TER
Groupes moyennables, mariages et décompositions paradoxales

Nicolas LEMOINE

3 juin 2018

Table des matières

Introduction

En 1924, les mathématiciens polonais Stefan Banach et Alfred Tarski publiaient *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*, article dans lequel ils démontrent un théorème des plus perturbants pour l'intuition. Ce résultat, passé à la postérité sous le nom de "Paradoxe de Banach-Tarski", implique qu'il existe une décomposition de la boule unité de $\mathbb{R}^3$ en un nombre fini d'ensembles disjoints de sorte que l'on puisse, moyennant un nombre fini de translations et de rotations, reformer deux boules identiques à la première à partir de ces seuls ensembles.

La découverte de ce phénomène mathématique a conduit les chercheurs, notamment J. von Neumann, à étudier les décompositions paradoxales de groupes et à introduire la définition de groupe moyennable.

L'objectif de ce Travail d'Étude et de Recherche est de présenter ces différentes notions, pour aboutir à la démonstration du théorème de Tarski et Følner, qui énonce notamment l'équivalence entre l'existence d'une décomposition paradoxale d'un groupe et sa non moyennabilité. Pour ce faire, nous nous appuierons très largement sur le chapitre 4 de *Cellular Automata and Groups*, de T. Ceccherini-Silberstein et M. Coornaert [1].

Le premier chapitre sera ainsi consacré à la définition de groupe moyennable. Le chapitre 2 nous fournira, par le biais des conditions de Følner et des décompositions paradoxales, des exemples et contre-exemples de groupes moyennables. Le chapitre 3 sera quant à lui dédié à la démonstration d'un résultat célèbre de la théorie des graphes : le lemme des mariages. Ce chapitre sera essentiellement basé sur l'appendice H de l'ouvrage de T. Ceccherini-Silberstein et M. Coornaert [2]. La raison d'être de ce chapitre est qu'il nous permettra (grâce à un corollaire du lemme des mariages) de démontrer, au quatrième et dernier chapitre, le théorème de Tarski et Følner.

Chapitre 1

Groupes moyennables

1.1 Définitions

Soit E un ensemble quelconque. Pour rappel, on note $l^\infty(E)$ l'espace vectoriel des fonctions $f : E \to \mathbb{R}$ bornées. On le munit de la norme $\|.\|_\infty : f \mapsto \sup_E |f|$, qui en fait un espace de Banach. Afin de définir une notion de positivité sur cet espace, on introduit un ordre partiel $\leq$ via :

$$\forall f, g \in l^\infty(E),\ (f \leq g \iff \forall x \in E,\ f(x) \leq g(x))\ .$$

1.1.1 Moyennes

Définition 1 : Une **moyenne** sur E est une application linéaire $m : l^\infty(E) \to \mathbb{R}$ vérifiant :

(i) $m(\mathbb{1}) = 1$ (où $\mathbb{1}$ est la fonction constante égale à 1 sur E)

(ii) $\forall x \in l^\infty(E)$ tel que $x \geq 0,\ m(x) \geq 0$

On note $\mathcal{M}(E)$ l'ensemble des moyennes sur E.

Exemple : Si $S \subset E$ est dénombrable et si $f : S \to \mathbb{R}$ vérifie $\forall s \in S,\ f(s) > 0$ et $\sum_{s\in S} f(s) = 1$, alors l'application

$$\begin{array}{rccc} m_f & : & l^\infty(E) & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \sum_{s\in S} f(s)x(s) \end{array}$$

définit clairement une moyenne sur E, dite à support dénombrable.

On note $l^\infty(E)^*$ le dual topologique de $l^\infty(E)$ que l'on munit de la norme $\|\cdot\|$ définie par :

$$\forall u \in l^\infty(E)^*,\ \|u\| = \sup_{\substack{x\in l^\infty(E) \\ \|x\|\leq 1}} |u(x)|$$

C'est alors un espace de Banach.

Propriétés : *Soit m une moyenne sur E. Alors on a les propriétés suivantes :*

(1) $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ m(\lambda\mathbb{1}) = \lambda$

(2) $\forall x, y \in l^\infty(E),\ x \leq y \Rightarrow m(x) \leq m(y)$

(3) $\forall x \in l^\infty(E),\ \inf_E(x) \le m(x) \le \sup_E(x)$ *et* $|m(x)| \le \|x\|_\infty$
(4) $m \in l^\infty(E)^*$ *et vérifie* $\|m\| = 1$

Démonstration : (1) provient de la linéarité de m et du fait que $m(\mathbb{1}) = 1$, (2) et (3) découlent de la positivité. Enfin, (4) résulte de (3) et $m(\mathbb{1}) = 1$.

$\square$

1.1.2 Considérations topologiques sur $\mathcal{M}$(E)

L'espace vectoriel $l^\infty(E)^*$ peut être muni de la topologie associée à la norme $\|.\|$ définie précédemment, qualifiée de topologie forte. Mais on peut également le munir de la topologie faible-$\star$, qui est par définition la topologie la moins fine rendant toutes les applications d'évaluation $u \in l^\infty(E)^* \mapsto u(x)$ (pour $x \in l^\infty(E)$) continues.

Théorème 1 : *$\mathcal{M}(E)$ est un sous-ensemble de $l^\infty(E)^*$ convexe et compact pour la topologie faible-$\star$.*

Démonstration : Soient m_1, m_2 des moyennes sur E et $t \in [0;1]$. On a

$$(tm_1 + (1-t)m_2)(\mathbb{1}) = tm_1(\mathbb{1}) + (1-t)m_2(\mathbb{1}) = t + (1-t) = 1\ .$$

De plus, si $x \ge 0$, alors

$$(tm_1 + (1-t)m_2)(x) = tm_1(x) + (1-t)m_2(x) \ge 0\ .$$

Ainsi, $tm_1 + (1-t)m_2 \in \mathcal{M}(E)$, et donc $\mathcal{M}(E)$ est convexe.

Par ailleurs, en notant $l^\infty(E)_+$ l'ensemble des fonctions partout positives sur E, on peut écrire

$$\mathcal{M}(E) = \{m \in l^\infty(E)^* | m(\mathbb{1}) = 1\} \cap \left(\bigcap_{x \in l^\infty(E)_+} \{m \in l^\infty(E)^* | m(x) \in \mathbb{R}_+\} \right)$$

et les ensembles apparaissant dans cette écriture sont clairement fermés pour la topologie faible-$\star$. Ainsi, $\mathcal{M}(E)$ est une intersection de fermés, donc il est fermé dans $l^\infty(E)^*$ pour la topologie faible-$\star$. Par ailleurs, on a vu au 1.1.1 que $\forall m \in \mathcal{M}(E)$, $\|m\| = 1$. Donc $\mathcal{M}(E)$ est contenu dans la boule unité fermée de $l^\infty(E)^*$, qui est compacte pour la topologie faible-$\star$ par le théorème de Banach-Alaoglu. Ainsi, $\mathcal{M}(E)$ est compact.

$\square$

1.1.3 Action de G sur $\mathcal{M}$(G) et moyennabilité des groupes

Soit G un groupe.
G agit naturellement par translation à gauche et à droite sur $\mathbb{R}^G$ via :

$$\begin{array}{ccc} G \times \mathbb{R}^G & \to & \mathbb{R}^G \\ (g,x) & \mapsto & (g' \mapsto x(g^{-1}g')) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} G \times \mathbb{R}^G & \to & \mathbb{R}^G \\ (g,x) & \mapsto & (g' \mapsto x(g'g^{-1})) \end{array}$$

On remarque que ces deux actions sont linéaires commutent entre elles. De plus, $l^\infty(G)$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^G$ stable par ces actions, on peut donc restreindre celles-ci pour obtenir le actions de G sur $l^\infty(G)$ par translation. Enfin, ces actions sont isométriques (et donc continues) car

$$\forall g \in G,\ \forall x \in l^\infty(G),\ \|g \cdot x\|_\infty = \|x \cdot g\|_\infty = \|x\|_\infty\ .$$

On peut également définir par dualité les actions par translation (à gauche et à droite) de G sur $l^\infty(G)^*$:

$$\begin{array}{ccc} G \times l^\infty(G)^* & \to & l^\infty(G)^* \\ (g,u) & \mapsto & (x \mapsto u(g^{-1} \cdot x)) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} G \times l^\infty(G)^* & \to & l^\infty(G)^* \\ (g,u) & \mapsto & (x \mapsto u(x \cdot g^{-1})) \end{array}$$

On observe que le sous-ensemble $\mathcal{M}(G)$ est laissé invariant par ces deux actions. Par restriction, on obtient donc les actions de G sur $\mathcal{M}(G)$ par translation à gauche et à droite.

Proposition : *Les actions de G sur $\mathcal{M}(G)$ définies ci-dessus sont continues pour la topologie faible-$\star$.*

Démonstration : Pour tout $g \in G$, $u \mapsto g \cdot u$ est continue dans $l^\infty(G)^*$ pour la topologie faible-$\star$ si et seulement si pour tout $x \in l^\infty(G)$, l'application $u \mapsto (g \cdot u)(x)$ est continue. Or cette application n'est autre que l'évaluation de $u \mapsto u(g^{-1} \cdot x)$, qui est continue par définition de la topologie faible-$\star$. Donc l'action à gauche de G sur $l^\infty(G)^*$ est continue, et il en va de même pour celle à droite. Et par restriction, on a le résultat souhaité.

$\square$

Définition 2 : Une moyenne $m \in \mathcal{M}(G)$ sur G est dite **invariante** à gauche (resp. à droite) si $\forall g \in G$, $g{\cdot}m = m$ (resp. $m{\cdot}g = m$). Elle est dite **bi-invariante** si elle est invariante à gauche et à droite.

