Université Grenoble Alpes
Master1, mathématiques

Algèbre 1, examen

le 5 janvier 2021, de 9h à 12h

Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé. **Chaque réponse doit être justifiée**; *la qualité de la rédaction sera un élément d'appréciation des copies. On peut traiter toute question en admettant les résultats des questions précédentes.*

I Autour du cours

1.a) Justifier que le sous–anneau $\mathbb{Z}[X+Y+Z, XY+YZ+XZ, XYZ]$ de $\mathbb{Z}[X,Y,Z]$ est factoriel.

b) Le sous–anneau $\mathbb{R}[X^2, XY, Y^2]$ de $\mathbb{R}[X,Y]$ est-il factoriel?

2. Soit $L \supset k$ une extension de corps, et soit $\alpha \in L$ tel que $k[\alpha]$ soit un corps. Montrer que $k[\alpha]$ est de degré fini sur k.

3. Soient $L \supset k$ une extension de corps, et $P \neq X$ irréductible dans $k[X]$. Montrer que les racines de P dans L ont toutes le même ordre multiplicatif, fini ou infini.

4. Donner une construction du corps $\mathbb{F}_8$ comme corps de rupture sur $\mathbb{F}_2$. Donner la liste de ses sous–corps.

II

On dit qu'un élément x de $\mathbb{C}$ est un *entier algébrique* s'il existe $P \in \mathbb{Z}[X]$ *unitaire* tel que $P(x) = 0$. On note $\mathcal{O}$ l'ensemble des entiers algébriques.

Seule la première question de la partie A peut servir dans la partie B.

Partie A

1. Montrer que tout entier algébrique x est un nombre algébrique dont le polynôme minimal $I = \mathrm{Irr}(x, \mathbb{Q})$ appartient à $\mathbb{Z}[X]$.

2. Montrer que $\mathcal{O} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$.

On admet que $\mathcal{O}$ est un anneau.

3.a) Soit $x \in \mathbb{C}$. Montrer que si $x^2 \in \mathcal{O}$, alors $x \in \mathcal{O}$.

b) En déduire que $\mathcal{O}$ ne contient aucun élément irréductible.

c) L'anneau $\mathcal{O}$ est-il factoriel?

T.S.V.P.

4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\gamma_n = 2^{1/2^n}$.

a) Justifier que $\gamma_n \in \mathcal{O}$. Donner le degré de l'extension $\mathbb{Q}(\gamma_n) \supset \mathbb{Q}$.

b) Le polynôme $X^4 - \sqrt{2}$ est-il irréductible dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2})[X]$?

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note I_n l'idéal de $\mathcal{O}$ engendré par γ_n.

5.a) Montrer que la suite $(I_n)_n$ est strictement croissante *(pour montrer que $I_n \neq I_{n+1}$, on pourra considérer $x_n = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}$)*.

b) Qu'en déduit-on pour l'anneau $\mathcal{O}$?

Partie B On pose $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \sqrt{\alpha}$.

1. Vérifier que α est un entier algébrique.

On note Q son polynôme minimal sur $\mathbb{Q}$ et on pose $P = Q(X^2)$.

2. Expliciter P. Étudier si sa réduction modulo 2, puis modulo 3 est un polynôme irréductible de $\mathbb{F}_p[X]$ ($p = 2$ puis 3).

3. Montrer que P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. Quel est le degré de β sur $\mathbb{Q}$?

On note L le corps de décomposition de P sur $\mathbb{Q}$.

4. Décrire L et déterminer le degré de l'extension $L \supset \mathbb{Q}$.

5. Déterminer les automorphismes du corps $K = \mathbb{Q}(\beta)$.

6. *(Hors barème)* Montrer que le groupe $\mathrm{Aut}(L)$ possède un élément d'ordre 4.

III

1. Expliciter le polynôme cyclotomique Φ_7.

On note encore $\Phi_7 \in \mathbb{F}_{13}[X]$ la réduction de ce polynôme modulo 13, et on en note D un corps de décomposition.

2. Combien Φ_7 a-t-il de racines distinctes dans D? Montrer que ces racines engendrent toutes *le même* sous–groupe multiplicatif de $D^\times$.

3. Déterminer la valeur minimale de l'entier s tel que le groupe multiplicatif de l'extension $\mathbb{F}_{13^s}$ contient un élément d'ordre 7.

4.a) Quel est le degré sur $\mathbb{F}_{13}$ des racines de Φ_7?

b) Donner le degré et le nombre des polynômes irréductibles unitaires distincts dans la factorisation de Φ_7 dans $\mathbb{F}_{13}[X]$.

5. Quel est le corps de décomposition D?

T.S.V.P.

IV

Soit $n \geq 2$ et soit $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ non nul dans $\mathbb{Z}^n$. On note $d \geq 1$ le pgcd de $x_1, \ldots, x_n$ et N le $\mathbb{Z}$–sous–module de $\mathbb{Z}^n$ engendré par $\mathbf{x}$.

1. Trouver les facteurs invariants de la matrice colonne $C = {}^t(x_1 \ldots x_n)$.

2. Montrer que le $\mathbb{Z}$–module $\mathbb{Z}^n/N$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{n-1}$.

3. Dans cette question uniquement on suppose que $d = 1$. Le sous–module N admet-il un supplémentaire dans $\mathbb{Z}^n$?

4. On suppose que N admet un supplémentaire N' dans $\mathbb{Z}^n$.

a) En déduire la structure du $\mathbb{Z}$–module $\mathbb{Z}^n/N$ (on pourra considérer une projection convenable).

b) Que peut-on en déduire pour d?

5. On prend $n = 3$ et $\mathbf{x} = (4, 4, 14)$. Trouver une base de $\mathbb{Z}^3$ adaptée à N.

◇◇◇◇

Université Grenoble Alpes
Année 2020-2021

M1 Mathématiques générales
UE Fonctions holomorphes

Examen du mercredi 6 janvier 2021

Durée 3 heures. Documents, calculatrices et téléphones portables interdits. La notation tiendra compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Question de cours 1

On considère une fonction holomorphe $f : D^*(z_0, r) \to \mathbb{C}$, où z_0 est un nombre complexe, r un nombre réel strictement positif, et $D^*(z_0, r)$ le disque du plan complexe centré en z_0 et de rayon r, privé de z_0.

1. Donner une définition de chacune des natures possibles du point z_0 en tant que singularité de la fonction f.

Pour tout t dans $]0, r[$, on note $m(t) = \inf_{z \in D^*(z_0,t)} |f(z)|$ et $M(t) = \sup_{z \in D^*(z_0,t)} |f(z)|$.

2. Caractériser chacune des situations de la question 1 en termes des fonctions m et M.

Question de cours 2

1. Énoncer le principe des zéros isolés.

2. Donner un exemple de fonction holomorphe sur le disque unité, non nulle, et s'annulant une infinité de fois dans le disque unité.

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{C} \setminus \{1, 2\}$ par $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$.

Calculer le développement en série de Laurent de f sur chacun des trois domaines U_1, U_2 et U_3 suivants :

$$U_1 = \{z \in \mathbb{C} \,;\, |z| < 1\} \qquad U_2 = \{z \in \mathbb{C} \,;\, 1 < |z| < 2\} \qquad U_3 = \{z \in \mathbb{C} \,;\, |z| > 2\}$$

T.S.V.P.

