \frac{\tau_1}{2}, \frac{\tau_2}{2}, \frac{\tau_1+\tau_2}{2}\right\}$: z_0 est un zéro simple de la fonction $\wp - \wp(z_0)$*
2. *Si $z_0 \in \left\{\frac{\tau_1}{2}, \frac{\tau_2}{2}, \frac{\tau_1+\tau_2}{2}\right\}$: z_0 est un zéro double de la fonction $\wp - \wp(z_0)$*

Démonstration.

1. Soit $z_0 \notin \left\{0, \frac{\tau_1}{2}, \frac{\tau_2}{2}, \frac{\tau_1+\tau_2}{2}\right\}$. Alors $\zeta_{-z_0} \neq z_0$, où ζ_{-z_0} est l'unique point de $P(\tau_1, \tau_2)$ tel que

$$-z_0 = \zeta_{-z_0} + n\tau_1 + m\tau_2$$

En effet, si $\zeta_{-z_0} = z_0$, on aurait

$$z_0 = -\frac{n\tau_1 + m\tau_2}{2}$$

En prenant $n, m = -1$ ou 0, nous aboutissons à une absurdité. Ainsi, la fonction $\wp(z) - \wp(z_0)$ étant paire et elliptique d'ordre 2, z_0 et ζ_{-z_0} sont ses deux uniques zéros dans $P(\tau_1, \tau_2)$.

2. Soit $z_0 \in \left\{\frac{\tau_1}{2}, \frac{\tau_2}{2}, \frac{\tau_1+\tau_2}{2}\right\}$. Alors, z_0 est un zéro simple de la fonction $\wp'$, donc un zéro double de la fonction $\wp - \wp(z_0)$. □

Lemme 3.15

Si $z_0 \in \left\{0, \frac{\tau_1}{2}, \frac{\tau_2}{2}, \frac{\tau_1+\tau_2}{2}\right\}$ est un pôle ou un zéro d'une fonction ellitptique paire f de périodes τ_1 et τ_2, il est d'ordre pair.

Démonstration.

Pour commencer, on va supposer que z_0 est une zéro de f. Alors on a (car f est paire) :

$$f^{(2n+1)}(z_0) = -f^{(2n+1)}(-z_0) = -f^{(2n+1)}(-z_0 + 2z_0) = -f^{(2n+1)}(z_0)$$

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f^{(2n+1)}(z_0) = 0$$

Par ailleurs, la fonction f étant elliptique (donc non constante) :

$$\exists m, R > 0, \forall z \in B(z_0, R) \quad f(z) = \sum_{n=m}^{+\infty} c_{2n}(z - z_0)^{2n} \quad c_{2m} \neq 0$$

Par conséquent, la fonction f admet un zéro d'ordre $2m$ en z_0

Supposons à présent que f possède un pôle d'ordre p en z_0. Alors, la fonction $\frac{1}{f}$ possède un zéro d'ordre p en z_0 qui, d'après ce qui précède, est pair. □

Lemme 3.16

Toute fonction elliptique f de période τ_1 et τ_2 possède au moins un zéro et un pôle dans $P_{\wp}(\tau_1, \tau_2)$

Démonstration.

La fonction f étant elliptique, son ordre $m \geqslant 2$, possède donc au moins un zéros ζ dans son parallélogramme fondamental $P_f(\omega_1, \omega_2)$. Ainsi, puisqu'il existe $n, m \in \mathbb{Z}, a \in P_{\wp}(\tau_1, \tau_2)$ tel que

$$\zeta = a + n\tau_1 + m\tau_2$$

on a, τ_1 et τ_2 étant deux périodes de f, que

$$0 = f(\zeta) = f(a + n\tau_1 + m\tau_2) = f(a)$$

De même, la fonction f possède au moins un pôle ω dans $P_f(\omega_1, \omega_2)$, par conséquent, l'unique point $b \in P_{\wp}(\tau_1, \tau_2)$ tel que

$$\omega = b + n\tau_1 + m\tau_2$$

est un pôle de f (proposition 2.6). □

Théorème 3.17

Toute fonction elliptique f de périodes τ_1 et τ_2 est une fraction rationnelle de $\wp$ et $\wp'$

Démonstration.

Supposons pour commencer que f est paire et n'a ni zéro ni pôle en 0 et soit $a \in P_{\wp}(\tau_1, \tau_2)$ un zéro de la fonction f (un tel a existe par ce qui précède). Alors, $a \neq 0$ et pour l'unique point ζ_{-a} de $P_{\wp}(\tau_1, \tau_2)$ tel que :

$$-a = \zeta_{-a} + n\tau_1 + m\tau_2$$

on a alors :

1. $\begin{cases} a = \zeta_{-a} \text{ si } a \in \left\{\frac{\tau_1}{2}, \frac{\tau_2}{2}, \frac{\tau_1+\tau_2}{2}\right\} \\ a \neq \zeta_{-a} \text{ si } a \in \notin \left\{\frac{\tau_1}{2}, \frac{\tau_2}{2}, \frac{\tau_1+\tau_2}{2}\right\} \end{cases}$

2. $(c, d \in P_{\wp}(\tau_1, \tau_2) \text{ et } d \neq c, \zeta_{-c}) \quad \Rightarrow \quad \zeta_{-d} \neq c, \zeta_{-c}$

3. Si a est un zéro d'ordre, ζ_{-a} est aussi un zéro d'ordre p de f. En effet, ζ_{-a} et $-a$ sont deux zéros de f de même multiplicité (proposition 2.6) ainsi que $-a$ et a car :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(-a+h)}{h^p} = (-1)^p \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)}{h^p}$$

Par ailleurs, on désigne par $a_1, \zeta_{-a_1}, \ldots, a_n, \zeta_{-a_n}$ la suite de tous les zéros de f dans $P_{\wp}(\tau_1, \tau_2)$. Un zéro d'ordre p étant répété p fois sil n'appartient pas à $\left\{\frac{\tau_1}{2}, \frac{\tau_2}{2}, \frac{\tau_1+\tau_2}{2}\right\}$ et $\frac{p}{2}$ fois sinon (lemme 3.15). Ainsi la fonction

$$(\wp - \wp(a_1)) \ldots (\wp - \wp(a_n))$$

a exactement les mêmes zéros (comptés avec multiplicité) que f dans $P_{\wp}(\tau_1, \tau_2)$ (lemme 3.14) donc dans $\mathbb{C}$ (proposition 2.6).

De même, si $b_1, \zeta_{-b_1}, \ldots, b_n, \zeta_{-b_n}$ sont les pôles de f dans $P_{\wp}(\tau_1, \tau_2)$, la fonction

$$\frac{1}{(\wp - \wp(b_1)) \ldots (\wp - \wp(b_n))}$$

a exactement les mêmes pôles, ainsi que leurs ordres respectifs, que f dans $P_{\wp}(\tau_1, \tau_2)$ donc dans $\mathbb{C}$ (Proposition 2.6). Finalement, puisque $n = m$ (Théorème 2.11),

$$\frac{(\wp - \wp(b_1)) \ldots (\wp - \wp(b_n))}{(\wp - \wp(a_1)) \ldots (\wp - \wp(a_n))} \cdot f$$

est une fonction entière périodique, elle est donc constante (Théorème 2.3)

D'où

$$f = c\frac{(\wp-\wp(a_1))\dots(\wp-\wp(a_n))}{(\wp-\wp(b_1))\dots(\wp-\wp(b_n))} \quad \text{avec } c\in\mathbb{C}^*$$

A présent, supposons que la fonction paire f possède un zéro ou un pôle d'ordre $2k$ en 0 (lemme 3.15). Alors, en posant :

$$j = \begin{cases} k & \text{si 0 est un zéro de } f \\ -k & \text{si 0 est un pôle de } f \end{cases}$$

la fonction $\wp^j f$ devient une fonction elliptique de périodes τ_1 et τ_2 n'ayant ni zéro ni pôle en 0. On peut donc lui appliquer le résultat précédent.