Proposition : *Soit G un groupe. Il y a équivalence entre :*

(1) *Il existe une moyenne sur G invariante à gauche ;*

(2) *Il existe une moyenne sur G invariante à droite ;*

(3) *Il existe une moyenne sur G bi-invariante.*

Démonstration : Il suffit de voir l'implication (1) $\Rightarrow$ (3), l'implication (2) $\Rightarrow$ (3) étant très similaire et les autres implications triviales.

Soit $m \in \mathcal{M}(G)$ une moyenne invariante à gauche. Définissons alors pour tout $x \in l^\infty(G)$ l'application

$$\widetilde{x} \ :\ \begin{array}{ccc} G & \to & \mathbb{R} \\ g & \mapsto & m(x \cdot g) \end{array}\ .$$

Par les propriétés des moyennes et par isométrie de l'action de G sur $l^\infty(G)$, on a :

$$\forall x \in l^\infty(G),\ \forall g \in G,\ |\widetilde{x}(g)| = |m(xg)| \leq \|xg\|_\infty = \|x\|_\infty$$

Donc $\widetilde{x} \in l^\infty(G)$.

On peut donc définir l'application

$$\begin{array}{cccc} M & : & l^\infty(G) & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & m(\widetilde{x}) \end{array}$$

qui est clairement une moyenne sur G.

Soient à présent $h \in G$ et $x \in l^\infty(G)$.

Pour tout $g \in G$, $\widetilde{hx}(g) = m(hxg) = m(xg) = \widetilde{x}(g)$, donc $\widetilde{hx} = \widetilde{x}$. Par définition de M, M est donc invariante à gauche. Par ailleurs, pour tout $g \in G$ on a $\widetilde{xh}(g) = m((xh)g) = m(x(hg)) = \widetilde{x}(hg) = h^{-1}\widetilde{x}(g)$, donc $\widetilde{xh} = h^{-1}\widetilde{x}$.

Ainsi, par définition de M et comme m est invariante à gauche, on en déduit $M(xh) = m(\widetilde{xh}) = m(\widetilde{x}) = M(x)$. Donc M est bi-invariante.

□

Définition 3 : Un groupe G est dit **moyennable** si il existe un moyenne bi-invariante sur G.

Remarques : (1) *Par la proposition précédente, l'existence d'un moyenne invariante à gauche ou à droite suffit.*

(2) *Si G est de type fini engendré par $(a_k)_{k\in[\![1;n]\!]}$, il suffit de vérifier $a_k m = m$ pour tout $k \in [\![1;n]\!]$*

Exemple : Tout groupe fini est moyennable. En effet, si G est un groupe fini, l'application

$$\begin{array}{cccc} m & : & l^\infty(G) & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} x(g) \end{array}$$

est clairement une moyenne. De plus,

$$\begin{aligned} \forall h \in G,\ \forall x \in l^\infty(G),\ (h\cdot m)(x) = m(h^{-1}\cdot x) &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(h^{-1}\cdot x)(g) \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} x(hg) \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g'\in G} x(g') \\ &= m(x) \end{aligned}$$

car l'action de G sur lui-même par translation à gauche est fidèle et transitive. Donc m est invariante à gauche (et même bi-invariante en fait). Donc G est moyennable.

1.2 Moyennabilité de $\mathbb{Z}$

Dans cette section, nous tâcherons de prouver la moyennabilité du groupe abélien $(\mathbb{Z}, +)$ de deux façons différentes : une première en utilisant la compacité de $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$ (théorème 1, découlant du théorème de Banach-Alaoglu). La seconde démonstration s'appuiera sur une variante du théorème de Hahn-Banach (permettant de conserver une certaine positivité en prolongeant la forme linéaire) que nous démontrerons.

Notation : Dans toute cette section, pour $x \in l^\infty(\mathbb{Z})$ on notera $\tau_1(x)$ l'élément de $l^\infty(\mathbb{Z})$ qui à $k \in \mathbb{Z}$ associe $x(k-1)$.

1.2.1 Démonstration utilisant la compacité de $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'application :

$$\begin{array}{cccc} m_n & : & l^\infty(\mathbb{Z}) & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{k=n} x(k) \end{array}$$

· $\forall n \in \mathbb{N}$, m_n est clairement linéaire et vérifie $m_n(\mathbb{1}) = 1$.

· $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in l^\infty(\mathbb{Z})$ tel que $x \geq 0$, on a bien $m_n(x) \geq 0$. Donc $m_n \in \mathcal{M}(\mathbb{Z})$.

· Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in l^\infty(\mathbb{Z})$,

$$\begin{aligned} |(1.m_n - m_n)(x)| &= \left| \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n+1}^{n+1} x(k) - \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} x(k) \right| \\ &= \frac{1}{2n+1} |x(n+1) - x(-n)| \\ &\leq \frac{2\|x\|_\infty}{2n+1} \end{aligned}$$

Par ailleurs, la compacité de $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$ (théorème 1) implique :

$$\bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\{m_n \mid n \geq N\}} \neq \emptyset$$

Soit $m \in \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \overline{\{m_n \mid n \geq N\}} \subset \mathcal{M}(\mathbb{Z})$: m est une valeur d'adhérence de $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour $x \in l^\infty(\mathbb{Z})$ et $\varepsilon > 0$, notons :

$$V_{x,\varepsilon} = \{m' \in l^\infty(\mathbb{Z})^* \mid |m'(x) - m(x)| \leq \varepsilon \text{ et } |m'(\tau_1(x)) - m(\tau_1(x))| \leq \varepsilon\}$$

Les $V_{x,\varepsilon}$ sont en fait des voisinages élémentaires de m pour la topologie faible-$\star$. Par choix de m, on a alors

$$\forall x \in l^\infty(\mathbb{Z}),\ \forall \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N}, \quad \{m_n \mid n \geq N\} \cap V_{x,\varepsilon} \neq \emptyset\ .$$

Soient $x \in l^\infty(\mathbb{Z})$, $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. Il existe alors $n \geq N$ tel que $m_n \in V_{x,\varepsilon}$, et ainsi :

$$\begin{aligned} |m(\tau_1(x)) - m(x)| &\leq |m(\tau_1(x)) - m_n(\tau_1(x))| + |m_n(\tau_1(x)) - m_n(x)| \\ &\quad + |m_n(x) - m(x)| \\ &\leq \quad \varepsilon \quad + \quad \frac{2\|x\|_\infty}{2n+1} \quad + \quad \varepsilon \\ &\leq \quad \frac{2\|x\|_\infty}{2N+1} \quad + \quad 2\varepsilon \end{aligned}$$

Or nous avions pris $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ quelconques, donc pour tout $x \in l^\infty(\mathbb{Z})$, $m(\tau_1(x)) = m(x)$. Autrement dit, comme 1 est générateur de $(\mathbb{Z}, +)$, m est invariante (à gauche et à droite car c'est la même action pour $\mathbb{Z}$ qui est abélien). Donc $(\mathbb{Z}, +)$ est moyennable.

1.2.2 Démonstration utilisant une variante du théorème d'Hahn-Banach

Nous allons ici démontrer une variante du théorème d'Hahn-Banach, qui va nous permettre de conserver une certaine positivité lors du prolongement de la forme linéaire. Notre référence pour ce théorème est [3].

Commençons par définir la notion de cône positif d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel :

Définition 4 : Un **cône positif** d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel X est un sous-ensemble P de X vérifiant :

(i) $\forall x, y \in P$, $x + y \in P$;

(ii) $\forall x \in P$, $\forall t \geq 0$, $tx \in P$.

Théorème 2 : *Soient X un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $P \subset X$ un cône positif, Y un sous-espace vectoriel de X tel que $\forall x \in X$, $\exists y \in Y$ tel que $y - x \in P$ $(\star)$, et $f : Y \to \mathbb{R}$ linéaire telle que pour tout $y \in Y \cap P$, $f(y) \geq 0$. Alors il existe $g : X \to \mathbb{R}$ linéaire prolongeant f et vérifiant $\forall x \in P$, $g(x) \geq 0$.*

Démonstration : Considérons l'ensemble :
$S := \{(Z, h) \mid Z$ sous-espace vectoriel de X contenant Y, $h : Z \to \mathbb{R}$ linéaire prolongeant f et vérifiant $\forall z \in Z \cap P$, $h(z) \geq 0\}$

· $S \neq \varnothing$ car $(Y, f) \in S$.

· On munit S d'une relation d'ordre (partiel) $\leq$ via :

$$(Z, h) \leq (Z', h') \iff Z \subset Z' \text{ et } h'_{|Z} = h$$

· S est inductif. En effet, considérons un sous-ensemble $(Z_\lambda, h_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset S$ totalement ordonné, et posons $\widetilde{Z} := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} Z_\lambda$. $\widetilde{Z}$ est trivialement un sous-espace vectoriel de X contenant Y. De plus, $\forall z \in \widetilde{Z}$, $\exists \lambda \in \Lambda$, $z \in Z_\lambda$ et on peut alors poser $\widetilde{h}(z) := h_\lambda(z)$ (dépendant a priori de λ). En outre, si $z \in Z_{\lambda_1} \cap Z_{\lambda_2}$, alors comme $(Z_\lambda, h_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est totalement ordonné, h_{λ_1} prolonge h_{λ_2} (ou l'inverse), et ainsi $h_{\lambda_1}(z) = h_{\lambda_2}(z)$, c'est-à-dire que la quantité $\widetilde{h}(z)$ est en fait bien définie indépendamment de λ. Avec cette définition, il est facile de voir que $\widetilde{h} : \widetilde{Z} \to \mathbb{R}$ est linéaire (car $(Z_\lambda, h_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est totalement ordonné...), qu'elle prolonge f et qu'elle vérifie $\forall z \in \widetilde{Z} \cap P$, $\widetilde{h}(z) \geq 0$ (car $\widetilde{Z} \cap P = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} Z_\lambda \cap P$). Il est également évident avec cette construction que $\forall \lambda \in \Lambda$, $(Z_\lambda, h_\lambda) \leq (\widetilde{Z}, \widetilde{h})$, donc $(\widetilde{Z}, \widetilde{h})$ est un majorant de $(Z_\lambda, h_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ dans S.