Exercice 2

Pour tout $\varrho > 0$, on considère le chemin $\gamma(\varrho) : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ défini par $\gamma(\varrho)(t) = \varrho e^{it}$.

Pour tous $R > r > 0$, on note $\delta(r,R)$ un lacet parcourant dans le sens positif la frontière de la demi-couronne circulaire $\{\varrho e^{it} \; ; \; \varrho \in [r,R], \, t \in [0,\pi]\}$.

On considère les intégrales curvilignes $I(\varrho) = \displaystyle\int_{\gamma(\varrho)} \frac{e^{iz}}{z}\, dz$ et $J(r,R) = \displaystyle\int_{\delta(r,R)} \frac{e^{iz}}{z}\, dz$.

1. Calculer $J(r,R)$ pour tous $R > r > 0$.
2. Calculer la limite I_0 de $I(\varrho)$ quand $\varrho \to 0$.
3. Calculer la limite I_∞ de $I(\varrho)$ quand $\varrho \to \infty$.
4. Déduire de ce qui précède l'existence et la valeur de $I = \displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_0^R \frac{\sin x}{x} dx$.

Exercice 3

Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, de bord ∂U, et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction. On suppose que f tend vers l'infini au bord de U, au sens suivant :

(C) Pour tout point z de ∂U et pour toute suite $(z_n)_n$ de points de U telle que $z_n \to z$, $|f(z_n)| \to \infty$.

1. Donner un exemple d'ouvert borné U et de fonction f de classe C^∞ sur U vérifiant la condition (C).

Le but de l'exercice est désormais de montrer que la condition (C) n'est jamais vérifiée si U est borné et f holomorphe. Pour ce faire, on suppose que U est un ouvert borné connexe et que f est holomorphe sur U et vérifie (C), et on note $Z = \{z \in U \, ; \, f(z) = 0\}$ l'ensemble des zéros de f.

2. Dans cette question, on suppose que Z est vide. Utiliser la fonction $g = 1/f$ pour arriver à une contradiction.

3. Dans cette question, on suppose que Z est fini. On note $p(w) = \prod_{z\in Z} (w - z)$, pour tout w dans $\mathbb{C}$, en comptant les zéros avec leur ordre de multiplicité. Utiliser la fonction p pour se ramener au cas où Z est vide, et en déduire que Z ne peut pas être fini.

4. Dans cette question, on suppose que Z est infini. Montrer qu'il existe une suite (z_n) de points de Z et un point z_∞ de U tels que $z_n \to z_\infty$. En déduire que $f = 0$ sur U, donc de nouveau une contradiction.

5. Traiter le cas où l'ouvert borné U n'est pas connexe.

6. Préciser enfin si la condition (C) reste impossible pour un ouvert U non borné et une fonction holomorphe f.

Fin.

Université Grenoble Alpes	2020-2021
M1 Mathématiques générales	
EDO-EDP	Documents, notes, téléphones, etc. interdits

Examen terminal

Quelques conventions et formules explicites :
Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $(\mathcal{F}f)(k) = \hat{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ik\cdot x} f(x)dx$, où $k \cdot x$ désigne le produit scalaire de k et x dans $\mathbb{R}^d$. On notera $|x|^2 = x \cdot x$.
Si $H_t(x) := e^{-|x|^2/(4t)}/(4\pi t)^{d/2}$, où $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, alors $\hat{H}_t(k) = e^{-t|k|^2}/(2\pi)^{d/2}$.
Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ et $1 \leq p, q, r \leq \infty$ tels que $1/p + 1/q = 1 + 1/r$, alors $f \star g$ est bien définie, où le symbole $\star$ désigne la convolution, et $f \star g \in L^r(\mathbb{R}^d)$.
De plus, pour f et g convenables, $\widehat{f \star g} = (2\pi)^d \hat{f}\hat{g}$.

Exercice 1 On considère l'équation de Schrödinger non linéaire donnée par

$$\text{(NLS)} \qquad i\partial_t u = -\frac{1}{2}\Delta_x u + G|u|^2 u,$$

où l'inconnue est la fonction $u : \mathbb{R}^d_x \times \mathbb{R}_t \to \mathbb{C}$ de classe C^2, et $G \in \mathbb{R}^*$.

i) Montrer que si $(x,t) \mapsto u(x,t)$ est solution de (NLS), alors sont également solutions de (NLS) les fonctions ci-dessous :

a) $v(x,t) = e^{i\phi}u(x,t)$, où $\phi \in \mathbb{R}$

b) $v(x,t) = e^{-i(|b|^2 t/2 - b\cdot x)}u(x - bt, t)$, où $b \in \mathbb{R}^d$

c) $v(x,t) = \lambda u(\lambda x, \lambda^2 t)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

d) $v(x,t) = \overline{u}(x, -t)$.

ii) Supposons que u satisfait (NLS) et $u(x,t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d_x)$, uniformément en $t \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\|u(\cdot,0)\|_2 = \|u(\cdot,t)\|_2$.

Indication : Considérer la norme L^2 de u restreinte à une boule de rayon R.

iii) Pour $d = 1$, et $G = -\gamma$, $\gamma > 0$ vérifier que

$$u_0(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{e^{it/2}}{\cosh(x)}$$

est solution de (NLS).

iv) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme Q_k de degré $d(k) \leq k$ tel que

$$\left(\frac{1}{\cosh(x)}\right)^{(k)} = Q_k(\tanh(x))\frac{1}{\cosh(x)}.$$

En déduire que $u_0(x,t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d_x)$, uniformément en $t \in \mathbb{R}$.

Rappel : $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\tanh(x) = \sinh(x)/\cosh(x)$, $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$, $\cosh' = \sinh$ *et* $\sinh' = \cosh$.

v) Sous les hypothèses du point iii), et en utilisant le point i), construire à partir de u_0 une solution u_b de (NLS) dont le module satisfait l'équation de transport $\partial_t v + b\partial_x v = 0$ sur $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_t$, où $b \in \mathbb{R}$. **Tourner S.V.P.**

6

Exercice 2

Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. On considère l'équation

$$(\mathrm{C}) \qquad -\Delta u + u \star g = f$$

d'inconnue u.

i) Montrer qu'il existe une solution de (C) dans $H^2(\mathbb{R}^d)$ dont on calculera la transformée de Fourier. En déduire que cette solution est unique.

ii) On suppose ici que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Montrer qu'alors la solution u de (C) est de classe $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ et que pour tout $\beta \in \mathbb{N}^d$, $\lim_{x\to\infty} \partial_x^\beta u(x) = 0$.