Pour finir, supposons que la fonction elliptique f n'est pas paire et posons

$$f_1(z) = \frac{f(z)+f(-z)}{2} \text{ et } f_1(z) = \frac{f(z)-f(-z)}{2}$$

Alors, les deux fonctions f_1 et $\dfrac{f_2}{\wp'}$ sont paires de périodes τ_1 et τ_2. Ainsi, puisque

$$f = f_1 + \wp'\frac{f_2}{\wp'}$$

on obtient que la fonction f est une fonction rationnelle de $\wp$ et $\wp'$. □

Théorème 3.18

La fonction $\wp$ verifie la relation algébrique suivante :

$$(\wp')^2 = 4\left(\wp-\wp\left(\frac{\tau_1}{2}\right)\right)\left(\wp-\wp\left(\frac{\tau_2}{2}\right)\right)\left(\wp-\wp\left(\frac{\tau_1+\tau_2}{2}\right)\right)$$

Démonstration.

Posons la fonction :

$$f = \left(\wp-\wp\left(\frac{\tau_1}{2}\right)\right)\left(\wp-\wp\left(\frac{\tau_2}{2}\right)\right)\left(\wp-\wp\left(\frac{\tau_1+\tau_2}{2}\right)\right)$$

Le quotient

$$\frac{(\wp')^2}{f}$$

est une fonction entière par la proposition 3.9 et le lemme 3.14, doublement périodique, et donc, par le Théorème 2.3, constante. Il faut désormais calculer cette constante.

Pour cela, posons

$$\Psi_0(z) = \lim_{p\to+\infty}\Psi_{0,p}(z) = \sum_{\gamma\in\Lambda^*}\left(\frac{1}{(z-\gamma)^2}-\frac{1}{\gamma^2}\right)$$

Alors, puisque $\Psi_0\in\mathcal{H}(\mathbb{C}\backslash\Lambda^*)$ et que dans $\mathbb{C}$:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2}+\Psi_0(z)$$

on obtient par un simple calcul, que

$$\lim_{z\to0}\frac{(\wp')^2(z)}{f(z)} = 4$$

La constante vaut donc 4. □

4 Les fonctions de Jacobi

4.1 La fonction θ

Notons $\mathbb{H}$ le demi plan de Poincaré : $\mathbb{H}=\{z\in\mathbb{C},\mathcal{I}m(z)>0\}$. On définit alors,

Définition 4.1

Soit θ la fonction de définie par :

$$\forall z\in\mathbb{H}\quad \theta(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i\pi n^2 z}=1+2\sum_{n\geqslant 1} e^{i\pi n^2 z}$$

Cette fonction est bien définie car la série du second membre converge normalement sur tout compact de $\mathbb{H}$, donc converge uniformement sur tout compact de $\mathbb{H}$. En effet, si $K\subset\mathbb{H}$ est un compact, il existe $r>0$ tel que $\mathcal{I}m(z)\geqslant r$ pour tout $z\in K$. Il vient alors :

$$|e^{i\pi n^2 z}|=e^{-\pi n^2\mathcal{I}m(z)}\leqslant e^{-\pi n^2 r}$$

La fonction θ est donc holomorphe sur $\mathbb{H}$.

Théorème 4.2

On a pour tout $z\in\mathbb{H}$, $\theta(z+2)=\theta(z)$ et $\theta\left(-\frac{1}{z}\right)=\left(\frac{z}{i}\right)^{\frac{1}{2}}\theta(z)$

Démonstration.

- Pour la première égalité, on a que :

$$e^{i\pi n^2(z+2)}=e^{i\pi n^2 z}e^{2i\pi n^2}=e^{i\pi n^2 z}$$

Le résultat est alors immédiat. □

Pour la seconde égalité il faut beaucoup plus travailler et demande d'aller chercher d'autres théorèmes de divers mondes de l'analyse.

Remarquons d'abord que si $z\in\mathbb{H}$, on a aussi $-\frac{1}{z}\in\mathbb{H}$.

En effet, si $z=x+i\,y$ avec $y>0$, on a :

$$-\frac{1}{z}=\frac{-x+i\,y}{x^2+y^2}\quad\text{i.e. } \mathcal{I}m\left(-\frac{1}{z}\right)=\frac{\mathcal{I}m(z)}{|z|^2}>0$$

Par ailleurs, le nombre $\left(\frac{z}{i}\right)^{\frac{1}{2}}$ désigne plus précisément le nombre $|z|^{\frac{1}{2}}\mathrm{Arg}\left(\frac{z}{i}\right)$, ou Arg est la détermination principale de l'argument. Ainsi, pour $z=i\,t$ avec $t>0$, il vient :

$$\left(\frac{z}{i}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{t}$$

Ensuite, soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ une fonction continue telle que la série de terme général $(f(x+n))_{n\in\mathbb{Z}}$ soit normalement convergente sur tout compact de $\mathbb{R}$.

Les fonctions $F(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ et $\Phi(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(x+n)|$ sont donc continues et périodiques de période 1. On a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \Phi(x)\mathrm{d}x &= \int_0^1 \underbrace{\sum_{p\in\mathbb{Z}} |f(x+p)|\mathrm{d}x}_{\text{CVU}} \\
&= \sum_{p\in\mathbb{Z}} \int_0^1 |f(x+p)|\mathrm{d}x \\
&= \sum_{p\in\mathbb{Z}} \int_p^{p+1} |f(x)|\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

La fonction f est donc intégrable sur $\mathbb{R}$. Il en va donc de même pour la fonction

$$x \longmapsto f(x)e^{-2i\pi xy} \quad y\in\mathbb{R}$$

puisqu'elles ont le même module.
La transformée de Fourier de f

$$\hat{f}(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2i\pi xy}\mathrm{d}x$$

existe donc pour tout $y\in\mathbb{R}$ et la fonction $\hat{f}$ est continue.
Calculons maintenant les coefficients de Fourier $a_n(F)$ de F :

$$\begin{aligned}
a_n(F) &= \int_0^1 F(x)e^{-2i\pi nx}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \underbrace{\sum_{p\in\mathbb{Z}} f(x+p)e^{-2i\pi nx}}_{\text{CVU}}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{p\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+p)e^{-2i\pi nx}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{p\in\mathbb{Z}} \int_p^{p+1} f(x)e^{-2i\pi n(x-p)}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{p\in\mathbb{Z}} \int_p^{p+1} f(x)e^{-2i\pi nx}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2i\pi nx}\mathrm{d}x \\
&= \hat{f}(n)
\end{aligned}$$

Théorème 4.3

Soit $\mathcal{F}$ une fonction continue périodique dont la série de Fourier est normalement convergente. Alors on a pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\mathcal{F}(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(F)e^{2i\pi nx}$$

Démonstration.