Par le lemme de Zorn, S possède donc un élément maximal, que nous noterons (Z, h). Supposons par l'absurde que Z est un sous-espace strict de X, et prenons $v \in X \setminus Z$. On pose $Z' := \mathbb{R}v \oplus Z$: Z' est un sous-espace vectoriel de X contenant strictement Z.

Considérons alors

$$Z_+ := (v + P) \cap Z \quad \text{et} \quad Z_- := (-v + P) \cap Z \ .$$

Par la propriété $(\star)$ vérifiée par $Y \subset Z$ (appliquée à v et $-v$), Z_+ et Z_- sont non vides.

Soient $z_+ \in Z_+$ et $z_- \in Z_-$. Alors il existe $p_+, p_- \in P$ tels que $z_+ = v + p_+$ et $z_- = -v + p_-$. Ainsi :

$$h(z_-) = h(-v + p_-) = h(-z_+ + p_+ + p_-) = -h(z_+) + h(p_+ + p_-) \geq -h(z_+)$$

car $p_+ + p_- \in P$. Les ensembles $A := \{-h(z_+) \mid z_+ \in Z_+\}$ et $B := \{h(z_-) \mid z_- \in Z_-\}$ sont donc respectivement majoré et minoré. Si on pose $a := \sup(A)$ et $b := \inf(B)$, on a de plus $a \leq b$.

Soit $c \in [a; b]$. On définit

$$\begin{array}{cccc} h' & : & Z' = \mathbb{R}v \oplus Z & \to & \mathbb{R} \\ & & tv + z & \mapsto & h(z) - tc \end{array} .$$

h' est linéaire, $h'_{|Z} = h$ (et donc $h'_{|Y} = f$). Soit $tv + z \in Z' \cap P$ ($t \in \mathbb{R}$).

· Si $t = 0$, $z \in P$ et $h'(tv + z) = h'(z) = h(z) \geq 0$.

· Si $t > 0$, $\frac{z}{t} = -v + \frac{1}{t}(tv + z) \in Z_-$ et :

$$h'(tv + z) = th'(\frac{z}{t}) - tc = t(h'(\frac{z}{t} - c)) \geq 0 .$$

· Si $t < 0$, $\frac{z}{-t} = v + \frac{1}{-t}(tv + z) \in Z_+$ et :

$$h'(tv + z) = -th'(\frac{z}{-t}) - tc = -t(h'(\frac{z}{-t} + c)) \geq 0 .$$

Ainsi, $(Z', h') \in S$ mais $(Z, h) < (Z', h')$, ce qui contredit le caractère maximal de (Z, h). Notre hypothèse était donc fausse. Finalement, $Z = X$ et h est l'application g voulue pour le théorème.

□

Nous allons à présent appliquer ce résultat dans le cas particulier $X = l^\infty(\mathbb{Z})$ et $P = \{(x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \mid \forall k \in \mathbb{Z}, x_k \geq 0\}$ (P est à l'évidence un cône positif). Construisons Y. Soient

$$\begin{array}{cccc} S & : & l^\infty(\mathbb{Z}) & \to & l^\infty(\mathbb{Z}) \\ & & (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} & \mapsto & (x_{k+1})_{k\in\mathbb{Z}} \end{array}$$

l'opérateur linéaire de décalage, et $u \in l^\infty(\mathbb{Z})$ la fonction constante égale à 1.

On remarque que $u \notin Im(S - Id)$. En effet, s'il existait $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in l^\infty(\mathbb{Z})$ tel que $(x_{k+1})_{k\in\mathbb{Z}} - (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} = u$, on aurait $\forall k \in \mathbb{Z}$, $x_{k+1} = x_k + 1$, et en particulier $x_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$, ce qui serait absurde.

On peut donc poser $Y := Im(S - Id) \oplus \mathbb{R}u$, et définir

$$\begin{array}{cccc} f & : & Y = Im(S - Id) \oplus \mathbb{R}u & \to & \mathbb{R} \\ & & x + tu & \mapsto & t \end{array} .$$

Pour pouvoir appliquer le théorème, il nous faut vérifier que Y satisfait la propriété $(\star)$. Or c'est évident car si on prend $x \in X$, alors $y := \|x\|_\infty u \in Y$ vérifie bien $y - x \geq 0$.

Par ailleurs, si $y \in P \cap Y$, alors il existe $t \in \mathbb{R}$ et $x \in Im(S - Id)$ tels que $y = x + tu$ et $f(y) = t$. En particulier il existe $z \in l^\infty(\mathbb{Z})$ tel que

$$x = (z_{k+1} - z_k)_{k\in\mathbb{Z}} = y - tu \geq -tu$$

car $y \in P$. Ainsi, si on avait $f(y) = t < 0$, on aurait

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ z_{k+1} \geq z_k - t \quad \text{donc} \quad z_k \geq z_0 - kt \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty ,$$

ce qui serait absurde. Donc pour tout $y \in P \cap Y$, $f(y) \geq 0$.

Y et f ainsi construits vérifient donc bien les hypothèses du théorème. Celui-ci nous donne alors $m : l^\infty(\mathbb{Z}) \to \mathbb{R}$ linéaire prolongeant f (donc vérifiant $m(u) = 1$) et telle que pour tout $x \geq 0$, $m(x) \geq 0$; c'est-à-dire m est une moyenne.

Enfin, si $x \in l^\infty(\mathbb{Z})$, $m(\tau_1(x)) - m(x) = m((x_{k-1} - x_k)_{k\in\mathbb{Z}}) = 0$ car m prolonge f et car $(x_{k-1} - x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in Im(S - Id)$. Donc m est invariante.

Donc $(\mathbb{Z}, +)$ est moyennable.

Chapitre 2

Exemples et contre-exemples : deux conditions remarquables

Dans ce chapitre, nous allons traiter de deux propriétés des groupes qui n'ont de prime abord pas de lien évident avec la moyennabilité, mais qui pourtant nous fourniront des caractérisations de celle-ci au chapitre 4, avec le théorème de Tarski et Følner.

2.1 Conditions de Følner

Soit G un groupe, que nous supposerons dénombrable dans cette section. Cette hypothèse n'est en fait pas nécessaire pour les définitions et résultats que nous verrons, mais elle simplifie les démonstrations, dans le sens où elle nous permet de contourner la notion de convergence de filets (ou suites généralisées).

2.1.1 Définitions

Pour prouver la moyennabilité de $\mathbb{Z}$ au paragraphe 1.2.1, nous avions utilisé de manière sous-jacente une suite de sous-ensembles finis de $\mathbb{Z}$, les $[\![-n;n]\!]$, possédant la propriété remarquable d'avoir un "bord" devenant négligeable quand n tend vers $+\infty$. Plus précisément, nous avions construit une suite de moyennes sur $\mathbb{Z}$ en sommant contre les indicatrices (normalisées) de ces ensembles, puis on a pu par compacité de $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$ trouver une valeur d'adhérence de cette suite, qui était alors une moyenne invariante. La définition qui suit généralise en quelque sorte cette suite de sous-ensembles.

Définition 5 : On dit qu'un suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles finis et non vides de G est une **suite de Følner** à gauche si :

$$\forall g \in G, \lim_{n\to+\infty} \frac{|F_n \setminus gF_n|}{|F_n|} = 0 \tag{2.1}$$

Remarques : (1) *On définit de manière similaire les suites de Følner à droite en remplaçant "$F_n \setminus gF_n$" par "$F_n \setminus F_n g$". Il est alors aisé de voir que si*

$(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Følner à gauche, alors $(F_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Følner à droite (où $F^{-1} := \{f^{-1} \mid f \in F\}$).

(2) *Si G est de type fini, engendré par $(g_k)_{k\in[\![1;n]\!]}$, l'équation (2.1) peut se réécrire plus simplement en :*

$$\forall k \in [\![1;n]\!],\ \lim_{n\to+\infty} \frac{|F_n \setminus g_k F_n|}{|F_n|} = 0$$

Exemple : Dans $G = (\mathbb{Z}^d, +)$, $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ F_n = [\![0;n]\!]^d$ est une suite de Følner (à gauche et à droite). En effet, si on note $(e_k)_{k\in[\![1;d]\!]}$ les générateurs canoniques de $\mathbb{Z}^d$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![1;d]\!],\ \frac{|F_n \setminus (F_n + e_k)|}{|F_n|} = \frac{(n+1)^{d-1}}{(n+1)^d} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\ .$$

Définition 6 : On dit que G satisfait les **conditions de Følner** si pour tout sous-ensemble fini $K \subset G$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble fini non vide $F \subset G$ tel que :

$$\forall k \in K,\ \frac{|F \setminus kF|}{|F|} < \varepsilon\ . \tag{2.2}$$

Remarques : (1) *Cette définition est équivalente à l'existence de F tel que pour tout $k \in K$, $\frac{|F\setminus Fk|}{|F|} < \varepsilon$ (c'est-à-dire la même condition mais avec l'action à droite) par la même remarque que précédemment.*

(2) *Ici aussi, si G est de type fini engendré par $(g_j)_{j\in[\![1;n]\!]}$, il suffit de vérifier que pour tout $j \in [\![1;n]\!]$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble fini non vide $F \subset G$ tel que $\frac{|F\setminus g_j F|}{|F|} < \varepsilon$.*

Proposition : *G est toujours un groupe dénombrable. Il y a équivalence entre :*

(a) *G vérifie les conditions de Følner ;*

(b) *G admet une suite de Følner.*

Démonstration : $(a) \Rightarrow (b)$: comme G est dénombrable, il existe une suite croissante $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles finis de G telle que $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Comme G vérifie les conditions de Følner, il existe pour chaque $n \in \mathbb{N}$ un sous-ensemble fini et non vide $F_n \subset G$ tel que

$$\forall g \in K_n,\ \frac{|F_n \setminus gF_n|}{|F_n|} < \varepsilon_n\ .$$

Maintenant, si $g \in G$, $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ g \in K_n$. En utilisant les inégalités précédentes et le fait que $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on obtient :

$$\frac{|F_n \setminus gF_n|}{|F_n|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\ .$$

Donc $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Følner (à gauche) pour G.