Exercice 3

On considère l'EDO

$$(\mathrm{PP}) \qquad \begin{cases} x' = x(\alpha - \beta y) \\ y' = y(\delta x - \gamma) \end{cases}$$

où les fonctions inconnues x, y sont à valeurs positives ou nulles, et les constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont toutes strictement positives.

i) Vérifier l'existence et l'unicité locales des solutions.

ii) Donner la liste des points d'équilibre du système et exhiber des solutions explicites non triviales dont les courbes intégrales sont des droites.

iii) Ecrire l'équation linéarisée au point d'équilibre de coordonnées strictement positives et calculer les valeurs propres de la matrice correspondante. Caractériser la dynamique autour du point d'équilibre en terme de noeud, col, spirale, centre, etc...

iv) Montrer que la fonction $F(x,y) = -\alpha\ln(y) - \gamma\ln(x) + \delta x + \beta y$ définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ est une fonction de Lyapunov pour l'EDO (PP) et déterminer ses extrema et leur nature.

v) Montrer que les courbes intégrales de l'EDO (PP) issues de conditions initiales $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ sont compactes.

vi) Que peut-on dire des propriétés de stabilité du point fixe de coordonnées strictement positives ?

Exercice 4

On considère l'opérateur différentiel $L = \frac{d^2}{dt^2} - \mathrm{Id}$ et l'EDO inhomogène associée

$$(\mathrm{CB}) \qquad Ly(t) = y''(t) - y(t) = f(t)$$

où $t \in]0, b[$, $b > 0$, et $f \in C([0,b])$, et les conditions de bord dépendant de deux paramètres $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\Lambda_1 y = y(0) + \lambda y'(0), \quad \Lambda_2 y = y(b) + \mu y'(b).$$

i) Déterminer la solution générale de l'EDO $y''(t) - y(t) = 0$.

ii) Rappeler le critère d'existence et unicité de la solution du problème

$$(\mathrm{P}) \qquad Ly = f, \ \Lambda_1 y = A, \ \Lambda_2 y = B, \quad \text{où } A, B \in \mathbb{R}.$$

iii) Pour tout $b > 0$, déterminer l'ensemble des $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que le problème (P) admette une unique solution.

7

Semestre 1

M1 – Statistique – 2020/2021

Examen final
Durée : 2h

Tout matériel qui ne ressemblerait pas à un simple stylo ou à une feuille blanche (calculatrice, portable, note de cours...) est interdit. Si vous vous demandez si vous avez le droit d'avoir un objet sur la table, c'est qu'il est certainement interdit.
Les parties sont indépendantes. Si un résultat n'est pas démontré, il pourra être admis dans la question suivante.

1 Classique loi de Poisson (8 points)

Dans cet exercice, nous étudions la variable X suivant la loi de Poisson de paramètre inconnu $\theta^\star$ dont nous rappelons la densité définie pour tout $\theta > 0$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}_{\theta^\star}(X = n) = e^{-\theta^\star} \frac{\theta^{\star n}}{n!}.$$

1.1. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\theta}_n$.

1.2. Calculer l'espérance et la variance de $\widehat{\theta}_n$. L'estimateur est-il sans biais ? Est-il asymptotiquement sans biais ?

1.3. Montrer que $\widehat{\theta}_n$ est un estimateur UMVU.

1.4. Nous cherchons à tester :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 & : \theta^\star = 1, \\ \mathcal{H}_1 & : \theta^\star = 2. \end{cases}$$

En notant $q_{\mathcal{P}(n),1-\alpha}$ le quantile d'ordre $1-\alpha$ d'une loi de Poisson de paramètre n, montrer que le test avec la statistique $\sum_{i=1}^n X_i$ et la région de rejet de la forme $]q_{\mathcal{P}(n),1-\alpha}; +\infty[$ est uniformément plus puissant.

Indication : *Nous admettrons que si $\boldsymbol{X}$ est un n-échantillon de loi de Poisson de paramètre $\theta^\star$ alors $\sum_{i=1}^n X_i$ suit une loi de Poisson de paramètre $n\theta^\star$.*

2 Variance d'une loi gaussienne centrée (5.5 points)

Dans cet exercice, nous étudions un n-échantillon de loi normale $\mathcal{N}(0, \theta^\star)$ de variance $\theta^\star \in \mathbb{R}_+^\star$ inconnue.

2.5. Calculer les moments d'ordre $m \in \mathbb{N}$ de la loi.

8

2.6. En déduire la forme de $\widehat{\theta}_n$, l'estimateur basé sur le moment d'ordre 2. Donner la loi de $n\widehat{\theta}_n/\theta^\star$. En déduire un intervalle de confiance de niveau exactement $1-\alpha$ avec $\alpha \in [0,1]$ basé sur les quantiles de la loi.

2.7. Montrer que l'estimateur est asymptotiquement normal et donner la variance. À partir de cette loi, montrer que l'intervalle de la forme :

$$IC_{1-\alpha} = \left[\frac{\widehat{\theta}_n}{1+q_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{3}{n}}}; \frac{\widehat{\theta}_n}{1-q_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{3}{n}}}\right]$$

(défini sous une condition sur n que vous préciserez) est de niveau asymptotique $1-\alpha$.

3 Un peu d'originalité (6.5 points)

Dans cet exercice, nous étudions un n-échantillon de loi définie par la densité :

$$f_{\theta^\star}(x) = C_{\theta^\star}\left(1+\theta^\star \sin(x)\right)\mathbb{1}_{[0;2\pi]}(x) \text{ avec } C_{\theta^\star} > 0.$$

3.8. Donner l'ensemble Θ le plus grand possible des valeurs pouvant être prises par $\theta^\star$. Calculer la constante $C_{\theta^\star}$.

3.9. Calculer l'estimateur basé sur le moment d'ordre 1..

3.10. Donner la loi asymptotique de l'estimateur..

3.11. Calculer la fonction de répartition et proposer une procédure pour simuler les données basé sur un générateur de variables suivant une loi uniforme sur $[0;1]$..

4 Distance de Hausdorff (1 point bonus)

4.12. Soit $N \geq 2$, nous regardons la loi qui tire au hasard un sous-ensemble (non vide) de $\{1,\ldots,N\}$ de façon uniforme et nous prenons deux variables aléatoires indépendantes $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ qui suivent cette loi. Calculer la probabilité que $d_{Haus}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ soit égale à 0 où d_{Haus} est la distance de Hausdorff associée à la distance absolue dont nous rappelons la formule pour deux sous-ensemble A et B de $\{1,\ldots,N\}$:

$$d_{Haus}(A,B) = \min\left[\max_{a\in A}\min_{b\in B}|b-a|, \max_{b\in B}\min_{a\in A}|b-a|\right].$$

M1-Maths-Générales 2021
Algèbre 2

Examen, 10 mai 2021 ; durée 3h (3 pages)

Problème A ; Explorer un groupe grâce à ses représentations ($\simeq$ 14 pts)

Soit G un groupe **fini**, non-trivial, que l'on notera multiplicativement, de sorte que par exemple, l'élément neutre de G est désigné par 1. Le corps de base est $\mathbb{C}$.
On connait la table des caractères de G :

	1	a	b	c	d
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	3	0	-1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
χ_3	3	0	-1	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
χ_4	4	1	0	-1	-1
χ_5	5	-1	1	0	0

Q. 1. Identifier (en justifiant) l'abélianisé de G.

Q. 2. Identifier (en justifiant) l'ordre de G.

Q. 3. Montrer que toute représentation de dimension 3 de G est soit irréductible, soit d'image triviale.

Q. 4.

4-a. Justifier que si un groupe fini H possède un sous-groupe distingué N différent de H et $\{1\}$, alors il existe χ un caractère irréductible non-trivial de H, et $h \in H \setminus \{1\}$, tels que $\chi(1) = \chi(h)$.