Notons :

$$g(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(F)e^{2i\pi nx}$$

Cette fonction est continue (continue sur tout compact de $\mathbb{R}$). Pour calculer ses coefficients de Fourier, on peut intégrer la série terme à terme. Il vient alors immediatement $a_n(g)=a_n(F)$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$.

Posons $h=F-g$. Cette fonction est continue et périodique et ses coefficients de Fourier sont tous nuls. Mais alors, utilisant le théorème de Parseval[4.1], il vient que :

$$\int_0^1 |h(x)|^2 \mathrm{d}x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n(h)|^2 = 0$$

et puisque h est continue, cette égalité impose $h=0$. □

Théorème 4.4 : Formule sommatoire de Poisson

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ converge normalement sur tout compact, et telle que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < +\infty$. Alors on a :

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2i\pi n x}$$

En particulier, pour $x=0$: $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)$

Démonstration.

La série de terme général $(\hat{f}(n)e^{2i\pi n x})_{n\in\mathbb{Z}}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ puisque la série de terme général $(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est absolument convergente.

Sa somme, que l'on appelera $g(x)$, n'est autre, d'après le calcul fait plus haut, que la série de Fourier $\mathcal{F}$. La fonction F étant périodique de période 1, et sa série de Fourier converge normalement par hypothèse, elle est égale à cette dernière par le théorème qui précède. □

Nous voulons appliquer le Théorème 4.4 à la fonction $f: x\longmapsto e^{i\pi x^2 z}$ où $z\in\mathbb{H}$. Montrons que f vérifie les conditions du Théorème.

Si l'on pose $\lambda = \mathcal{I}m(z) > 0$, il vient $|f(x+n)| = e^{-\pi\lambda(x+n)^2}$. Soit K un compact de $\mathbb{R}$, il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que $K\subset[-a,a]$, et quel que soit $x\in K$, on a

$$(x+n)^2 > (|n|-a)^2 \quad \text{pour } n \text{ assez grand}$$

Il vient donc

$$|f(x+n)| < e^{-\pi\lambda(|n|-a)^2}$$

La série de terme général $(f(x+n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est donc normalement convergente. Il ne reste plus qu'a montrer que la série de terme général $(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est absolument convergente.

Théorème 4.5

Soit f une fonction continue, intégrable sur $\mathbb{R}$, ainsi que la fonction $x\longmapsto x\, f(x)$. Alors $\hat{f}$ est dérivable et on a

$$\hat{f}'(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} -2i\pi x\, f(x) e^{-2i\pi x y}\, \mathrm{d}x$$

Démonstration.

Posons pour $n\in\mathbb{Z}$ la fonction g_n définie par :

$$g_n(y) = \int_{-n}^{n} \underbrace{f(x)e^{-2i\pi x y}}_{:=\tilde{g}(x,y)} \mathrm{d}x$$

4.1. Théorème de Parseval : Pour tout $f\in L_2(\mathbb{T})$: $\|f\|_{L^2}^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2$

si bien que l'on a $\hat{f} = \lim_{n\to+\infty} g_n$. Sur le compact $[-n;n]$ on a :

$$\left|\frac{\partial \tilde{g}(x,y)}{\partial y}\right| = |-2i\pi x\, f(x) e^{-2i\pi x y}| = |2\pi x\, f(x)|$$

Avec $x \longmapsto 2\pi x\, f(x)$ indépendante de y et intégrable sur $[-n;n]$.

On peut donc dériver sous le signe $\displaystyle\int$ et on a

$$g_n'(y) = \int_{-n}^{n} -2i\pi x\, f(x) e^{-2i\pi x y}\, \mathrm{d}x$$

Comme la fonction $x\, f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, la limite $G(y) = \lim_{n\to+\infty} g_n'$ existe, et plus précisément, g_n' converge uniformément vers G. En effet, pour $n, m \in \mathbb{Z}$ $n < m$, on a :

$$|g_n'(y) - g_m'(y)| \leqslant 2\pi \int_n^m x\,|f(x)|\, \mathrm{d}x + 2\pi \int_{-m}^{-n} |x\, f(x)|$$

Et le second membre peut-être rendu aussi petit que l'on veut pour m et n assez grands. Mais alors, d'après le théorème usuel de dérivée d'une limite, il vient :

$$\hat{f}'(y) = G(y)$$

$\square$

Lemme 4.6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{i\pi x^2 z}$, $z \in \mathbb{H}$. Alors :

$$\hat{f}(y) = \left(\frac{z}{i}\right)^{\frac{-1}{2}} e^{-i\pi \frac{y^2}{z}}$$

Démonstration.

Appliquons le Théorème 4.5. Nous obtenons :

$$\hat{f}'(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} -2i\pi x\, e^{i\pi x^2 z - 2i\pi x y}\, \mathrm{d}x$$

Faisons une intégration par partie avec les fonctions suivantes :

$$\begin{cases} u(x) = e^{i\pi x^2 z} \\ u'(x) = 2i\pi z\, x\, e^{i\pi x^2 z} \end{cases} ; \begin{cases} v(x) = e^{-2i\pi x y} \\ v'(x) = -2i\pi y\, e^{-2i\pi x y} \end{cases}$$

et il vient

$$\begin{aligned} \hat{f}'(y) &= \left[-\frac{1}{z} e^{i\pi x^2 z - 2i\pi x y}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2i\pi y}{z}\, e^{i\pi x^2 z - 2i\pi x y}\, \mathrm{d}x \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2i\pi y}{z}\, e^{i\pi x^2 z - 2i\pi x y}\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{2\pi i}{z} y \hat{f}(y) \end{aligned}$$

Le terme de bord est nul car $z \in \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}, \mathcal{I}m(z) > 0\}$, En effet, on écrit alors $z = a + i\, b$ avec $b > 0$, on a donc :

$$|e^{i\pi x^2 z - 2i\pi x y}| = |e^{i\pi x^2 a - b\pi x^2 - 2i\pi x y}| = e^{-b\pi x^2}$$

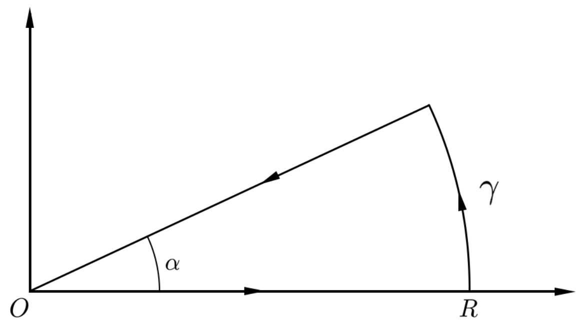
La transformée de Fourier $\hat{f}$ est donc solution d'une équation différentielle homogène du 1$^{\text{er}}$ ordre facile à résoudre. D'où :

$$\hat{f}(y) = c(z) e^{-i\pi \frac{y^2}{z}}$$

Il reste à calculer la constante $c(z)$. En évaluant la formule précédente en $y=0$ on obtient

$$c(z)=\hat{f}(0)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi x^2 z}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} e^{i\pi x^2 z}\,\mathrm{d}x$$

Pour calculer cette dernière intégrale, on considère la fonction $u \longmapsto e^{-\pi u^2}$ qui est entière, que l'on intègre sur le chemin γ ci-dessous ou l'angle α est compris entre $-\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{\pi}{4}$.