$(b) \Rightarrow (a)$: soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de Følner à gauche pour G. Soient $K \subset G$ un sous-ensemble fini et $\varepsilon > 0$. Soit $k \in K$. Comme $\frac{|F_n\setminus kF_n|}{|F_n|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il existe $n_k \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_k$, $\frac{|F_n \setminus kF_n|}{|F_n|} < \varepsilon$. Comme K est fini, on peut poser $N := \max_{k \in K}(n_k)$ et alors

$$\forall k \in K, \ \frac{|F_N \setminus kF_N|}{|F_N|} < \varepsilon \ .$$

Donc G vérifie bien la propriété de Følner.

□

2.1.2 Tout groupe vérifiant les conditions de Følner est moyennable

On observe assez facilement que si G possède une suite de Følner, alors on peut construire un moyenne invariante sur G. Nous verrons au Chapitre 4 (avec le théorème de Tarski & Følner) que la réciproque est également vraie, c'est-à-dire que la moyennabilité de G est en fait équivalente au fait de vérifier les conditions de Følner.

Lemme 1 : *Si G vérifie les conditions de Følner, alors G est moyennable.*

Démonstration : On suppose que G possède une suite de Følner à gauche $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Considérons pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'application :

$$\begin{array}{rccc} m_n & : & l^\infty(G) & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{1}{|F_n|}\sum_{g\in F_n} x(g) \end{array}$$

Les m_n sont clairement des moyennes sur G.

Soit $g \in G$. Pour tout $x \in l^\infty(G)$, on a alors :

$$\begin{aligned}
|(g \cdot m_n - m_n)(x)| &= \frac{1}{|F_n|}\left|\sum_{h\in F_n} x(gh) - \sum_{h\in F_n} x(h)\right| \\
&= \frac{1}{|F_n|}\left|\sum_{h'\in gF_n} x(h') - \sum_{h\in F_n} x(h)\right| \\
&= \frac{1}{|F_n|}\left|\sum_{h\in gF_n\setminus F_n} x(h) - \sum_{h\in F_n\setminus gF_n} x(h)\right| \\
&\leq \frac{1}{|F_n|}\|x\|_\infty(|gF_n \setminus F_n| + |F_n \setminus gF_n|) \\
&= 2\|x\|_\infty \frac{|F_n \setminus gF_n|}{|F_n|}
\end{aligned}$$

Par ailleurs, par compacité de $\mathcal{M}(G)$, $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une valeur d'adhérence $m \in \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \overline{\{m_n \mid n \geq N\}} \subset \mathcal{M}(G)$.

Pour $x \in l^\infty(G)$ et $\varepsilon > 0$, notons :

$$V_{x,\varepsilon} = \{m' \in l^\infty(G)^* \mid |m'(x) - m(x)| \leq \varepsilon \text{ et } |m'(g^{-1} \cdot x) - m(g^{-1} \cdot x)| \leq \varepsilon\}$$

Les $V_{x,\varepsilon}$ sont des voisinages élémentaires de m pour la topologie faible-$\star$. Par choix de m, on a alors

$$\forall x \in l^\infty(G),\ \forall \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N}, \quad \{m_n \mid n \geq N\} \cap V_{x,\varepsilon} \neq \emptyset\ .$$

Soient $x \in l^\infty(\mathbb{Z})$, $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. Il existe alors $n \geq N$ tel que $m_n \in V_{x,\varepsilon}$, et ainsi :

$$\begin{aligned}|m(g^{-1}\cdot x) - m(x)| &\leq |m(g^{-1}\cdot x) - m_n(g^{-1}\cdot x)| + |m_n(g^{-1}\cdot x) - m_n(x)| \\ &\quad + |m_n(x) - m(x)| \\ &\leq \quad \varepsilon \quad + \quad 2\|x\|_\infty \frac{|F_n \setminus gF_n|}{|F_n|} \quad + \quad \varepsilon\end{aligned}$$

Or nous avions pris $N \in \mathbb{N}$ quelconque, et $n \geq N$ donc en faisant tendre N vers $+\infty$ on obtient :

$$|m(g^{-1}\cdot x) - m(x)| \leq 2\varepsilon$$

car $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Følner à gauche. Nous avions également pris $\varepsilon > 0$ quelconque, donc pour tout $x \in l^\infty(G)$, $m(g^{-1}\cdot x) = m(x)$. Finalement pour tous $g \in G$ et $x \in l^\infty(G)$, $(g\cdot m - m)(x) = 0$, donc $g \cdot m = m$. Donc m est une moyenne invariante à gauche sur G.

Donc G est moyennable.

$\square$

2.1.3 Exemples de groupes moyennables

On a exhibé au paragraphe 2.1.1 une suite de Følner pour $(\mathbb{Z}^d, +)$. Avec le lemme 1, on en déduit que $\mathbb{Z}^d$ est moyennable En particulier, pour $d = 1$ on retrouve une preuve de la moyennabilité de $\mathbb{Z}$ vue au 1.2.1 (celle utilisant la compacité de $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$).

Plus généralement, tout groupe de la forme $\mathbb{Z}^d \times F$ où F est un groupe fini est moyennable. En effet, $(F_n \times F)_{n\in\mathbb{N}}$ où $F_n = [\![-n; n]\!]^d$ est une suite de Følner car

$$\forall f \in F,\ \frac{|F_n \times F \setminus (0, f)F_n \times F|}{|F_n \times F|} = \frac{|F_n \times (F \setminus fF)|}{|F_n \times F|} = \frac{|F_n \times \emptyset|}{|F_n \times F|} = 0$$

et

$$\frac{|F_n \times F \setminus (1, e_F)F_n \times F|}{|F_n \times F|} = \frac{|(F_n \setminus 1.F_n) \times F|}{|F_n \times F|} = \frac{|(F_n \setminus 1.F_n)|}{|F_n|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\ .$$

En particulier, le théorème de structure des groupes abéliens de type fini implique que tout groupe abélien de type fini est moyennable.

Remarque : *En fait, on a même que tout groupe abélien est moyennable. En effet, tout groupe abélien est limite inductive de ses sous-groupes de type fini, et les limites inductives de groupes moyennables sont moyennables. Ces points ne sont pas triviaux mais nous ne les détaillerons pas.*

D'autres exemples de groupes moyennables peuvent être aisément exhibés grâce aux conditions de Følner. C'est le cas des groupes G de type fini engendrés par $S \subset G$ finie telle que $e_G \in S$, $\forall s \in S,\ s^{-1} \in S$ et vérifiant :

$$\exists P \in \mathbb{R}[X],\ |S^k| \underset{k \to +\infty}{\sim} P(k)\ .$$

La suite $(S^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors une suite de Følner pour G. En effet :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall s \in S^n,\ S^{n-1} = \{s.s^{-1}.v \mid v \in S^{n-1}\} \subset sS^n\ ;$$

et par ailleurs $S^{n-1} \subset S^n$, d'où :

$$\begin{aligned}\forall s \in S,\ \frac{|S^n \setminus sS^n|}{|S^n|} &\leq \frac{|S^n \setminus S^{n-1}|}{|S^n|}\\ &= \frac{|S^n| - |S^{n-1}|}{|S^n|}\\ &= 1 - \frac{|S^{n-1}|}{|S^n|}\\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{car} \quad \frac{|S^{n-1}|}{|S^n|} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{P(n-1)}{P(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1\ .\end{aligned}$$

Donc G est bien moyennable par le lemme 1.

2.2 Décompositions paradoxales

Comme nous l'avons vu en introduction, le théorème de Banach-Tarski implique que la boule unité possède une décomposition que l'on peut qualifier de "paradoxale", car elle nous permet de dupliquer la boule à partir d'une partition finie de celle-ci et uniquement via un nombre fini de translations et de rotations. Ce résultat a motivé la définition de décomposition paradoxale d'un groupe.

Soit G un groupe.

2.2.1 Définition

Une décomposition paradoxale de G est une partition de G qui peut, moyennant des translations, se scinder pour former deux nouvelles partitions disjointes de G ; ce qui est assez contre-intuitif et justifie la terminologie. Avant d'en donner une définition plus rigoureuse, introduisons la notion sur un exemple essentiel : celui du groupe libre à deux générateurs F_2.

Exemple : Pour rappel, le groupe libre à deux générateurs (a et b) est défini en considérant l'ensemble des mots finis que l'on peut former en utilisant les lettres a, a^{-1}, b et b^{-1}, et dans lequel on identifie les mots qui diffèrent seulement par la suppression de portions de la forme aa^{-1}, $a^{-1}a$, bb^{-1} ou $b^{-1}b$ en n'importe quelle position. Cet ensemble muni de la concaténation des mots forme un groupe non abélien (le mot vide étant l'élément neutre e), c'est le groupe libre à deux générateurs F_2. Le groupe libre F_2 peut être représenté par son graphe de Cayley (voir figure 2.1).