4-b. En déduire que le groupe considéré G est simple. On admet que le groupe alterné $\mathfrak{A}_5$ est le seul groupe simple d'ordre 60.

Q. 5.

5-a. On considére la représentation canonique $(\sigma_{can}, \mathbb{C}^5)$ de $\mathfrak{A}_5$ sur l'espace d'action $\mathbb{C}^5$, obtenue par permutations des éléments de la base canonique (si $(e_1, \ldots, e_5)$ est la base canonique de $\mathbb{C}^5$, alors $\sigma_{can}(g)e_i = e_{g(i)}$).
Donner une base de l'orthogonal de l'orthogonal de $\mathrm{Vect}(1,1,1,1,1)$ dans $\mathbb{C}^5$. Montrer qu'il s'agit de l'espace d'action d'une sous-représentation de $(\sigma_{can}, \mathbb{C}^5)$, et que cette sous-représentation est irréductible. Identifier le caractère correspondant à cette sous-représentation.

5-b. Soit σ_4 la représentation de caractère χ_4. Donner des matrices des éléments $\sigma_4((1,2,3))$, et $\sigma_4((3,4,5))$, dans une base de l'espace d'action.

5-c. On rappelle que $\{(1,2,3),(3,4,5)\}$, engendre $\mathfrak{A}_5$. L'image de σ_4 dans $GL_4(\mathbb{C})$ est-elle un sous-groupe cristallisant de $GL_4(\mathbb{R})$ (c'est à dire un sous-groupe préservant un réseau de $\mathbb{R}^4$) ?

Q. 6.

6-a. Donner la liste des classes de conjugaison d'éléments de $\mathfrak{S}_5$ qui sont dans $\mathfrak{A}_5$.

6-b. Justifier que si deux éléments de $\mathfrak{A}_5$, conjugués dans $\mathfrak{S}_5$, ont un support qui contient au moins deux points fixes, ou bien au moins une transposition dans leur décomposition en cycles disjoints, alors ils sont conjugués dans $\mathfrak{A}_5$.

6-c. Donner la liste des classes de conjugaison de $\mathfrak{A}_5$, et pour chacune donner l'ordre des éléments de la classe.

Q. 7. On considère σ_2 la représentation de caractère χ_2. On indique que $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 2\cos(2\pi/5)+1$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 2\cos(4\pi/5)+1$.

7-a. En considérant les valeurs propres possibles des éléments $\sigma_2(g)$, et le caractère χ_2, donner les ordres des éléments des classes a, b, c, d.

7-b. Montrer que pour tout g dans la classe a, il existe un vecteur de $\mathbb{R}^3 (\subset \mathbb{C}^3)$ de norme 1 qui est fixé par $\sigma_2(g)$.

Q. 8. L'image de la représentation σ_2 dans $GL_3(\mathbb{C})$ est-elle un sous-groupe cristallisant de $GL_3(\mathbb{R})$?

Q. 9. Une analyse des sous-groupes de $\mathfrak{A}_5$ permet de montrer un résultat que l'on admet ici : si g est dans la classe a, et si v est un vecteur non-nul fixé par $\sigma_2(g)$, alors son stabilisateur est précisément $\langle g \rangle$. En déduire le cardinal de l'orbite de v par $\mathfrak{A}_5$.

♣♢♡♠

Second problème page suivante.

11

Problème B : Réseaux, formes quadratiques, et problème Diophantien. (Environ 7 points)

Q. 1. Soit R un réseau dans $\mathbb{R}^2$, et soit C un convexe compact dans $\mathbb{R}^2$ qui est symétrique par rapport à l'origine et de volume $> 4|det(R)|$. Le but de cette question est de montrer le théorème de Minkowski disant que C contient un point non nul de R.

1-a. Soit (e_1, e_2) une base de R, et $D = \{\lambda e_1 + \mu e_2,\ (\lambda, \mu) \in [0,2[\times[0,2[\}$. Justifier que chaque élément de $\mathbb{R}^2$ est équivalent modulo $2R$ à un unique élément de D.

1-b. On considère l'application $C \to D$ qui envoie chaque $c \in C$ sur l'unique élément de D équivalent à c modulo $2R$. Justifier que cette application n'est pas injective

1-c. Soient c_1, c_2 deux éléments de C équivalents modulo $2R$. Notant $c_2 = c_1 + 2r$ avec $r \in R$, justifier que $r \in C$.

Q. 2. Soient a, b, c trois entiers, tels que $q : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{q} & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \mapsto & ax^2 + bxy + cy^2 \end{array} \right.$ soit une forme quadratique définie positive.
Justifier que $a > 0$ et $4ac - b^2 > 0$.

Q. 3. Soit $m > 0$ et $d > 0$ deux entiers, et $R_{(d,m)} = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2, x \equiv dy[mod\, m]\}$.

3-a. Montrer que $R_{(d,m)}$ est un réseau de $\mathbb{R}^2$. Donner une base de $R_{(d,m)}$ et vérifier que $|det(R_{(d,m)})| = m$.

3-b. Montrer que si d vérifie que $q(d,1) \equiv 0[mod\, m]$, alors pour tout $(x,y) \in R_{(d,m)}$, $q(x,y) \equiv 0[mod\, m]$.

Q. 4. Soit $M > 0$ un réel, et $C_M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, q(x,y) \leq M^2\}$.

4-a. Quelle est la nature géométrique de C_M ?

4-b. Trouver $X : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & X(x,y) \end{array} \right.$ et $Y : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & Y(x,y) \end{array} \right.$ des formes linéaires telles que $(x,y) \in C_M$ si et seulement si $(X(x,y))^2 + (Y(x,y))^2 \leq M^2$. Donner le determinant de l'application linéaire $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (X(x,y), Y(x,y)) \end{array} \right.$.

4-c. Montrer que l'aire de C_M vaut $2\pi \times M^2/\sqrt{4ac - b^2}$.

Q. 5. En utilisant le théorème de Minkowski (première question) montrer que si $\sqrt{4ac - b^2} < \pi$ et s'il existe $d \in \mathbb{Z}$ tel que $q(d,1) \equiv 0[mod\, m]$, alors il existe $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $q(x,y) = m$.

FIN.

12

Examen Géométrie différentielle

11 mai 2021

Documents, calculatrices et téléphones portables interdits.
Dans la notation, il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.
Durée : 3h

Exercice 1 (Questions de cours)

1. Définir la torsion τ d'une courbe dans $\mathbb{R}^3$.
2. Enoncer le théorème de Whitney.
3. Définir une isométrie locale. Expliquer pourquoi il ne peut y avoir une isométrie locale entre une partie ouverte de la sphère et une partie ouverte du plan.