On a alors :

$$\int_\gamma e^{-\pi u^2}\,\mathrm{d}u \;=\; \int_0^R e^{-\pi t^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^\alpha R\,i\,e^{i\theta} e^{-\pi R^2 e^{2i\theta}}\,\mathrm{d}\theta - \int_0^{\frac{R}{r}} r\,e^{i\alpha} e^{-\pi t^2 r^2 e^{2i\alpha}}\,\mathrm{d}t$$

Pour la 2ème integrale :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\alpha R\,i\,e^{i\theta} e^{-\pi R^2 e^{2i\theta}}\,\mathrm{d}\theta\right| &\leqslant \int_0^\alpha |R\,i\,e^{-\pi R^2 e^{2i\theta}+i\theta}|\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^\alpha |R\,i\,e^{-\pi R^2(\cos(2\theta)+i\sin(2\theta))+i\theta}|\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^\alpha R\,e^{-\pi R^2\cos(2\theta)}\mathrm{d}\theta \\ &= \alpha R\,e^{-\pi R^2 \cos(2\theta)}\end{aligned}$$

Cette expression tend vers 0 lorsque $R\rightarrow+\infty$ puisque $\cos(2\alpha)>0$.

On obtient alors l'égalité suivante, valable pour tout $|\alpha|<\dfrac{\pi}{4}$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\pi t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} r\,e^{i\alpha} e^{-\pi t^2 r^2 e^{2i\alpha}}\,\mathrm{d}t$$

Remarquons maintenant que si $z\in\mathbb{H}$, on a :

$$\begin{aligned}0<\mathrm{Arg}(z)<\pi \;&\Leftrightarrow\; -\frac{\pi}{2}<\mathrm{Arg}\left(\frac{z}{i}\right)<\frac{\pi}{2} \\ &\Leftrightarrow\; \left|\mathrm{Arg}\left(\sqrt{\frac{z}{i}}\right)\right|<\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Prenons α de sorte qu'il existe $r>0$ tel que $r\,e^{i\alpha}=\sqrt{\frac{z}{i}}$, il vient

$$\begin{aligned} 2\int_0^{+\infty} e^{-\pi t^2}\,\mathrm{d}t &= 2\sqrt{\frac{z}{i}}\int_0^{+\infty} e^{-\pi t^2\frac{z}{i}}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\sqrt{\frac{z}{i}}\int_0^{+\infty} e^{\pi t^2 z}\,\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{\frac{z}{i}}c(z) \end{aligned}$$

Nous avons donc démontré la formule :

$$c(z)=\left(\frac{z}{i}\right)^{\frac{-1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2}\,\mathrm{d}t$$

Il est bien connu que l'intégrale de Gauss $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2}\,\mathrm{d}t$ est égale a 1, ce qui achève la démonstration. $\square$

Nous sommes maintenant en mesure de terminer la démonstration du Théorème 4.2.

En effet, d'après le lemme précedent, on a :

$$|\hat{f}(n)|=|z|^{-\frac{1}{2}}e^{-\pi n^2\mathcal{I}m\left(-\frac{1}{z}\right)}$$

La série de terme général $\hat{f}(n)$ est donc absolument convergente. Appliquons le Théorème 4.4, il vient, compte tenu du lemme :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i z(x+n)^2}=\left(\frac{z}{i}\right)^{-\frac{1}{2}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-i\pi\frac{n^2}{z}+2i\pi n x} \tag{4.1}$$

et l'on obtient le résultat annoncé en faisant $x=0$ dans cette formule. $\square$

4.2 La fonction θ_3

Proposition - Définition 4.7

Pour $z\in\mathbb{H}$ et $u\in\mathbb{C}$, posons θ_3 définie par :

$$\theta_3(u,z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i\pi n^2 z+2i\pi n u}$$

De plus, la fonction $u\longmapsto\theta_3(u,z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Démonstration.

On a :

$$|e^{i\pi n^2 z+2i\pi n u}|=e^{-\pi n^2\mathcal{I}m(z)-2\pi n\mathcal{I}m(u)}$$

Fixons alors $z\in\mathbb{H}$, et faisons parcourir u sur un compact K ; il existe $c>0$ tel que pour tout $u\in K$ on a $|\mathcal{I}m(u)|<c\,\mathcal{I}m(z)$ (car $\mathcal{I}m(z)>0$). Pour $u\in K$ on a alors

$$|e^{i\pi n^2 z+2i\pi n u}|\leqslant e^{-\pi\mathcal{I}m(z)(n^2-2|n|c)}$$

Pour tout $z\in\mathbb{H}$, la série de terme général $e^{i\pi n^2 z+2i\pi n u}$ converge donc normalement (en u) sur tout compact de $\mathbb{C}$, et donc pour tout $z\in\mathbb{H}$, la fonction $u\longmapsto\theta_3(u,z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

$\square$

Proposition 4.8

On a, pour $z \in \mathbb{H}$ et $u \in \mathbb{C}$:

1. $\theta_3(u+1, z) = \theta_3(u, z)$
2. $\theta_3(u+z, z) = e^{-i\pi z - 2i\pi u}\theta_3(u, z)$
3. $\theta_3\left(u, -\frac{1}{z}\right) = e^{i\pi z u^2}\left(\frac{z}{i}\right)^{\frac{1}{2}}\theta_3(u\,z, z)$

Démonstration.

L'égalité ***1.*** s'obtient simplement à l'aide d'un changement de variable dans la somme.

Pour démontrer ***2.***, remarquons que l'on a :

$$\begin{aligned} e^{i\pi n^2 z + 2i\pi n(u+z)} &= e^{i\pi(n+1)^2 z - i\pi z + 2i\pi(n+1)u - 2i\pi u} \\ &= e^{-i\pi z - 2i\pi u}\, e^{i\pi(n+1)^2 z + 2i\pi(n+1)u} \end{aligned}$$

Il suffit alors de sommer sur $n \in \mathbb{Z}$ pour obtenir le résultat.

Enfin, pour l'égalité ***3.*** on a pour $u = x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \theta_3\left(x, -\frac{1}{z}\right) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-i\pi n^2 \frac{1}{z} + 2i\pi n x} \\ (4.1) \quad &= \left(\frac{z}{i}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i z (x+n)^2} \end{aligned}$$

et par ailleurs, par définition de θ_3, il vient :

$$\begin{aligned} \theta_3(x\,z, z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i\pi n^2 z + 2i\pi n x z} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i\pi(n+x)^2 z - i\pi x^2 z} \\ &= e^{-i\pi x^2 z} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i\pi(n+x)^2 z} \end{aligned}$$

La formule est donc établie pour $u \in \mathbb{R}$. Mais pour $z \in \mathbb{H}$ fixé, les deux membres de cette formule sont des fonctions holomorphes en $u \in \mathbb{C}$. Le Théorème de prolongement analytique montre que la formule est vraie quel que soit $u \in \mathbb{C}$ □

Nous allons maintenant décomposer θ_3 en produits infinis.

Lemme 4.9

Pour $|q| < 1$ et $z \in \mathbb{C}$ on a

1. $\displaystyle\prod_{n \geqslant 0} (1 - q^n z) = \sum_{m \geqslant 0} \frac{q^{\frac{m(m-1)}{2}} z^m}{\prod_{k=1}^m (1 - q^k)}$

2. $\displaystyle\prod_{n \geqslant 1} (1 - q^n z) = \sum_{m \geqslant 0} \frac{q^{\frac{m(m+1)}{2}} z^m}{\prod_{k=1}^m (1 - q^k)}$

Pour $|q| < 1$ et $|z| < 1$ on a

3. $\displaystyle\prod_{n \geqslant 0} (1 - q^n z)^{-1} = \sum_{m \geqslant 0} \frac{(-1)^m z^m}{\prod_{k=1}^m (1 - q^k)}$

Démonstration.