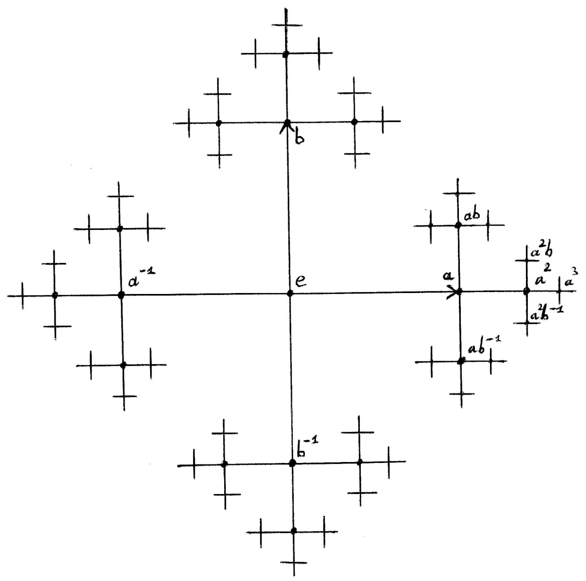

FIGURE 2.1 – Graphe de Cayley du groupe libre engendré par a et b.

Considérons à présent la partition du groupe libre par les sous-ensembles suivants :

- $A_+ := \{$mots réduits débutant par une puissance > 0 de $a\}$
- $A_- := \{$mots réduits débutant par une puissance < 0 de $a\}$
- $B_+ := \{$mots réduits débutant par une puissance > 0 de $b\} \cup \{[b^{-n}] \mid n \in \mathbb{N}\}$
- $B_- := \{$mots réduits débutant par une puissance < 0 de $b\} \setminus \{[b^{-n}] \mid n \in \mathbb{N}\}$

Cette partition est représentée sur la figure 2.2.

On a bien $F_2 = A_+ \sqcup A_- \sqcup B_+ \sqcup B_-$. Par ailleurs, en effectuant des translations, on peut obtenir deux nouvelles partitions de F_2 à partir de celle-là. En effet :

$$F_2 = a^{-1}A_+ \sqcup A_- \text{ et } F_2 = b^{-1}B_+ \sqcup B_- \ .$$

Si l'on souhaite formaliser cette notion, on introduit la définition suivante :

Définition 7 : Une **décomposition paradoxale** à gauche de G est un triplet $(K, (A_k)_{k\in K}, (B_k)_{k\in K})$ où $K \subset G$ est un sous-ensemble fini de G et $(A_k)_{k\in K}$, $(B_k)_{k\in K}$ sont des familles de sous-ensembles de G vérifiant :

$$G = \left(\bigsqcup_{k\in K} kA_k\right) \bigsqcup \left(\bigsqcup_{k\in K} kB_k\right) = \bigsqcup_{k\in K} A_k = \bigsqcup_{k\in K} B_k \ .$$

Remarque : *On peut définir de façon similaire les décompositions paradoxales à droite. On remarque alors que* $(K, (A_k)_{k\in K}, (B_k)_{k\in K})$ *est une décomposition paradoxale à droite de* G *si et seulement si* $(K^{-1}, (A^{-1}_{k^{-1}})_{k\in K^{-1}}, (B^{-1}_{k^{-1}})_{k\in K^{-1}})$ *est une décomposition paradoxale à gauche de* G.

La propriété de G qui va nous intéresser sera donc le fait d'admettre une décomposition paradoxale (indifféremment à droite ou à gauche).

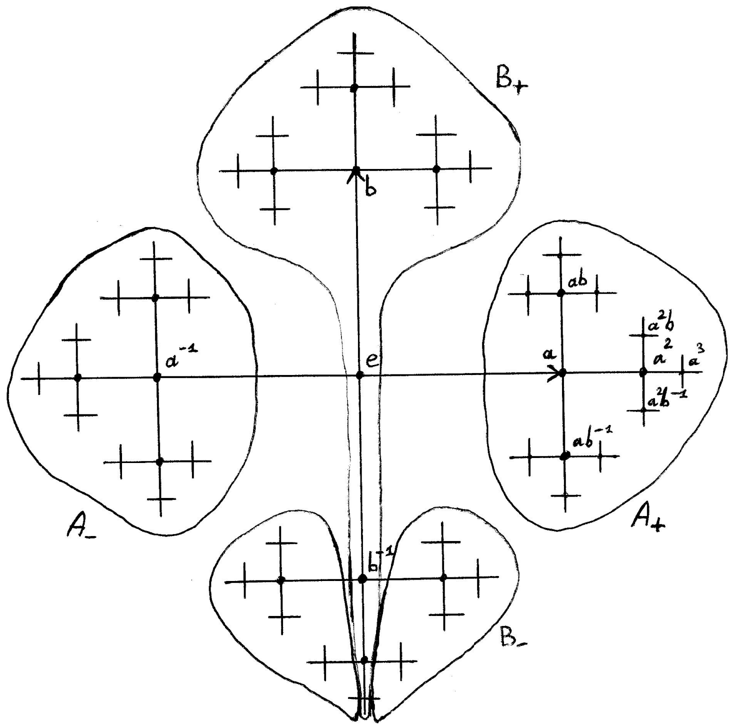

FIGURE 2.2 – Partition $F_2 = A_+ \sqcup A_- \sqcup B_+ \sqcup B_-$.

Exemple : Dans l'exemple de F_2 traité précédemment, on a :
· $K = \{e, a, b\}$;
· $A_e = A_-$, $A_a = a^{-1}A_+$ et $A_b = \emptyset$;
· $B_e = B_-$, $B_a = \emptyset$ et $B_b = b^{-1}B_+$.

Il est à noter que les ensembles A_k et B_k peuvent tout à fait être vides pour convenir au formalisme de la définition.

2.2.2 Aucun groupe admettant une décomposition paradoxale n'est moyennable

Si l'on suppose que le groupe G est moyennable et admet une décomposition paradoxale, on aboutit rapidement à une contradiction.

Lemme 2 : *Soit G un groupe. Si G admet une décomposition paradoxale, alors G n'est pas moyennable.*

Démonstration : Soit G un groupe admettant une décomposition paradoxale (à gauche) $(K, (A_k)_{k\in K}, (B_k)_{k\in K})$. Par l'absurde, supposons qu'il existe $m : l^\infty(G) \to \mathbb{R}$ une moyenne invariante sur G.

Alors :

$$\begin{aligned}
1 = m(\mathbb{1}) &= m\left(\sum_{k\in K}(\mathbb{1}_{kA_k} + \mathbb{1}_{kB_k})\right) \qquad \text{car } G = \left(\bigsqcup_{k\in K} kA_k\right)\bigsqcup\left(\bigsqcup_{k\in K} kB_k\right)\\
&= \sum_{k\in K}\left(m(\mathbb{1}_{kA_k}) + m(\mathbb{1}_{kB_k})\right) \qquad \text{par linéarité de } m\\
&= \sum_{k\in K}\left(m(k\mathbb{1}_{A_k}) + m(k\mathbb{1}_{B_k})\right)\\
&= \sum_{k\in K}\left(m(\mathbb{1}_{A_k}) + m(\mathbb{1}_{B_k})\right) \qquad \text{par invariance de } m\\
&= m\left(\sum_{k\in K}\mathbb{1}_{A_k}\right) + m\left(\sum_{k\in K}\mathbb{1}_{B_k}\right) \qquad \text{par linéarité de } m\\
&= m(\mathbb{1}) + m(\mathbb{1}) \qquad \text{car } G = \bigsqcup_{k\in K} A_k = \bigsqcup_{k\in K} B_k\\
&= 2
\end{aligned}$$

Ce qui est absurde. Ainsi, G n'est pas moyennable.

□

2.2.3 Exemples de groupes non moyennables

Le lemme 2 nous permet d'obtenir des exemples de groupes qui ne sont pas moyennables. En particulier, on a vu au paragraphe 2.2.1 que le groupe libre à deux générateurs admet une décomposition paradoxale, donc celui-ci n'est pas moyennable.

Plus généralement, on a le fait suivant, dû à J. von Neumann :

Proposition : *Si un groupe G contient un sous-groupe isomorphe à F_2, alors G possède une décomposition paradoxale et n'est donc pas moyennable.*

Démonstration : Soit H un sous-groupe de G isomorphe à F_2. H possède donc une décomposition paradoxale (à gauche) $(K, (A_k)_{k\in K}, (B_k)_{k\in K})$.

Soit R un système de représentants des classes à droite modulo H de G. On a donc $G = \bigsqcup_{r\in R} Hr$. Alors $(K, (A_kR)_{k\in K}, (B_kR)_{k\in K})$ est une décomposition paradoxale pour G. En effet :

$$\bigsqcup_{k\in K} A_kR = \left(\bigsqcup_{k\in K} A_k\right)\cdot R = HR = G \quad \text{et} \quad \bigsqcup_{k\in K} B_kR = \left(\bigsqcup_{k\in K} B_k\right)\cdot R = G$$

et l'on a également :

$$\begin{aligned}
\left(\bigsqcup_{k\in K} kA_kR\right)\bigsqcup\left(\bigsqcup_{k\in K} kB_kR\right) &= \left(\left(\bigsqcup_{k\in K} kA_k\right)\cdot R\right)\bigsqcup\left(\left(\bigsqcup_{k\in K} kB_k\right)\cdot R\right)\\
&= \left(\left(\bigsqcup_{k\in K} kA_k\right)\bigsqcup\left(\bigsqcup_{k\in K} kB_k\right)\right)\cdot R\\
&= HR = G
\end{aligned}$$

Donc G n'est pas moyennable d'après le lemme 2.