Exercice 2

1. Soit I un intervalle ouvert et f, $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions C^1 telles que $f^2 + g^2 = 1$. On définit θ_0 par $f(0) = \cos\theta_0$ et $g(0) = \sin\theta_0$. Ensuite on définit
$$\theta(t) = \theta_0 + \int_0^t (f(s)g'(s) - g(s)f'(s))ds.$$
Montrer que $f = \cos\theta$ et $g = \sin\theta$. Indication : on pourra montrer que $(f - \cos\theta)^2 + (g - \sin\theta)^2 = 0$ en montrant d'abord $(f\cos\theta + g\sin\theta)' = 0$.
2. Soit α une courbe de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. Montrer qu'elle possède une reparamétrisation C^1 de la forme
$$\alpha(t) = (r(t)\cos\theta(t), r(t)\sin\theta(t)).$$
3. On suppose maintenant que la courbe $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est fermée ($\alpha(a) = \alpha(b)$). Montrer que l'indice $\mathrm{ind}(\alpha) = \frac{\theta(b)-\theta(a)}{2\pi}$ est un entier.
4. Soit $\psi = \frac{udv-vdu}{u^2+v^2}$. Montrer que $\mathrm{ind}(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_\alpha \psi$.

Exercice 3 Soit α une courbe dans une surface $M \subset \mathbb{R}^3$ paramétrée en longueur d'arc. Soit E_1, E_2, E_3 un champ de repères adapté tel que E_1 restreint à α est égal à α' et ω_{ij} les formes de connexion associées au champ de repères E_1, E_2, E_3.

1. Montrer que α est une géodésique dans M si et seulement si $\omega_{12}(\alpha') = 0$.
2. Soient M, $\bar{M}$ deux surfaces dans $\mathbb{R}^3$ et $F : M \to \bar{M}$ une isométrie locale. Montrer que si α est une géodésique dans M, alors $F(\alpha)$ est une géodésique dans $\bar{M}$.

T.S.V.P.

Problème: Surfaces de révolution à courbure donnée

1. On considère une surface de révolution M donnée par la paramétrisation

$$x(u,v) = (g(u), h(u)\cos v, h(u)\sin v),\ u \in I,\ v \in [0, 2\pi[, \tag{1}$$

où I est un intervalle ouvert avec $0 \in I$ et g, h sont deux fonctions C^∞ et $h(u) > 0$ pour tout $u \in I$. On va supposer dans toute la suite que la courbe de profil $\alpha(u) = (g(u), h(u))$ est paramétrée en longueur d'arc. On appelle une telle paramétrisation canonique. La hauteur de la courbe de profil au point u est égale à $h(u)$.

   (a) Montrer que $g'^2(u) + h'^2(u) = 1$ pour tout $u \in I$.

   (b) Calculer la première et deuxième forme fondamentale de M.

   (c) En déduire que les deux courbures principales sont données par

$$k_\mu = -\begin{vmatrix} g' & h' \\ g'' & h'' \end{vmatrix}, \quad k_\pi = \frac{g'}{h}.$$

   (d) En déduire que la courbure de Gauss est donnée par $K = -\frac{h''}{h}$.

2. On se donne maintenant une fonction $K \in C(I;\mathbb{R})$.

   (a) Montrer que l'équation différentielle

$$h'' + Kh = 0 \tag{2}$$

   possède une solution $h \in C^2(I;\mathbb{R})$ avec $h(0) > 0$ et $|h'(0)| < 1$.

   (b) En déduire l'existence d'une surface de révolution avec une paramétrisation $x(u,v)$ canonique sur un intervalle ouvert $J \subset I$ contenant 0 avec courbure $K(u)$ au point $x(u,v)$. Indication : on pourra considérer la fonction

$$g(u) = \int_0^u \sqrt{1 - h'^2(t)}dt. \tag{3}$$

   (c) On considère maintenant le cas de la courbure positive constante, soit $K = \frac{1}{c^2}$, $c > 0$. On considère les fonctions

$$h(u) = a\cos(u/c),\ g(u) = \int_0^u \left(1 - \frac{a^2}{c^2}\sin^2(t/c)\right)^{1/2} dt.$$

      i. Expliquer pourquoi $x(u,v) = (g(u), h(u)\cos v, h(u)\sin v)$ est une paramétrisation canonique d'une surface de révolution à courbure constante K.

      ii. Dessiner la courbe de profil dans les cas $a = c$, $0 < a < c$ et $a > c$.

   (d) On considère maintenant le cas de la courbure constante négative $K = -\frac{1}{c^2}$, $c > 0$.

      i. Si $0 < a < c$, soit M_a la surface donnée par $h(u) = a\sinh(u/c)$, $u > 0$. Montrer que sa courbe de profil $(g(u), h(u))$ part de l'origine avec une pente $a/\sqrt{c^2 - a^2}$ et admet une hauteur maximale de $\sqrt{c^2 - a^2}$.

      ii. Si $a = c$, soit B la surface donnée par $h(u) = ce^{u/c}$, $u < 0$. Dessiner la surface. De quelle surface s'agit-il ?

      iii. Si $b > c$, soit M_b la surface donnée par $h(u) = b\cosh(u/c)$. Montrer que quand $|u|$ croît à partir de 0, la hauteur de sa courbe croît de b à $\sqrt{c^2 + b^2}$.

Université Grenoble Alpes
Institut Fourier
M1 Analyse fonctionnelle et analyse de Fourier

Examen de mai 2021
Durée : 3 heures

Exercice 1 (8 points)

Soit E un espace de Banach. et soit F un sous-espace vectoriel fermé de E. On dit qu'un sous-espace vectoriel G est un supplémentaire topologique de F (dans E) si

(i) G est fermé.

(ii) $F \cap G = \emptyset$ et $E = G + F$ (c'est à dire $E = F \oplus G$). .

On dit alors que F et G sont des supplémentaires topologiques dans E.Il faut utiliser dans la suite cette définition, pas celle vue en TD.

Nous allons montrer que dans certains cas, il existe un supplémentaire topologique.

1) Soit F de dimension finie. On note e_1, ...e_n une base de F et si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, on note $\Pi_i(x) = x_i$.

1a) Montrer que l'on peut prolonger Π_i en une forme linéaire continue P_i sur E tout entier.

1b) Conclure en considérant $G = \bigcap_{i=1}^n P_i^{-1}(\{0\})$.

2) Soit F un sous-espace vectoriel fermé de codimension finie, c'est à dire F admet un supplémentaire algébrique de dimension finie. Montrer que F admet un supplémentaire topologique.

3) On considère un cas particulier de 2). Soit $N \subset E'$ un sous-espace vectoriel de dimension finie p du dual de E. On considère f_1, ..., f_p une base de N et
$F = \{x \in E, f(x) = 0, \forall f \in N\}$.

3a) Montrer que F est fermé.

3b) On définit l'application $\phi : E \to \mathbb{R}^p$ par $\phi(x) = (f_1(x), ..., f_p(x))$. Montrer que ϕ est surjectire (Indication : raisonner par l'absurde et utiliser une version géométrique du théorème de Hahn-Banach).

3c) En déduire qu'il existe e_1, ...,e_p dans E tels que $f_i(e_j) = \delta_{i,j}$ où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker.

3d) Montrer que les e_j sont linéairement indépendants et que l'espace engendré par les e_j est un supplémentaire topologique de F.