Dans un premier temps, montrons que les produits et sommes infinis représentent des fonctions holomorphes en z dans les domaines indiqués.

Le produit $\prod_{n\geqslant 0}(1-q^n z)$ défini une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ car la série $\sum_{n\geqslant 0}|q^n z|$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$.

Il en est de même pour les produits $\prod_{n\geqslant 1}(1-q^n z)$ et $\prod_{n\geqslant 0}(1-q^n z)^{-1}$.

Ensuite, pour les membres de droite on a :

Sur tout compact K de $B(0,1)$, il existe $0<r<1$ tel que :

$$\left|\frac{(-1)^m z^m}{\prod_{k=1}^m (1-q^k)}\right| < \left(\frac{r}{2}\right)^m$$

Ainsi, la série converge normalement sur tout compact K de $B(0,1)$, la série $\sum_{m\geqslant 0}\frac{(-1)^m z^m}{\prod_{k=1}^m (1-q^k)}$ est donc holomorphe sur $B(0,1)$.

Nous allons désormais déterminer le développement en série entière à l'origine des membres de gauche. Posons à cet effet :

$$f(z)=\prod_{n\geqslant 0}(1-q^n z)=a_0+a_1 z+\cdots+a_m z^m+\cdots \quad z\in\mathbb{C}$$

Nous avons

$$f(q\,z)=\prod_{n\geqslant 0}(1-q^{n+1}z)=\frac{f(z)}{1+z} \quad \Leftrightarrow \quad (1+z)f(q\,z)=f(z)$$

Cette égalité nous permet alors d'écrire que :

$$(1+z)\sum_{m\geqslant 0}a_m q^m z^m=\sum_{m\geqslant 0}a_m q^m z^m \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{m\geqslant 1}(a_m q^m + a_{m-1}q^{m-1}-a_m)z^m=0$$

On en déduit donc la relation de récurrence qui nous permet de calculer les coefficients a_m à partir de $a_0=1$:

$$(1-q^m)a_m=q^{m-1}a_{m-1} \quad \forall m\geqslant 1$$

Les démonstrations des formules 2 et 3 sont analogues, en utilisant respectivement les relations fonctionelles $(1+q\,z)f(q\,z)=f(z)$ et $(1+z)f(z)=f(z)$. $\square$

Théorème 4.10 : Jacobi

$$\theta_3(u,z)=\prod_{n\geqslant 0}(1-e^{(2n+2)i\pi z})\prod_{n\geqslant 0}(1+e^{(2n+1)i\pi z+2i\pi u})\prod_{n\geqslant 0}(1+e^{(2n+1)i\pi z-2i\pi u})$$

Démonstration.

Avant de commencer à démontrer ce théorème, donnons-lui une forme équivalente en changeant les notations. Remplaçons $e^{i\pi z}$ par q et $e^{2i\pi u}$ par z. Le théorème est alors équivalent à l'égalité

$$\sum_{n\geqslant 0}q^{n^2}z^n=\prod_{n\geqslant 0}(1-q^{2n+2})\prod_{n\geqslant 0}(1+q^{2n+1}z)\prod_{n\geqslant 0}(1+q^{2n+1}z^{-1})$$

Par des arguments similaires à ceux fait dans la démonstration du lemme 4.9, on montre que les trois produits infinis et la série définissent des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$.

Remplaçons maintenant dans la formule 1 du lemme 4.9 q par q^2 et z par $q\,z$.

Il vient

$$\prod_{n\geqslant 0}(1-q^{2n+1}z)=\sum_{m\geqslant 0}\frac{q^{m(m-1)+m}z^m}{\prod_{k=1}^{m}(1-q^{2k})}=\sum_{m\geqslant 0}\frac{q^{m^2}z^m}{\prod_{k=1}^{m}(1-q^{2k})}$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par $\prod_{n\geqslant 1}(1-q^{2n})$ et appelons P le résultat obtenu. Il vient

$$P=\prod_{n\geqslant 0}(1-q^{2n+1}z)\prod_{n\geqslant 0}(1-q^{2n+2})=\sum_{m\geqslant 0}\left(q^{m^2}z^m\prod_{n\geqslant 1}(1-q^{2n+2m})\right)$$

Mais lorsque l'entier m est <0, le produit infini $\prod_{n\geqslant 1}(1-q^{2n+2m})$ est nul. Quitte à rajouter une infinité de zéros, on peut donc écrire

$$P=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left(q^{m^2}z^m\prod_{n\geqslant 1}(1-q^{2n+2m})\right)$$

Après avoir écrit $1-q^{2n+2m}=1+(q^2)^n(-q^{2m})$, nous remplaçons dans la formule 2 du Lemme 4.9, q par q^2 et z par $-q^{2m}$, et nous trouvons :

$$\prod_{n\geqslant 1}(1-q^{2n+2m})=\sum_{k\geqslant 0}\frac{q^{k(k+1)}(-q)^k}{\prod_{j=1}^{k}(1-q^{2j})}=\sum_{k\geqslant 0}\frac{(-1)^kq^{k^2+k+2km}}{\prod_{j=1}^{k}(1-q^{2j})}$$

Portons cette valeur dans l'expression de P, il vient

$$\begin{aligned} P &= \sum_{m\in\mathbb{Z}}\left(q^{m^2}z^m\prod_{n\geqslant 1}(1-q^{2n+2m})\right)\\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}}\left(q^{m^2}z^m\sum_{k\geqslant 0}\frac{(-1)^kq^{k^2+k+2km}}{\prod_{j=1}^{k}(1-q^{2j})}\right)\\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{k\geqslant 0}a_{m,k}\end{aligned}$$

Où $a_{m,k}=(-1)^k\dfrac{q^{(m+k)^2+k}z^m}{\prod_{j=1}^{k}(1-q^{2j})}$. L'objectif est d'intervertir les deux sommes, il faut donc montrer que la famille $(a_{m,k})_{m\in\mathbb{Z},k\geqslant 0}$ est sommable.

Il s'agit donc de montrer que la fonction $J\longmapsto\sum_{(m,k)\in J}|a_{m,k}|$ est bornée lorsque J parcourt l'ensemble des parties finies de l'ensemble $\{m\in\mathbb{Z}\}\times\{k\geqslant 0\}$. Pour $\left|\dfrac{q}{z}\right|<1$

$$\begin{aligned}\sum_{(m,k)\in J}|a_{m,k}| &\leqslant \sum_{k\geqslant 0}\sum_{m\in\mathbb{Z}}|a_{m,k}|\\ &= \sum_{k\geqslant 0}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left|(-1)^k\frac{q^{(m+k)^2+k}z^{m+k}z^{-k}}{\prod_{j=1}^{k}(1-q^{2j})}\right|\\ &= \sum_{k\geqslant 0}\left|\frac{q^kz^{-k}}{\prod_{j=1}^{k}(1-q^{2j})}\right|\sum_{m\in\mathbb{Z}}|q^{(m+k)^2}||z^{m+k}|\\ &= \sum_{k\geqslant 0}\left|\frac{q^kz^{-k}}{\prod_{j=1}^{k}(1-q^{2j})}\right|\sum_{m\in\mathbb{Z}}|q|^{m^2}|z|^m\\ &\leqslant \sum_{k\geqslant 0}\frac{|q|^k|z|^{-k}}{\prod_{j=1}^{k}(1-|q|^{2j})}\sum_{m\in\mathbb{Z}}|q|^{m^2}|z|^m\end{aligned}$$