$\square$

Exemple : Cette proposition nous fournit tout un éventail de groupes non moyennables, contenant par exemple :

- $F_2 \times \mathbb{Z}$;
- $F(X)$ le groupe libre généré par un ensemble X contenant plus de deux éléments ;
- $SL_2(\mathbb{Z})$, dont le sous-groupe $\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rangle$ est isomorphe à F_2 ;
- $SO_3(\mathbb{R})$, dont la décomposition paradoxale permet d'aboutir au "paradoxe" de Banach-Tarski évoqué en introduction.

Chapitre 3

Le lemme des mariages : un outil issu de la théorie des graphes

Dans ce chapitre, nous allons introduire puis démontrer un résultat que nous utiliserons dans le dernier chapitre pour la démonstration du théorème de Banach-Tarski. Ce résultat est le lemme des mariages. Il retranscrit le fait suivant : si l'on considère deux ensembles X et Y d'individus (en nombre égal) que l'on souhaite marier deux à deux (un X avec un Y), et que l'on dresse une liste de tous les mariages consentis bilatéralement, alors on peut trouver un schéma de mariage attribuant à chaque individu un conjoint approuvé (et consentant), dès lors que la condition minimale suivante est vérifiée : pour tout sous-ensemble A d'individus de X, les conjoints possibles (i.e. approuvés et consentants) des individus de A sont au total plus nombreux que les individus dans A.

3.1 Prérequis de théorie des graphes

Introduisons tout d'abord quelques notions élémentaires de théorie des graphes, qui nous seront utiles pour exprimer formellement et démontrer le lemme des mariages.

3.1.1 Premières définitions

Définition 8 : Un **graphe biparti** est un triplet $G = (X, Y, E)$ où X, Y sont des ensembles dont les éléments sont appelés **sommets**, et $E \subset X \times Y$ est appelé ensemble des **arêtes**.

Dans l'interprétation matrimoniale, l'ensemble E va correspondre à l'ensemble des mariages consentis bilatéralement.

Remarques : *Soit $G = (X, Y, E)$ un graphe biparti.*

(1) *Un* **sous-graphe** *de G est un triplet $G' = (X', Y', E')$ tel que $X' \subset X$, $Y' \subset Y$ et $E' \subset E \cap (X' \times Y')$. C'est encore un graphe biparti.*

(2) *Deux arêtes* $a_1, a_2 \in E$ *sont dites* **adjacentes** *si elles ont un sommet commun.*

(3) *Pour* $x \in X$, $y \in Y$, *on définit les* **voisinages** *:*
— *à droite de* x : $\mathcal{N}_D(x) := \{y' \in Y | (x, y') \in E\}$;
— *à gauche de* y : $\mathcal{N}_G(y) := \{x' \in X | (x', y) \in E\}$.
Et si $A \subset X$, $B \subset Y$, *on définit aussi :*

$$\mathcal{N}_D(A) = \bigcup_{a \in A} \mathcal{N}_D(a) \quad et \quad \mathcal{N}_G(B) = \bigcup_{b \in B} \mathcal{N}_G(b)$$

(4) *Le graphe* G *est dit* **fini** *si* X *et* Y *le sont, il est dit* **localement fini** *si pour tous* $x \in X$ *et* $y \in Y$, $\mathcal{N}_D(x)$ *et* $\mathcal{N}_G(y)$ *sont finis.*

3.1.2 Mariages

Soit $G = (X, Y, E)$ un graphe biparti.

Définition 9 : On appelle **mariage** de G tout ensemble $M \subset E$ d'arêtes deux à deux non adjacentes, c'est-à-dire tel que les applications $p : (x, y) \in M \mapsto x$ et $q : (x, y) \in M \mapsto y$ sont injectives sur M.

De plus, le mariage M est dit :
— **parfait à droite** si pour tout $y \in Y$, il existe $x \in X$ tel que $(x, y) \in M$ (c'est-à-dire si $p : M \to X$ est bijective) ;
— **parfait à gauche** si pour tout $x \in X$, il existe $y \in Y$ tel que $(x, y) \in M$ (c'est-à-dire si $q : M \to Y$ est bijective) ;
— **parfait** si M est parfait à droite et à gauche.

Proposition : *Si* G *admet un mariage parfait à droite et un mariage parfait à gauche, alors* G *admet un mariage parfait.*

Démonstration : Soient $M_D, M_G \subset E$ les mariages parfaits, à droite et à gauche respectivement. Posons $\overline{M} := M_D \cup M_G$ et considérons la relation d'équivalence $\sim$ sur $\overline{M}$ définie par :

$$\forall a, a' \in \overline{M} \ : \quad a \sim a' \iff \exists a = a_0, a_1, \cdots, a_n = a' \text{ tels que } \forall i \in [\![0; n-1]\!], \\ a_i \in \overline{M} \text{ et } a_i, a_{i+1} \text{ sont adjacentes.}$$

À présent, si $A \in \overline{M}/\sim$, il y exactement trois situations possibles (moyennant ré-indexation) :

1. $A = \{a\}$ est composé d'une arête isolée, on pose alors $M(A) := \{a\}$;
2. A est un cycle de longueur paire $2k$ ($k \in \mathbb{N}^*$) ;
3. A est une chaîne infinie à droite et/ou à gauche.

· Dans le cas 2., on peut écrire

$$A = \{(x_1, y_1), \cdots, (x_k, y_k)\} \ \cup \ \{(x_2, y_1), \cdots, (x_n, y_{n-1}), (x_1, y_n)\} \ .$$

Posons alors :

$$M(A) := \{(x_i, y_i) \mid i \in [\![1; k]\!]\} \subset A \ ;$$

· Dans le cas 3., on peut écrire $A = \{(x_i, y_i) \mid i \in \mathbb{Z}\} \cup \{(x_i, y_{i+1}) \mid i \in \mathbb{Z}\}$ (chaîne infinie des deux côtés) et on pose :

$$M(A) := \{(x_i, y_i) \mid i \in \mathbb{Z}\} \subset A\ ;$$

ou bien on peut écrire $A = \{(x_i, y_i) \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{(x_i, y_{i+1}) \mid i \in \mathbb{N}\}$ (chaîne infinie d'un seul côté) et on pose alors :

$$M(A) := \{(x_i, y_i) \mid i \in \mathbb{N}\} \subset A\ .$$

Posons enfin $M := \coprod_{A \in \overline{M}/\sim} M(A)$. Par construction des $M(A)$, et comme les classes d'équivalence pour $\sim$ forment une partition de $\overline{M}$, on a que M est un mariage parfait pour G.

□

Remarque : *On peut retranscrire l'existence de mariages parfaits en termes d'injectivité ou de bijectivité de fonctions :*

(1) *$M \subset E$ est une correspondance parfaite à droite $\iff$ il existe $\varphi : Y \to X$ injective telle que $M = \{(\varphi(y), y) \mid y \in Y\}$;*

(2) *$M \subset E$ est une correspondance parfaite à gauche $\iff$ il existe $\psi : X \to Y$ injective telle que $M = \{(x, \psi(x)) \mid x \in X\}$;*

(3) *$M \subset E$ est une correspondance parfaite $\iff$ il existe $\varphi : Y \to X$ bijective telle que $M = \{(\varphi(y), y) \mid y \in Y\}$.*

En reformulant la proposition précédente avec ce point de vue, on retrouve un célèbre résultat de théorie des ensembles : le théorème de Cantor-Bernstein.

Théorème 3 : [Cantor-Bernstein] *Soient X et Y deux ensembles tels qu'il existe $f : X \to Y$ injective et $g : Y \to X$ injective. Alors il existe une application $h : X \to Y$ bijective.*

3.2 Lemme des mariages et lemme des harems

3.2.1 Conditions de Hall

Les conditions de Hall sont la traduction formelle de la "condition minimale" (évoquée en introduction du chapitre) pour obtenir l'existence d'un schéma de mariages parfaits.

Définition 10 : Soit $G = (X, Y, E)$ un graphe biparti. On dit que G vérifie :

(i) la **condition de Hall à gauche** si pour tout $A \subset X$ fini, $|\mathcal{N}_D(A)| \geq |A|$;

(ii) la **condition de Hall à droite** si pour tout $B \subset Y$ fini, $|\mathcal{N}_G(B)| \geq |B|$;

(iii) les **conditions de mariage de Hall** si G satisfait aux conditions de Hall à droite et à gauche.

3.2.2 Le lemme des mariages

Théorème 4 : [Lemme des mariages] *Soit $G = (X, Y, E)$ un graphe biparti localement fini. Il y a équivalence entre :*

(1) *G vérifie les conditions de mariage de Hall ;*

(2) *G admet un mariage parfait.*

Remarques : (1) *L'hypothèse "G localement fini" est essentielle. En effet, $G := (X = \mathbb{N}, Y = \mathbb{N}, E)$ où $E = \{(0, n+1) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{(n+1, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est un graphe biparti vérifiant les conditions de mariage de Hall. Pourtant, pour tout $M \subset E$, M ne peut être parfait à gauche car si c'était le cas, on aurait $(0, n) \in M$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$ et alors $n + 1 \in X$ ne pourrait être apparié à aucun élément de Y via M (voir figure 3.1). Cet écueil provient du fait que G n'est pas localement fini : $|\mathcal{N}_D(0)| = +\infty$.*

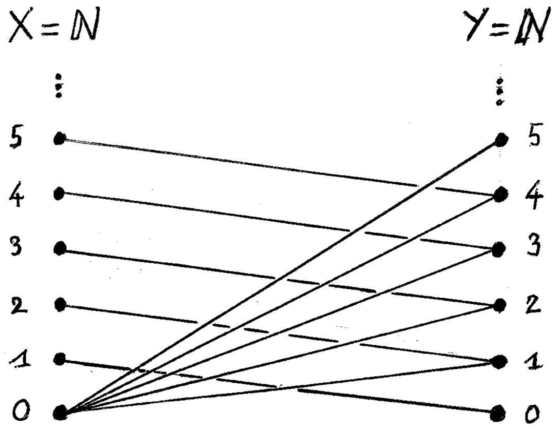

FIGURE 3.1 – Contre-exemple de graphe ne vérifiant pas l'hypothèse "localement fini".