4) Soit H un espace de Hilbert. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel fermé de E, alors F admet un supplémentaire topologique qui peut être identifié à
$F^* = \{f \in E', f(x) = 0, \forall x \in F\}$ (on pourra utiliser sans démonstration que F est fermé si et seulement si $H = F \oplus F^\perp$ où $F^\perp$ est l'orthogonal de F pour le produit scalaire de H)

5) Soient F et G deux supplémentaires topologiques dans l'espace de Banach E. En appliquant le théorème du graphe fermé, montrer que les projections P_F et P_G respectivement sur F et G sont continues sur E.

45

Exercice 2 (6 points)
Les deux questions sont indépendantes.
1) On pose $\Omega =]0,1[$ et on pose pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $f_\alpha(x) = x^\alpha$ pour $x \in \mathbb{R}$.
1a) Carectériser les α pour lesquels $f_\alpha \in L^2(\Omega)$.
1b) Caractériser les α pour lesquels f_α admet une dérivée faible dans $L^2(\Omega)$.
1c) Carctériser les α pour lesquels $f_\alpha \in W^{1,2}(\Omega)$.

2) On pose $\Omega =]0,1[$ et on note $C_c^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω..
2a) Montrer que si $f \in C_c^\infty(\Omega)$, pour tous x, $y \in \Omega$, on a

(1) $$|f(x) - f(x)| \leq ||f'||_{L^2(\Omega)}|x-y|^{1/2}$$

(On pourra utiliser que $f(x) - f(x) = \displaystyle\int_{[x,y]} f(t)dt$ si $x < y$).
2b) En utilisant la densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,2}(\Omega)$, montrer que l'estimation (1) est aussi vraie pour $f \in W^{1,2}(\Omega)$ et presque tous x, $y \in \Omega$.

Exercice 3 (6 points)
Notations : si $f \in L^1(\mathbb{R})$, on note $\hat{f}$ sa transformée de Fourier définie par $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x\xi} f(x)dx$ (cette définition ne change pas la formulation des résultats vus en cours).
Si $f \in L^2(\mathbb{R})$, on note $\mathcal{F}(f)$ sa transformée de Fourier. Ceci permettra d'éviter des confusions. La convolution se note par $*$.
1a) Montrer que si f, $g \in L^1(\mathbb{R})$, $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$ (presque partout).
1b) Montrer que si $\hat{f}$, $\hat{g}$ et fg sont dans $L^1(\mathbb{R})$, alors $\widehat{fg} = \hat{f} * \hat{g}$ (presque partout).
1c) Soient g, $h \in L^2(\mathbb{R})$. Laquelle des deux formules est vraie : $\mathcal{F}(g) * \mathcal{F}(h) = \widehat{gh}$ ou $\mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g) = \mathcal{F}(fg)$? On justifiera avec soin ses affirmations. On pourra utiliser la densité des fonctions de $C_c^\infty(\mathbb{R})$ dans L^2 et s'inspirer de la question 1b.
2) Pour $a > 0$, montrer que $\mathcal{F}(\chi_{[-a,a]})(x) = \dfrac{\sin(2\pi a x)}{\pi x}$ puis en déduire $\mathcal{F}(\sin x/x) = \pi\chi_{[-1/2\pi, 1/2\pi]}$.
On utilisera les questions 1c) et 2) dans la suite.
3) Pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, on pose

$$Pf(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x-y)\frac{\sin(y)}{y}dy.$$

3a) Montrer que Pf est bien définie.
3b) Montrer qu'il existe $g \in L^2(\mathbb{R})$ tel que $f = \mathcal{F}(g)$ puis que $Pf = \mathcal{F}(gh)$ (où h est la fonction indicatrice de $[-1/2\pi, 1/2\pi]$) et donc que $Pf \in L^2(\mathbb{R})$.
3c) En déduire que $||Pf||_2 \leq ||f||_2$ et que $P \circ P = P$. Qu'en déduire pour P ?

Université de Grenoble Alpes
Institut Fourier
M1 Analyse fonctionnelle
2020-2021

Examen de juin 2021

Sans document, ni calculatrice
Le barème est donné à titre indicatif
Durée : 3 heures

Exercice 1 [3 points]

1) Définir le dual X' d'un espace de Banach X (on précisera la norme sur X' et si X' est aussi un espace de Banach).
Soient X et Y deux espaces de Banach et soit $T : X \to Y$ une application linéaire continue. On admet qu'il existe une application linéaire continue $T^* : Y' \to X'$, appelée adjoint de T, telle que pour tout $\psi \in Y'$, tout $x \in X$, $(T^*(\psi))(x) = \psi(T(x))$.
2) Démontrer que si $T(X)$ est dense dans Y, alors l'adjoint T^* de T est injectif.
3) Réciproquement, montrer que si l'adjoint T^* de T est injectif, alors $T(X)$ est dense dans Y.
4) Dans le cas où $X = L^2([0,1])$ et $Y = L^1([0,1])$, donner un exemple (simple) dans lequel T^* est injectif mais T n'est pas surjectif.

Exercice 2 [2 points]

1) Enoncer le théorème du graphe fermé.
2) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré et soit $\phi : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable telle que pour toute fonction $f \in L^p(\Omega)$, $\phi.f \in L^p(\Omega)$. Démontrer que l'application $M_\phi : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ définie par $M_\phi(f) = \phi.f$ est continue (On pourra appliquer sans preuve que si la suite (g_n) tend vers g dans $L^p(\Omega)$, alors il existe une sous-suite (g_{n_k}) de (g_n) qui tend vers g presque partout).

Exercice 3 [6 points]

Soit (E, N) un espace de Banach de **dimension infinie**. On note $S_E = \{x \in E; N(x) = 1\}$ la sphère unité de E et $B_E = \{x \in E; N(x) \leq 1\}$ la boule unité fermée de E. Si $A \subset E$, on note $\overline{A}$ l'adhérence de A pour la topologie forte et $\overline{A}^w$ celle pour la topologie faible.
0) Rappeler la définition de la topologie faible. Donner une base de voisinage pour cette topologie.
1a) On fixe $x_0 \in B_E \setminus S_E$. Soit V_0 un voisinage (pour la topologie faible) de x_0. Comment écrire un voisinage faible V de x_0 contenu dans V_0 à l'aide d'un $\varepsilon > 0$ et de formes linéaires ϕ_1, ..., ϕ_n sur E ?
1b) Démontrer que si E est de dimension infinie et si ψ_1, ..., ψ_k est une famille finie de formes linéaires non nulles sur E, alors $\bigcap_{j=1}^k \mathrm{Ker}(\psi_j)$ n'est pas réduit au singleton $\{0\}$ (On pourra, par exemple, noter que pour tout $x \in E$ et tout j, $x = \left(x - \dfrac{\psi_j(x)}{\psi_j(x_j)} x_j\right) + \dfrac{\psi_j(x)}{\psi_j(x_j)} x_j$ pour un x_j bien choisi). En déduire qu'il existe $\tilde{x} \neq 0$ tel que $\tilde{x} \in \bigcap_{j=1}^n \mathrm{Ker}(\phi_j)$ où les ϕ_j sont donnés par la question précédente.
1c) On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = N(x_0 + t\tilde{x})$ (où $\tilde{x}$ est celui de la question 1b). Démontrer qu'il existe $t_0 > 0$ tel que $f(t_0) = 1$.
1d) On pose $x_1 = x_0 + t_0\tilde{x}$. Démontrer que $x_1 \in S_E$ puis que $x_1 \in V_0$.
1e) En déduire que l'adhérence faible de S_E est B_E (On admettra que B_E est fermé pour la topologie faible).
2a) Supposons que l'application $N : x \in E \to N(x) \in \mathbb{R}$ est continue pour la topologie faible. Montrer qu'alors $N(\overline{S_E}^w) \subset \{1\}$.