En utilisant à présent l'égalité 3 du Lemme 4.9 en remplacant q par q^2 et z par $q\,z^{-1}$ (ce qui est licite car pour on a bien $|q\,z^{-1}|<1$ par hypothèse), il vient

$$\sum_{k\geqslant 0}\frac{|q|^k|z|^{-k}}{\prod_{j=1}^k(1-|q|^{2j})}=\prod_{n\geqslant 0}\,(1+q^{2n+1}z^{-1})^{-1}$$

Ce qui montre que :

$$\sum_{(m,k)\in J}|a_{m,k}|\leqslant\prod_{n\geqslant 0}\,(1+q^{2n+1}z^{-1})^{-1}\sum_{m\in\mathbb{Z}}|q|^{m^2}|z|^m<+\infty$$

Nous pouvons desormais intervertir les deux sommes dans l'expression de P, ce qui donne

$$\begin{aligned}P &= \sum_{k\geqslant 0}\sum_{m\in\mathbb{Z}}a_{m,k}\\ &= \sum_{k\geqslant 0}\frac{(-1)^kq^kz^{-k}}{\prod_{j=1}^k(1-q^{2j})}\sum_{m\in\mathbb{Z}}q^{m^2}z^m\\ &= \prod_{n\geqslant 0}\,(1+q^{2n+1}z^{-1})^{-1}\sum_{m\in\mathbb{Z}}q^{m^2}z^m\\ &= \prod_{n\geqslant 0}\,(1-q^{2n+1}z)\prod_{n\geqslant 0}\,(1-q^{2n+2})\end{aligned}$$

L'égalité est donc établie pour $\left|\frac{q}{z}\right|<1$, et donc quel que soit q pour $|z|\geqslant 1$. Les deux membres de l'égalité étant holomorphe pour tout $z\in\mathbb{C}$, le théorème du prolongement analytique montre que les deux membres sont égaux pour tout $z\in\mathbb{C}$.

□

Théorème 4.11

Pour $z\in\mathbb{H}$, on a

$$\theta(z)=\prod_{n\geqslant 0}\,(1-e^{(2n+2)i\pi z})\prod_{n\geqslant 0}\,(1+e^{(2n+2)i\pi z})^2$$

Pour $|q|<1$, on a (Euler)

$$\prod_{n\geqslant 0}\,(1-q^n)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\,(-1)^mq^{\left(\frac{3m^2+m}{2}\right)}$$

Démonstration.

Il suffit de faire $u=0$ dans le Théorème 4.10 pour obtenir la première formule et de remplacer q par $q^{\frac{3}{2}}$ et z par $-q^{\frac{1}{2}}$ dans

$$\sum_{n\geqslant 0}q^{n^2}z^n=\prod_{n\geqslant 0}\,(1-q^{2n+2})\prod_{n\geqslant 0}\,(1+q^{2n+1}z)\prod_{n\geqslant 0}\,(1+q^{2n+1}z^{-1})$$

pour obtenir la seconde. □

5 Applications aux fonctions elliptiques.

Soit $a_1, \ldots, a_n$ des nombres complexes, posons

$$f(u) = \prod_{r=1}^{n} \theta_3(u - a_r, z)$$

D'après la proposition 4.8 on a :

· $f(u+1) = f(u)$

· $f(u+z) = \prod_{r=1}^{n} e^{-i\pi z - 2i\pi(u - a_r)} f(u) = e^{\left(-i\pi z n - 2in\pi u - 2i\pi \sum_{r=1}^{n} a_r\right)} f(u)$

Soit $b_1, \ldots, b_n$ d'autres nombres complexes, posons

$$g(u) = \prod_{r=1}^{n} \theta_3(u - b_r, z)$$

La fonction $\varphi(u) = \dfrac{f(u)}{g(u)}$ est méromorphe dans $\mathbb{C}$, comme quotient de deux fonctions holomorphes, et d'après ce qui précède on a :

$$\varphi(u+1) = \varphi(u) \quad \text{et} \quad \varphi(u+z) = \varphi(u) e^{2i\pi\left(\sum_{r=1}^{n} a_r - \sum_{r=1}^{n} b_r\right)}$$

Si l'on choisit les a_r et b_r de façon à avoir

$$\sum_{r=1}^{n} a_r = \sum_{r=1}^{n} b_r \tag{5.1}$$

alors φ est doublement périodique, de périodes 1 et z, et méromorphe, donc elle est elliptique.

Nous allons voir que par ce procédé on peut obtenir toutes les fonctions elliptiques.

Soit f une fonction elliptique d'ordre n de période τ_1 et τ_2 telle que $\mathcal{I}m\left(\dfrac{\tau_2}{\tau_1}\right) > 0$ quitte à échanger les indices. On pose alors $z = \dfrac{\tau_1}{\tau_2} \in \mathbb{H}$. La fonction $g\colon u \longmapsto f(u\tau_1)$ est elliptique, de périodes 1 et z.

Notons Γ le réseau $\{i + j\,z, (i, j) \in \mathbb{Z}^2\}$ des périodes de g, $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$ les zéros et les pôles de g dans un $P_a(1, z)$, avec répétitions selon la multiplicité. D'après la proposition 2.15 on a

$$\sum_{r=1}^{n} a_r - \sum_{r=1}^{n} b_r \in \Gamma$$

Il existe donc des entiers i_0 et j_0 tels que l'on ait

$$\sum_{r=1}^{n} a_r = \sum_{r=1}^{n} b_r = i_0 + j_0 z$$

Posons $\begin{cases} a'_r = a_r \\ b'_r = b_r \end{cases}$ pour $r \in [\![1, n-1]\!]$ et $\begin{cases} a'_n = a_n - i_0 \\ b'_n = b_n + j_0 z \end{cases}$. Les a'_r et b'_r sont encore dans $P_a(1, z)$ et vérifient la relation (5.1). Quitte a remplacer les a_r et b_r par les a'_r et b'_r, on peut donc supposer que les représentants choisis au départ vérifient (5.1). D'après le Théorème de Jacobi 4.10 les zéros de la fonction $u \longmapsto \theta_3(u, z)$ sont les éléments de $\mathbb{C}$ de la forme $\dfrac{z+1}{2}$ mod(Γ). Les zéros de la fonction $u \longmapsto \theta_3\left(u + \dfrac{z+1}{2}, z\right)$ sont les éléments de Γ.

Considérons alors la fonction elliptique

$$\varphi(u)=\frac{\prod_{r=1}^{n}\theta_3\left(u-a_r+\frac{z+1}{2},z\right)}{\prod_{r=1}^{n}\theta_3\left(u-b_r+\frac{z+1}{2},z\right)}$$

de périodes 1 et z. Les zéros de φ sont les $a_r \bmod(\Gamma)$ et ses pôles sont les $b_r \bmod(\Gamma)$ pour $r\in[\![1,n]\!]$. Les fonction elliptiques g et φ ont donc les mêmes zéros et mêmes pôles (avec le même ordre de multiplicité). Le quotient $\frac{g}{\varphi}$ est donc une fonction elliptique sans zéro ni pôle, elle est donc entière, c'est finalement une constante.