(2) *On remarque aisément que si G admet un mariage parfait, alors G vérifie nécessairement les conditions de mariage de Hall. Ainsi, le lemme des mariages est une conséquence directe du fait suivant :*

Lemme 3 : *Soit $G = (X, Y, E)$ un graphe biparti localement fini. Si G vérifie la condition de Hall à gauche (resp. à droite) alors G admet un mariage parfait à gauche (resp. à droite).*

Démonstration : Les rôles de X et Y dans G sont symétriques. Aussi nous ne démontrerons que le cas où G satisfait à la condition de Hall à gauche, l'autre cas étant strictement similaire.

$\star$ **Cas où X est fini :** on procède par récurrence sur $|X|$.

Si $|X| = 1$, il suffit de prendre $M = \{a\}$ avec $a \in E$ dont l'existence nous est donnée par la condition de Hall à gauche.

Fixons à présent $|X| = n + 1$, $n \in \mathbb{N}$. Supposons que pour tout graphe $G' = (X', Y', E')$ tel que $|X'| = n$ et vérifiant la condition de Hall à gauche, G' admette un mariage parfait à gauche.

Soit $x_0 \in X$. Alors $|\mathcal{N}_D(x_0)| \geq 1$, donc on peut choisir $y_0 \in \mathcal{N}_D(x_0)$.

Pour $X' = X \setminus \{x_0\}$, on définit le graphe $G' = (X', Y, E')$ en posant $E' = \{(x, y) \in E \mid x \in X'\}$. G' vérifie alors la condition de Hall à gauche, et $|X'| = n$. Notons M' le mariage parfait à gauche donné par l'hypothèse de récurrence. De plus, nous noterons :

$$p \ : \ \begin{array}{ccc} M' & \to & X' \\ (x,y) & \mapsto & x \end{array} \quad \text{et} \quad q \ : \ \begin{array}{ccc} M' & \to & Y \\ (x,y) & \mapsto & y \end{array} .$$

q est bijective sur M' car il s'agit d'un mariage.

À présent, nous allons procéder algorithmiquement pour construire le mariage parfait à gauche pour G.

- Si $q(M')$ ne contient pas y_0, alors c'est fini : $M := M' \cup \{(x_0, y_0)\}$ est un mariage parfait à gauche pour G.
- Sinon, on pose $x_1 := p(q^{-1}(y_0))$. $|\mathcal{N}_D(\{x_0, x_1\})| \geq 2$ donc il existe $y_1 \in Y$, $y_1 \neq y_0$ tel qu'on a soit $(x_0, y_1) \in E$, soit $(x_1, y_1) \in E$, c'est-à-dire tel que $\exists \sigma_0 \in \mathfrak{S}_2$, $\forall i \in \{0, 1\}$, $(x_i, y_{\sigma_0(i)}) \in E$ (où $\mathfrak{S}_r$ désigne l'ensemble des permutations de $\{0, \cdots, r-1\}$).

On itère ensuite le processus. L'étape k de l'algorithme s'écrit :

- Si $q(M') \setminus \{y_0, \cdots, y_{k-1}\}$ ne contient pas y_k, alors l'algorithme est fini :

  $$M := q^{-1}(q(M') \setminus \{y_0, \cdots, y_{k-1}\}) \cup \{(x_i, y_{\sigma_{k-1}(i)}) \mid i \in [\![0; k]\!]\}$$

  est un mariage parfait à gauche pour G par construction.
- Sinon, posons $x_{k+1} := p(q^{-1}(y_k))$. Alors $x_{k+1} \neq x_0$ car $x_0 \notin p(M')$, et $x_{k+1} \notin \{x_1, \cdots, x_k\}$ car $y_k \notin \{y_0, \cdots, y_{k-1}\}$. Ainsi, par la condition de Hall à gauche, $|\mathcal{N}_D(\{x_0, \cdots, x_{k+1}\})| \geq k+2$. Donc il existe $y_{k+1} \in Y \setminus \{y_0, \cdots, y_k\}$ et $\sigma_k \in \mathfrak{S}_{k+2}$ tels que $\forall i \in [\![0; k+1]\!]$, $(x_i, y_{\sigma_k(i)}) \in E$.

Si l'algorithme termine avant l'étape $n-1$, c'est gagné. Sinon, à l'étape n-1 : $|\mathcal{N}_D(\{x_0, \cdots, x_n\})| = |\mathcal{N}_D(X)| \geq n+1$, donc il existe $y_n \in Y \setminus \{y_0, \cdots, y_{n-1}\}$ et $\sigma_{n-1} \in \mathfrak{S}_{n+1}$ tels que $\forall i \in [\![0; n]\!]$, $(x_i, y_{\sigma_{n-1}(i)}) \in E$. En posant alors

$$M := \{(x_i, y_{\sigma_{n-1}(i)}) \mid i \in [\![0; n]\!]\} ,$$

on obtient bien un mariage parfait à gauche.

Ceci conclut la preuve du cas $|X|$ fini.

$\star$ **Cas où X est infini :** nous allons utiliser un argument topologique.

On munit Y et tous ses sous-ensembles de la topologie discrète. En particulier, comme G est localement fini, les $\mathcal{N}_D(x)$ pour $x \in X$ sont finis donc compacts.

Posons $K := \prod_{x \in X} \mathcal{N}_D(x)$. Par le théorème de Tykhonov, K est compact pour la topologie produit, c'est-à-dire la topologie la moins fine rendant toutes les projections $\pi_x \ : \left(\begin{array}{ccc} K & \to & \mathcal{N}_D(x) \\ (z_{x'})_{x' \in X} & \mapsto & z_x \end{array} \right)$ continues.

Posons $\mathcal{F} := \{F \subset X \mid F \neq \emptyset \text{ et } |F| < +\infty\}$ et considérons pour tout $F \in \mathcal{F}$ l'ensemble $C(F) := \{z \in K \mid \forall x_1 \neq x_2 \in F,\ \pi_{x_1}(z) \neq \pi_{x_2}(z)\}$ des éléments de K (vus comme fonctions de X dans Y) injectifs sur F.

Soit $F \in \mathcal{F}$.

· $C(F)$ est fermé dans K. En effet on peut le réécrire :

$$C(F) = \bigcap_{\substack{x_1,x_2\in X\\ x_1\neq x_2}} K \setminus K(x_1,x_2) \quad \text{où} \quad K(x_1,x_2) := \{z \in K \mid \pi_{x_1}(z) = \pi_{x_2}(z)\} .$$

Et $K(x_1,x_2) = \bigcup_{y\in Y}(\pi_{x_1}^{-1}(\{y\}) \cap \pi_{x_2}^{-1}(\{y\}))$ est ouvert (comme réunion d'intersections finies d'ouverts) car π_{x_1} et π_{x_2} sont continues. Donc $C(F)$ est fermé dans K comme intersection de fermés.

· $C(F) \neq \emptyset$. En effet, notons $G' = (X', Y', E')$ avec $X' := \mathcal{F}$, $Y' := \mathcal{N}_D(F)$ et $E' := E \cap (X' \times Y')$. G' est fini et vérifie la condition de Hall à gauche (car G la vérifie), donc d'après le cas fini il existe un mariage parfait à gauche pour G'. Autrement dit, il existe $\varphi : X' \to Y'$ injective. Par ailleurs, $\forall x \in X$, $|\mathcal{N}_D(x)| \geq 1$ donc il existe un élément $\psi(x) \in \mathcal{N}_D(x)$. Si on pose pour tout $x \in X$, $\phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \in F \\ \psi(x) & \text{sinon} \end{cases}$, alors $(\phi(x))_{x\in X}$ est un élément de $C(F)$.

Par ailleurs, pour tous $F_1, \cdots, F_n \in \mathcal{F}$, $C(F_1) \cap \cdots \cap C(F_n)$ est non vide car $C(F_1 \cup \cdots \cup F_n) \subset C(F_1) \cap \cdots \cap C(F_n)$. Ainsi, $(C(F))_{F\in\mathcal{F}}$ est une famille de fermés de K dont toute sous-famille finie possède une intersection non vide. Comme K est compact, on en déduit que $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} C(F) \neq \emptyset$, c'est-à-dire qu'il existe $z_0 \in \bigcap_{F\in\mathcal{F}} C(F)$. En particulier, $\forall x_1 \neq x_2 \in X$, $\pi_{x_1}(z_0) \neq \pi_{x_2}(z_0)$.

Alors $M := \{(x, \pi_x(z_0))|x \in X\}$ est un mariage parfait à gauche pour G.

□

3.2.3 Une conséquence : le lemme des harems

Le résultat dont nous avons besoin pour démontrer le théorème de Banach et Tarski n'est pas exactement le lemme des mariages, mais une généralisation de celui-ci : le lemme des harems. Le problème sous-jacent est le même que pour le lemme des mariages, à la différence près que l'on cherche à attribuer à chaque individu de X k partenaires issus de Y.

Soient $G = (X, Y, E)$ un graphe biparti et $k \in \mathbb{N}^*$.

Définition 11 : $M \subset E$ est appelé **(1,k)-harem parfait** si :

(1) Pour tout $x \in X$, il existe exactement k $y \in Y$ distincts tels que $(x, y) \in M$;

(2) Pour tout $y \in Y$, il existe un unique $x \in X$ tel que $(x, y) \in M$.