Exercice 4 [5 points]

Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{R}$, on définit $\tau_a f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par $(\tau_a f)(x) = f(x-a)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On munit $\mathbb{R}$ de la mesure de Lebesgue et de la tribu borélienne. On dit qu'un sous-espace fermé E de $L^2(\mathbb{R})$ est invariant par translation si $\tau_a f \in E$ pour tout $f \in E$ et tout $a \in \mathbb{R}$.

Le but de l'exercice est de démontrer que si E est un sous espace vectoriel fermé de $L^2(\mathbb{R})$ invariant par translation, alors il existe un borélien B de $\mathbb{R}$ tel que

$$E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \in L^2(\mathbb{R}), \hat{f} = 0 \text{ presque partout sur } B\},$$

où $\hat{f}(\xi) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi x.\xi} dx$ pour $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

1) Justifier que si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors la transformée de Fourier $\hat{f}$ est définie partout sur $\mathbb{R}$.

2) Enoncer sans démonstration le théorème de Plancherel. On notera $\hat{f}$ la transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$.

On notera dans la suite $e_a(x) = e^{2i\pi a.x}$.

On pose $F = \{\hat{f}; f \in E\}$ et on notera P_F la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{R})$ sur F (On admet que cette projection existe. Ceci vient en partie du fait que E est fermé).

3) Vérifier que si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\widehat{(\tau_a f)} = (\hat{f}) e_{-a}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, puis montrer que cela reste vrai si $f \in L^2(\mathbb{R})$ (On pourra utiliser la densité des fonctions de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$). Quelle propriété en déduit-on pour F ?

4) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $(u - P_F u) \perp (P_F v) e_a$ pour tous u, $v \in L^2(\mathbb{R})$.

5) Que signifie cette orthogonalité pour la transformée de Fourier de la fonction $w = (u - P_F u)\overline{P_F v}$? On commencera par justifier que $w \in L^1(\mathbb{R})$. En déduire que $w = 0$ presque partout.

6) Montrer en utilisant la question précédente que l'on a $u(\overline{P_F v}) = (P_F u)\overline{v}$ (presque partout) pour tous $u, \in v \in L^2(\mathbb{R})$.

7a) Donner un exemple de fonction $v_0 \in L^2(\mathbb{R})$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $v_0(t) \neq 0$. On fixe une telle fonction v_0 dans la suite.

7b) On pose $\phi(y) = \overline{\left(\frac{(P_F(v_0))(y)}{v_0(y)}\right)}$. En utilisant la question 5, montrer que $\phi(y) = 0$ ou $= 1$ pour presque tout $y \in \mathbb{R}$ (On pourra utiliser le fait que $P_F = P_F^2$).

8) Conclure.

Exercice 5 [2 points]

On pose $\Omega =]0, 1[$ et on pose pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $f_\alpha(x) = |x|^\alpha$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1) Donner la dëfinition d'une dérivée faible puis de l'espace de Sobolev $W^{1,2}(\Omega)$.

2) Carectériser les α pour lesquels $f_\alpha \in L^2(\Omega)$.

3) Caractériser les α pour lesquels f_α admet une dérivée faible dans $L^2(\Omega)$.

4) Carctériser les α pour lesquels $f_\alpha \in W^{1,2}(\Omega)$.

Exercive 6 [2 points]

Le but de l'exercice est de démontrer le théorème de Hahn-Banach en dimension finie. Pour cela, on considère E un espace vectoriel normé de dimension n (on notera $||x||$ la norme de $x \in E$), F un sous-espace vectoriel de E, et $u : F \to \mathbb{R}$ une forme linéaire sur F . On cherche une forme linéaire $v : E \to \mathbb{R}$ sur E qui prolonge u et telle que $|||u||| = |||v|||$.

1) On suppose que F est un hyperplan et on écrit $E = F \oplus \mathbb{R}e$ où $e \in E$.

1a) Montrer qu'il suffit de trouver $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in F$, tout $t \in \mathbb{R}$, $|u(x) + ta| \leq ||x + te||$.

1b) Conclure dans ce cas (on distinguera suivant le signe de t).

2) Traiter le cas général.

Université Grenoble Alpes
V. Beffara, J. Chevallier, C. Smadi

Année 2020–2021
Master M1MG

Processus Stochastiques — Examen final — 11 mai 2021

Exercice 1 — Inégalité de Hoeffding et concentration

1. Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On suppose que $M_0 = 0$ et on note pour tout $n \geq 0$, $D_n = M_{n+1} - M_n$. On suppose pour toute la suite qu'il existe $c > 0$ tel que $P(|D_n| \leq c) = 1$ pour tout $n \geq 0$.

   a. Soit $s > 0$. Montrer que si on définit, pour tout $n \geq 0$,
   $$N_n = \exp\left(sM_n - \sum_{i=1}^{n} \ln E(e^{sD_i} \mid \mathcal{F}_i)\right)$$
   (avec $N_0 = 1$) alors $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale positive pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   b. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$ et tout $s \geq 0$, $e^{sx} \leq \frac{1-x}{2}e^{-s} + \frac{1+x}{2}e^{s}$. En déduire que si X est une variable aléatoire réelle telle que $|X| \leq c$ p.s. et $E(X) = 0$, alors pour tout $s > 0$, on a
   $$E(e^{sX}) \leq \operatorname{ch}(cs) \leq e^{s^2c^2/2}.$$

   c. Montrer alors que $E(e^{sM_n}) \leq e^{ns^2c^2/2}$.

   d. En remarquant (et en prouvant !) que $P(M_n > t) \leq e^{-st}E(e^{sM_n})$, en déduire que
   $$P(M_n > t) \leq e^{-2t^2/(nc^2)}.$$

2. Soit $X_1, \ldots, X_n$ une suite de v.a. indépendantes à valeurs dans un espace mesurable $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ et soit $g : \mathcal{X}^n \to \mathbb{R}$ mesurable telle que pour tout $(x_1, \ldots, x_n)$ et tout $(x'_1, \ldots, x'_n)$ dans $\mathcal{X}^n$, on ait
   $$|g(x_1, \ldots, x_n) - g(x'_1, \ldots, x'_n)| \leq c \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{x_i \neq x'_i}.$$

   a. Montrer que $P(g(X_1, \ldots, X_n) - E(g(X_1, \ldots, X_n)) > t) \leq e^{-2t^2/(nc^2)}$
   (On pourra considérer $M_k = E(g(X_1, \ldots, X_n) \mid X_1, \ldots, X_k) - E(g(X_1, \ldots, X_n))$ pour tout $1 \leq k \leq n$ et $M_0 = 0$).

   b. Que dit le résultat précédent lorsque $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ et $g(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$?