Théorème 5.1

Soit f une fonction elliptique d'ordre n de période τ_1 et τ_2 avec $\mathcal{I}m\left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)>0$. Soient $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ et $\beta_1,\dots,\beta_n$ les zéros et pôles de f dans un $P_a(\tau_1,\tau_2)$ figurant autant de fois que leur ordre de multiplicité, choisis de facon à avoir $\sum_{r=1}^{n}\alpha_r-\sum_{r=1}^{n}\beta_r=0$. Alors on a

$$f(u)=c\,\frac{\prod_{r=1}^{n}\theta_3\left(\frac{u-\alpha_r}{\tau_1}+\frac{\tau_1+\tau_2}{2\tau_1},\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)}{\prod_{r=1}^{n}\theta_3\left(\frac{u-\beta_r}{\tau_1}+\frac{\tau_1+\tau_2}{2\tau_1},\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)}\quad c\in\mathbb{C}$$

6 Sinus lemniscatique.

6.1 Définition et propriétés.

Définition 6.1

Soit $f\colon[-1,1]\to[-\omega,\omega]$ *la fonction définie par*

$$f(t)=\int_0^t\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^4}}\quad \textit{et } \omega=f(1)$$

Cette fonction est continue, impaire et strictement croissante. De plus, dans $]-1,1[$:

$$f'(t)=\frac{1}{\sqrt{1-t^4}}$$

La fonction réciproque, notée sl pour sinus lemniscatique est continue, impaire et strictement croissante. De plus, puisque dans $[-\omega,\omega]$:

$$\mathrm{sl}'(x)=\frac{1}{f'(\mathrm{sl}(x))}=\sqrt{1-\mathrm{sl}(x)^4}\quad \text{et}\quad \lim_{x\to\pm\omega}\mathrm{sl}'(x)=\sqrt{1-\mathrm{sl}(\omega)^4}=0$$

la fonction sl est de classe $\mathcal{C}^1$.

Nous allons la prolonger en un premier temps, par une symétrie par rapport à la droite verticale $x=\omega$, à $[-\omega,3\omega]$ en posant, pour tout $x\in[\omega,3\omega]$:

$$\mathrm{sl}(x)=-\mathrm{sl}(x-2w)$$

Nous allons maintenant la prolonger à tout $\mathbb{R}$ par 4ω-périodicité. Autrement dit, en posant pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\mathrm{sl}(x+4\omega)=\mathrm{sl}(x)$$

Ce prolongement est de classe $\mathcal{C}^1$ et de plus

1. $\forall x\in\mathbb{R}$:

$$\mathrm{sl}'(x)=\chi(x)\sqrt{1-\mathrm{sl}(x)^4}$$

où χ est la fonction 4ω-périodique définie par

$$\chi(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in[-\omega,\omega]\\ -1 & \text{si } x\in]\omega,3\omega[\end{cases}$$

2. $\forall x\in\mathbb{R}$:

$$\mathrm{sl}''(x)=-2\mathrm{sl}^3(x)$$

et donc $\mathrm{sl}\in\mathcal{C}^\infty$

3.

$$\mathrm{sl}(0)=\mathrm{sl}(2\omega)=0\quad\text{et}\quad \mathrm{sl}(\omega)=-\mathrm{sl}(3w)=1$$

4.

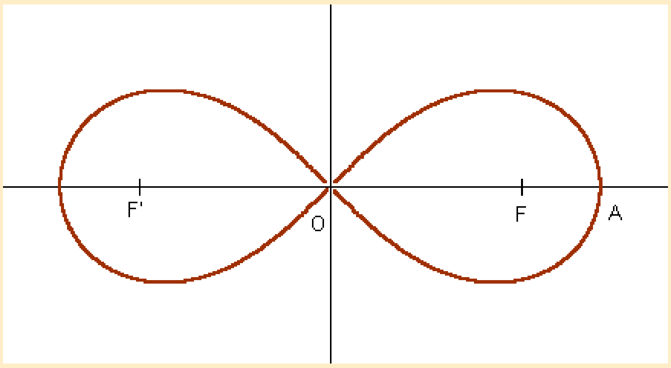
$$\mathrm{sl}'(0)=-\mathrm{sl}'(2\omega)=1\quad\text{et}\quad \mathrm{sl}'(\omega)=\mathrm{sl}'(3\omega)=0$$

5. $\forall x\in\mathbb{R}$:

$$\mathrm{sl}(-x)=-\mathrm{sl}(x)\quad\text{et}\quad \mathrm{sl}(x+2\omega)=-\mathrm{sl}(x)$$

Remarque 6.2

1. *Le nombre 4ω correspond à la longueur de la* ***lemniscate de Bernoulli***



En effet, par le changement de variable $u=\sqrt{\cos(2\theta)}$:

$$4\omega = 4\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^4}} = -4\int_{\frac{\pi}{4}}^0 \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(2\theta)}}\frac{-2\sin(2\theta)\mathrm{d}\theta}{2\sqrt{\cos(2\theta)}} = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos(2\theta)}}$$

D'où le l dans sl

2. *Il est possible de définir la fonction* sinus *de façon analogue en partant de sa fonction réciproque* $\arcsin\colon[-1,1]\to\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ *en posant*

$$\arcsin(t) = \int_0^t \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}$$

Ici, $\omega=\frac{\pi}{2}$ et 4ω est la circonférence de $\mathbb{T}$.D'où le s dans le sl.

Proposition 6.3

Pour tout $x,y\in\mathbb{R}$:

$$\mathrm{sl}(x+y) = \frac{\mathrm{sl}(x)\mathrm{sl}'(y)+\mathrm{sl}'(x)\mathrm{sl}(y)}{1+\mathrm{sl}(x)^2\mathrm{sl}(y)^2}$$

Démonstration.

Posons pour tout $x,y\in\mathbb{R}$:

$$F(x,y) = \frac{\mathrm{sl}(x)\mathrm{sl}'(y)+\mathrm{sl}'(x)\mathrm{sl}(y)}{1+\mathrm{sl}(x)^2\mathrm{sl}(y)^2}$$

Alors,

$$\begin{aligned}(1+\mathrm{sl}(x)^2\mathrm{sl}(y)^2)^2\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right) &= -2\mathrm{sl}(x)\mathrm{sl}(y)((\mathrm{sl}'(x)\mathrm{sl}(y))^2-(\mathrm{sl}(x)\mathrm{sl}'(y))^2)\\ &\quad +2\mathrm{sl}(x)\mathrm{sl}(y)(\mathrm{sl}(y)^2-\mathrm{sl}(x)^2)(1+\mathrm{sl}(x)^2\mathrm{sl}(y)^2)\\ &= 0\end{aligned}$$

et donc :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}$$

Ainsi, pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ fixé, la fonction

$$g(t)=F(t,x+y-t)\quad t\in\mathbb{R}$$

est constante car $g'=\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial y}=0$.