Ces deux conditions équivalent à l'existence de $\psi : Y \to X$ surjective telle que chaque élément de Y possède exactement k antécédents par ψ.

Définition 12 : Si G est localement fini, on dit que G satisfait aux **conditions de k-harem de Hall** si pour tous $A \subset X$ et $B \subset Y$ finis, on a $|\mathcal{N}_D(A)| \geq k|A|$ et $|\mathcal{N}_G(B)| \geq \frac{1}{k}|B|$.

Théorème 5 : [Lemme des harems] *Si G est localement fini, alors il y a équivalence entre les propositions suivantes :*

(1) *G satisfait aux conditions de k-harem de Hall;*

(2) *G admet un $(1,k)$-harem parfait.*

Démonstration : L'implication (2) $\Rightarrow$ (1) est évidente. Pour (1) $\Rightarrow$ (2), considérons k copies de X, que nous noterons $X_1, \cdots, X_k$ (et que nous interprèterons comme distinctes), et notons pour tout $i \in [\![1;k]\!]$ la fonction de copie :

$$\begin{array}{rccc} \phi_i & : & X & \rightarrow & X_i \\ & & x & \mapsto & x \end{array}$$

On pose $G' = (X', Y, E')$ avec

$$X' := \coprod_{i=1}^{k} X_i \quad \text{et} \quad E' := \{(\phi_i(x), y) \mid (x,y) \in E,\ i \in [\![1;k]\!]\} \subset X' \times Y\ .$$

On notera les voisinages dans G' avec $\mathcal{N}'$ pour les distinguer de ceux dans G.

Soit $A' \subset X'$ de cardinal fini. On note

$$\overline{A'} := \{x \in X \mid \exists i \in [\![1;k]\!],\ \phi_i(x) \in A'\} \subset X$$

On a alors $|A'| \leq k|\overline{A'}|$ car $A' \subset \coprod_{i=1}^{k} \phi_i(\overline{A'})$. De plus, $\mathcal{N}'_D(A') = \mathcal{N}_D(\overline{A'})$. Enfin, par l'hypothèse on a $|\mathcal{N}_D(\overline{A'})| \geq k|\overline{A'}|$, il s'ensuit donc que

$$|\mathcal{N}'_D(A')| \geq |A'|\ .$$

Ainsi, G' vérifie la condition de Hall à gauche.

Par ailleurs, l'hypothèse nous donne également que G' vérifie la condition de Hall à droite. En effet, si $B \subset Y$ est fini, alors

$$|\mathcal{N}'_G(B)| = k|\mathcal{N}_G(B)| \geq \frac{k}{k}|B| = |B|\ .$$

Donc G' vérifie les conditions de mariage de Hall, et on peut lui appliquer le lemme des mariages : il existe un mariage parfait M' pour G'. Et alors

$$M := \{(x,y) \in E \mid \exists i \in [\![1;k]\!],\ (\phi_i(x), y) \in M'\}$$

est un $(1,k)$-harem parfait pour G'.

$\square$

Chapitre 4

Le théorème de Tarski et Følner

Le but de ce chapitre est de présenter et démontrer le théorème de Tarski et Følner. Ce théorème énonce que les deux conditions vues au chapitre 2, à savoir l'existence d'une suite de Følner (lemme 1) ou d'une décomposition paradoxale (lemme 2), sont en réalité des critères nécessaires et suffisants pour déterminer la moyennabilité ou la non-moyennabilité (respectivement) d'un groupe.

4.1 Énoncé du théorème

Théorème 6 : [Théorème de Tarski & Følner] *Soit G un groupe que nous supposerons dénombrable. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(a) *G est moyennable ;*

(b) *G vérifie les conditions de Følner ;*

(c) *G n'admet pas de décomposition paradoxale.*

Remarques : (1) *On pourrait se passer de l'hypothèse de dénombrabilité, le théorème resterait vrai, et la démonstration serait assez similaire (en remplaçant notamment les suites par des filets). Cependant nous avions défini les conditions de Følner sous cette hypothèse pour contourner certains détails techniques, et nous la conservons donc ici.*

(2) *Au chapitre 2, nous avons déjà vu deux des trois implications contenues dans ce théorème : $(b) \Rightarrow (a)$ (lemme 1) et $(a) \Rightarrow (c)$ (lemme 2). Il ne nous reste donc que l'implication $(c) \Rightarrow (b)$ à traiter, ce que nous allons faire dans la section suivante.*

4.2 La démonstration

G est un groupe supposé dénombrable. Pour démontrer l'implication $(c) \Rightarrow (b)$ du théorème 6, nous allons procéder par contraposition. Supposons que G ne vérifie pas les conditions de Følner.

Dans un premier temps, on observe le résultat suivant :

Lemme 4 : *Si G est un groupe ne vérifiant pas les conditions de Følner, alors on peut construire un sous-ensemble fini $K \subset G$ tel que pour tout sous-ensemble fini $F \subset G$, $|KF| \geq 2|F|$.*

Démonstration : Si G ne vérifie pas les conditions de Følner, alors il existe un sous-ensemble fini $K_0 \subset G$ et un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout sous-ensemble fini (non vide) F de G, il existe $k(F) \in K_0$ tel que $|F \setminus k(F)F| \geq \varepsilon|F|$.

Posons alors $K_1 := K_0 \cup \{1_G\}$. Pour tout sous-ensemble fini non vide F de G, on a alors $F \subset K_1F$ et $K_1F \setminus F = K_0F \setminus F$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
|K_1F| &= |K_1F \setminus F| + |F| \\
&= |K_0F \setminus F| + |F| \\
&\geq |k(F)F \setminus F| + |F| \\
&= |F \setminus k(F)F| + |F| \qquad \text{car } |k(F)F| = |F| \\
&\geq (\varepsilon + 1)|F|
\end{aligned}$$

À présent, comme $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(1+\varepsilon)^n \geq 2$. On peut alors poser $K := {K_1}^n$, et par récurrence immédiate :

$$|KF| = |{K_1}^nF| \geq (1+\varepsilon)|{K_1}^{n-1}F| \geq \cdots \geq (1+\varepsilon)^n|F| \geq 2|F| \ .$$

Ainsi, on a bien pour tout sous-ensemble fini $F \subset G$, $|KF| \geq 2|F|$.

□

Soit $K \subset G$ le sous-ensemble fini donné par le lemme : pour tout $F \subset G$ fini, on a $|KF| \geq 2|F|$. Cette propriété va nous permettre, par le biais du lemme des harems, d'exhiber une décomposition paradoxale de G. Considérons pour cela le graphe biparti $\mathcal{G} = (G, G, E)$ où $E := \{(g,h) \in G \times G \mid h \in Kg\}$.

Si $F \subset G$ est fini, alors en reprenant les notations du chapitre 3 on a $\mathcal{N}_D(F) = KF$ et $\mathcal{N}_G(F) = K^{-1}F$ (où $K^{-1} = \{k^{-1} | k \in K\}$). En particulier, $|\mathcal{N}_D(F)| \geq 2|F|$. Et si $k \in K$, $k^{-1}F \subset F$ donc :

$$|\mathcal{N}_G(F)| \geq |k^{-1}F| = |F| \geq \frac{1}{2}|F| \ .$$

Ainsi, $\mathcal{G}$ vérifie les conditions de 2-harem de Hall (définition 12) donc par le lemme des harems (théorème 5) il existe un $(1,2)$-harem parfait pour $\mathcal{G}$. Autrement dit, il existe une application surjective $\varphi : G \to G$ associant exactement deux antécédents à chaque élément de son image, et telle que pour tout $g \in G$, $(\varphi(g), g) \in E$, c'est-à-dire $g(\varphi(g))^{-1} \in K$.

On peut utiliser l'axiome du choix pour définir deux fonctions $\psi_1 : G \to G$ et $\psi_2 : G \to G$ qui à chaque élément de G associent l'un et l'autre de ses antécédents par φ. On a donc

$$\forall g \in G, \quad \psi_1(g) \neq \psi_2(g) \quad \text{et} \quad \varphi(\psi_1(g)) = \varphi(\psi_2(g)) = g \ .$$

En particulier, $G = \psi_1(G) \coprod \psi_2(G)$. De plus, pour tout $g \in G$, $\psi_1(g)g^{-1} \in K$ et $\psi_2(g)g^{-1} \in K$, c'est-à-dire :

$$\forall g \in G, \ \exists k_1(g), k_2(g) \in K, \ \psi_1(g) = k_1(g)g, \ \psi_2(g) = k_2(g)g \ .$$

Si on pose pour tout $k \in K$, $A_k := {k_1}^{-1}(\{k\})$ et $B_k := {k_2}^{-1}(\{k\})$, on a donc :

$$G = \psi_1(G) \coprod \psi_2(G) = \left(\coprod_{k \in K} k A_k \right) \coprod \left(\coprod_{k \in K} k B_k \right)$$

Et on a également :

$$G = \coprod_{k \in K} A_k = \coprod_{k \in K} B_k$$

Donc $(K, (A_k)_{k \in K}, (B_k)_{k \in K})$ est une décomposition paradoxale pour G.

Ceci termine la démonstration du théorème de Tarski et Følner.

$\square$

Bibliographie

[1] Tullio Ceccherini-Silberstein and Michel Coornaert. *Cellular Automata and Groups*, chapter 4. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010.

[2] Tullio Ceccherini-Silberstein and Michel Coornaert. *Cellular Automata and Groups*, chapter H. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010.

[3] Lawrence Bagget. *Functional Analysis*, chapter II. Marcel-Dekker, 1991.

[4] Wikipedia : Groupe Moyennable ; Paradoxe de Banach-Tarski.