Exercice 2 — Page Rank (basé sur des faits réels)

Une grande entreprise américaine veut mettre en ligne un moteur de recherche du web. Elle connaît parfaitement le contenu du web (chaque page, et chaque lien hypertexte d'une page vers l'autre), et souhaiterait ordonner les résultats d'une recherche en classant en premier les pages les "plus importantes." Pour ce faire, elle modélise les internautes comme des agents aléatoires qui passent d'une page à la suivante en choisissant l'un des liens présents uniformément au hasard, sans but ni mémoire, et veut favoriser les plus visitées.

On note $G = (V, E)$ le graphe fini (orienté) dont les sommets sont les pages du web, et où une arête est présente d'une page i à une page j si la page i contient un lien vers la page j. On notera $A = (a_{ij})$ la matrice d'adjacence de ce graphe, définie en posant $a_{ij} = 1$ si une arête existe de i à j et 0 sinon. On suppose que toute page contient un lien vers elle-même (le bouton "reload"), donc que $a_{ii} = 1$ pour tout i.

1. Montrer que les internautes de la modélisation correspondent à une chaîne de Markov à valeurs dans l'espace d'états donné par V, et écrire la matrice des probabilités de transition $P = (p_{ij})$ de cette chaîne en fonction des a_{ij}. On pourra introduire le degré d'une page, $d(i) = \sum_j a_{ij}$.
2. *Dans cette question seulement, on suppose le graphe symétrique, c'est-à-dire que pour tous i et j on suppose $a_{ij} = a_{ji}$.* Montrer alors que la mesure de probabilité donnée par $\mu(\{i\}) = d(i)/D$, où D est le degré total du graphe $D := \sum d(i)$, est stationnaire pour la chaîne de Markov. Indication : on pourra montrer qu'elle vérifie le critère de réversibilité.

19

3. L'entreprise décide de classer en premier les pages dont la mesure est la plus grande sous la mesure invariante de la chaîne de Markov. Elle cherche donc une façon de déterminer une bonne approximation de cette mesure.
   a. Il faut déjà que "la" mesure soit bien définie : À quelle condition sur le graphe G a-t-on unicité de la mesure de probabilité invariante ? À quelle condition cette mesure donne-t-elle une mesure positive à chaque élément de V ? *"Indication :" il s'agit d'une question de cours un peu déguisée.* On supposera l'unicité réalisée dans la suite de cette question.
   b. L'équipe de développement propose la méthode suivante : on simule une chaîne de Markov (X_n) avec les probabilités de transition données ci-dessus, on note $N_n(i)$ le nombre de visites du site i par la chaîne avant l'instant n, et on note $\mu_n(i) := N_n(i)/n$ la proportion du temps que la marche passe au site i. Montrer que $\mu_n(i)$ converge, quand $n \to \infty$, vers une limite $\mu(i)$ dont on donnera le lien avec la mesure invariante de la chaîne.
4. **Interlude d'algèbre linéaire.** Soit $M = (m_{ij})$ une matrice stochastique de taille $N \times N$ (rappel : ça veut dire que les m_{ij} sont dans $[0,1]$ et que pour tout i on a $\sum_j m_{ij} = 1$). On suppose pour les trois premières sous-questions suivantes que tous les m_{ij} sont strictement positifs.
   a. Rappeler pourquoi 1 est valeur propre de M, et pourquoi l'espace des vecteurs propres à gauche de M pour la valeur propre 1 est de dimension 1 et formé de vecteurs dont toutes les coordonnées sont de même signe. On notera par la suite Z l'unique vecteur dans cet espace dont la somme des coordonnées vaut 1.
   b. Pour tout $\varepsilon > 0$ on note M_ε la matrice de coordonnées $(m_{ij} + \varepsilon)/(1 + N\varepsilon)$. Montrer que les conclusions de la question 4a restent valides pour la matrice M_ε pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit.
   c. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on note donc Z_ε l'unique vecteur propre à gauche de M_ε pour la valeur propre 1 dont la somme des coordonnées vaut 1. Montrer que Z_ε converge vers Z quand $\varepsilon \to 0$.
   d. Montrer que le résultat de la question précédente reste vrai si on remplace la condition de positivité des m_{ij} par l'irréductibilité de la chaîne de Markov de matrice de transition M.
5. Les retours de la phase de test font remonter le problème que certaines pages n'apparaissent jamais dans les résultats. La raison en est que la chaîne de Markov de la question 1 n'est pas irréductible, une seule classe supporte toute la mesure. Pour corriger le problème, on modifie la chaîne de la manière suivante : à chaque nouvelle transition, avec probabilité $1-\varepsilon$ on choisit un lien uniformément au hasard, et avec probabilité ε on saute vers une page choisie uniformément sur tout V (pour un paramètre $\varepsilon > 0$ fixé — en vrai la compagnie en question utilise $\varepsilon \simeq 15\%$). Montrer que la chaîne obtenue est bien irréductible.
6. Dans toute la suite on notera ν_ε l'unique mesure invariante de cette nouvelle chaîne de Markov. On souhaite étudier le comportement de ν_ε quand $\varepsilon \to 0$.
   a. Soient (V_k) les composantes irréductibles de la chaîne initiale ; on suppose qu'elles sont toutes fermées. Soit (X_n) une chaîne de Markov comme à la question précédente, avec $\varepsilon > 0$, et soit K_n l'indice de la composante où se trouve X_n (donc l'unique entire tel que $X_n \in V_{K_n}$). Montrer que (K_n) est une chaîne de Markov, et écrire ses probabilités de transition.
   b. Déduire de la question précédente les valeurs de $q_k := \nu_\varepsilon(V_k)$. On montrera en particulier que ces valeurs ne dépendent pas de $\varepsilon > 0$. Que se passerait-il si certaines classes n'étaient pas fermées ?
   c. Soit $\nu^{(k)}$ l'unique mesure de probabilité invariante de la chaîne initiale qui est portée par V_k : montrer la convergence $\nu_\varepsilon \to \nu := \sum q_k \nu^{(k)}$. *Indication :* on pourra utiliser les résultats de la question 4 à la restriction de ν_ε à chacun des V_k.
7. Montrer que la mesure ν est invariante pour la chaîne de Markov initiale. Coïncide-t-elle avec celle de la question 2 dans le cas symétrique ?

Exercice 3 — Marche sur l'arbre régulier (exercice "bonus" moins guidé)

On note $T_d = (V_d, E_d)$ l'arbre infini régulier de degré $d > 2$, *i.e.* le graphe infini connexe sans boucle dont tous les sommets sont de degré d. Montrer qu'il existe une foncfion $f : V_d \to \mathbb{R}$ qui est harmonique (au sens habituel, pour tout $x \in V_d$, $f(x)$ est la moyenne des valeurs de f sur les voisins de x), bornée, mais non constante. Indication (quand même) : on pourra par exemple choisir une racine o à l'arbre, considérer la marche aléatoire symétrique (X_n) à plus proches voisins sur T_d, montrer que sa distance à o tend presque sûrement vers $+\infty$ et étudier comment la probabilité que X_n reste, pour n grand, dans l'un des d sous-arbres autour de o dépend de son point de départ. Mais ce n'est qu'une suggestion, on peut le faire de plein de façons, même sans probas ...

10