D'où

$$F(x,y)=g(x)=g(0)=\mathrm{sl}(x+y)$$

□

6.2 Prolongement de sl à $\mathbb{C}$.

En remarquant que pour tout $t\in[-\omega,\omega]$:

$$\int_{[0,i\,\mathrm{sl}(t)]}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^4}}=i\int_0^{\mathrm{sl}(t)}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^4}}=i\,t$$

il devient alors naturel de définir la fonction sl sur l'axe des imaginaires par :

$$\mathrm{sl}(i\,y)=i\,\mathrm{sl}(y)$$

et, en utilisant la formule donnée à la proposition 6.3, de la prolonger à tout le plan complexe $\mathbb{C}$ en posant :

$$\mathrm{sl}(x+i\,y)=\frac{\mathrm{sl}(x)\mathrm{sl}'(y)+i\,\mathrm{sl}'(x)\mathrm{sl}(y)}{1-\mathrm{sl}(x)^2\mathrm{sl}(y)^2}$$

On notera que cette égalité peut aussi s'écrire :

$$\mathrm{sl}(x+i\,y)=\frac{\mathrm{sl}(x)^2+\mathrm{sl}(y)^2}{\mathrm{sl}(x)\mathrm{sl}'(y)-i\,\mathrm{sl}'(x)\mathrm{sl}(y)}$$

Proposition 6.4

La fonction sl est une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ dont les pôles sont les points de

$$\mathcal{A}=\{(2p+1)\omega+i(2q+1)\omega,(p,q)\in\mathbb{Z}^2\}$$

Démonstration.

En posant pour tout $(x,y)\in\mathbb{C}/\mathcal{A}$:

$$u(x,y)=\frac{\mathrm{sl}(x)\mathrm{sl}'(y)}{1-\mathrm{sl}(x)^2\mathrm{sl}(y)^2}\ \text{et}\ v(x,y)=\frac{\mathrm{sl}'(x)\mathrm{sl}(y)}{1-\mathrm{sl}(x)^2\mathrm{sl}(y)^2}$$

on obtient que :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)&=\frac{\mathrm{sl}'(x)\mathrm{sl}'(y)(1+\mathrm{sl}(x)^2\mathrm{sl}(y)^2)}{(1-\mathrm{sl}(x)^2\mathrm{sl}(y)^2)^2}\\&=\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\end{aligned}$$

La dernière égalité est due au fait que $v(x,y)=u(y,x)$ et que l'expression de $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)$ est symétrique par rapport aux deux variables x et y. De même :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)&=\frac{2\mathrm{sl}(x)\mathrm{sl}(y)(\mathrm{sl}(x)^2-\mathrm{sl}(y)^2)}{(1-\mathrm{sl}(x)^2\mathrm{sl}(y)^2)^2}\\&=-\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\end{aligned}$$

Pour la dernière égalité, il suffit de remarquer cette fois que l'expression $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y)$ est antisymétrique par rapport aux deux variables x et y.

Ainsi, dans $\mathbb{C}/\mathcal{A}$, les deux fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ et satisfont les équations de Cauchy Riemann. Par conséquent, la fonction sl est holomorphe dans $\mathbb{C}/\mathcal{A}$.

Soit à présent $z_0 = x_0 + i\, y_0 \in \mathcal{A}$. Alors :

$$\mathrm{sl}(x_0)^2 = \mathrm{sl}(y_0)^2 = 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{sl}'(x_0) = \mathrm{sl}'(y_0) = 1$$

et donc

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to z_0} |\mathrm{sl}(z)| &= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left|\frac{\mathrm{sl}(x)^2+\mathrm{sl}(y)^2}{\mathrm{sl}(x)\mathrm{sl}'(y) - i\,\mathrm{sl}'(x)\mathrm{sl}(y)}\right| \\
&= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\mathrm{sl}(x)^2+\mathrm{sl}(y)^2}{\sqrt{(\mathrm{sl}(x)\mathrm{sl}'(y))^2 + (\mathrm{sl}'(x)\mathrm{sl}(y))^2}} \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

Autrement dit, z_0 est un pôle de la fonction sl. $\square$

Proposition 6.5

$(4\omega, 2\omega + 2i\omega)$ *est une paire de périodes fondamentales de la fonction* sl.

Démonstration.

Pour commencer, constatons que la fonction sl est elliptique. En effet, d'une part

$$\frac{2\omega + 2i\omega}{4\omega} = \frac{1+i}{2} \notin \mathbb{R}$$

D'autre part, puisque dans $\mathbb{R}$ la fonction sl est 4ω-préiodique, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\mathrm{sl}(z+4\omega) = \frac{\mathrm{sl}(x+4\omega)\mathrm{sl}'(y) + i\,\mathrm{sl}'(x+4\omega)\mathrm{sl}(y)}{1-\mathrm{sl}(x+4\omega)^2\mathrm{sl}(y)^2} = \mathrm{sl}(z)$$

et de plus

$$\mathrm{sl}(z+2\omega+2i\omega) = \frac{\mathrm{sl}(x+2\omega)\mathrm{sl}'(y+2\omega) + i\,\mathrm{sl}'(x+2\omega)\mathrm{sl}(y+2\omega)}{1-\mathrm{sl}(x+2\omega)^2\mathrm{sl}(y+2\omega)^2} = \mathrm{sl}(z)$$

Montrons à présent que $(4\omega, 2\omega+2i\omega)$ est une paire de période fondamentale de la fonction sl. Pour cela, soit $\tau \in \Lambda_{\mathrm{sl}}$, d'après le lemme 2.4, il existe un unique $\zeta \in \mathcal{P} = \{r4\omega + s(2\omega+2i\omega), 0 \leqslant r, s < 1\}$ et deux uniques entiers n, m tels que :

$$\tau = \zeta + n4\omega + m(2\omega + 2i\omega)$$

D'où

$$\zeta = \tau - n4\omega - m(2\omega+2i\omega) \in \Lambda_{\mathrm{sl}} \cup \{0\}$$

Montrons que $\zeta = 0$. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que $\zeta \neq 0$.

On a $\zeta \in \Lambda_{\mathrm{sl}}$ et

$$\mathrm{sl}(\zeta) = \mathrm{sl}(0) = 0$$

Or, dans $\mathcal{P}$, les deux seuls zéros de la fonction sl sont 0 et 2ω. Par conséquent, on aurait que $\zeta = 2\omega$ et donc

$$-1 = \mathrm{sl}(-\omega) = \mathrm{sl}(\omega) = 1$$

ce qui est impossible, d'où la contradiction. $\square$

Proposition 6.6

sl *est une fonction elliptique d'ordre 2.*

Démonstration.

D'après les deux propositions qui précèdent, la fonction sl est elliptique, reste a montrer qu'elle est d'ordre 2. En effet, dans $P(4\omega, 2\omega+2i\omega)$ la fonction sl possède exactement deux zéros, à savoir : 0 et 2ω qui sont des zéros simples de sl. En effet :

$$\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{sl}(z)}{z}=\mathrm{sl}'(0)=1 \quad \text{et} \quad \lim_{z\to 2\omega}\frac{\mathrm{sl}(z)}{z-2\omega}=\mathrm{sl}'(2\omega)=-1$$

□

Remarque 6.7

Dans $P(4\omega, 2\omega+2i\omega)$*, la fonction* sl *possède exactement deux pôles (simples), à savoir :* $\omega+i\omega$ *et* $3\omega+i\omega$*.*

Bibliographie

· *Michel Zisman*, **Mathématiques pour l'agrégation - avec exercices** 1996

· *Roger Godement*, **Analyse mathématique IV Intégration et théorie spectrale, analyse harmonique, le jardin des délices modulaires** 2003

· *Jacques Douchet*, **Analyse complexe** 2017