Université Grenoble Alpes
Master1, mathématiques

# Algèbre 1, examen
le 8 janvier 2019, de 9h à 12h

*Documents et appareils électroniques interdits.* **Chaque réponse doit être justifiée**; *la qualité de la rédaction sera un élément d'appréciation des copies.*

## I

On considère l'anneau $A = \mathbb{Z}[j]$, sous-anneau de $\mathbb{C}$, où on note $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. On admet que $A$ est euclidien et on rappelle que $j^2 + j + 1 = 0$.

**1.** Montrer que $A$ est isomorphe au quotient de $\mathbb{Z}[X]$ par l'idéal $(X^2+X+1)$ et justifier que tout élément de $A$ s'écrit de manière unique sous la forme $z = a+jb$, où $a$ et $b \in \mathbb{Z}$.

On définit l'application *norme* d'un nombre complexe par $N(a+ib) = a^2 + b^2$, où $a, b \in \mathbb{R}$. On rappelle que $N$ est multiplicative, c.a.d. que $N(zz') = N(z)N(z')$, pour tous $z, z' \in A$.

**2. a)** Calculer la norme d'un élément $z = a + jb$ de $A$. Vérifier que $N(z) \in \mathbb{N}$.

**b)** Montrer que $z \in A^\times$ si et seulement si $N(z) = 1$.

**c)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $n \in N(A)$, alors $n$ n'est pas irréductible dans $A$.

**3. a)** Soit $\mathbb{F}_q$ un corps fini. Quel est, suivant la classe de $q$ modulo 3, l'ordre d'une racine de $P = X^2 + X + 1$ dans le groupe $\mathbb{F}_q^*$ ?

**b)** À quelle condition sur $q$ le polynôme $P$ est-il irréductible dans $\mathbb{F}_q$ ?

**4. a)** Dans la suite on désigne par $p$ un nombre premier. À l'aide de **1**, montrer que les anneaux quotients $\mathbb{F}_p[X]/(X^2 + X + 1)$ et $A/(p)$ sont isomorphes.

**b)** En déduire que $p$ est irréductible dans $A$ si et seulement si $p \equiv 2 \bmod 3$.

**c)** Montrer si $p$ n'est pas irréductible dans $A$, alors $p \in N(A)$.

On note $B$ le sous-anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$ de $\mathbb{C}$. On a donc $B \subset A$.

**5. a)** Déterminer $B^\times$. L'élément 2 est-il irréductible dans $B$?

**b)** Montrer *soigneusement* que $B$ n'est pas factoriel, en considérant $4 \in B$.

**6. a)** Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer que $a + jb \in B$ si et seulement si $b$ est pair.

**b)** Montrer que si $z \in A$, alors au moins un élément de l'ensemble $\{z, jz, j^2z\}$ appartient à $B$.

**T.S.V.P.**

c) Montrer que les images $N(A)$ et $N(B)$ sont égales.

d) En déduire l'équivalence: $p$ est de la forme $a^2+3b^2$ où $a, b \in \mathbb{N}$ si et seulement si $p = 3$ ou $p \equiv 1 \bmod 3$.

## II

VRAI ou FAUX? justifiez vos réponses.

**1.** Le corps $\mathbb{R}$ contient un sous-corps isomorphe à $\mathbb{Q}(T)$.

**2.** Le corps $\mathbb{Q}(T)$ est dénombrable.

**3.** Le corps $\mathbb{Q}(T)$ est algébriquement clos.

**4.** L'anneau $A = \mathbb{F}_2[X]/(X^{16} - X)$ est un corps.

**5.** L'anneau $A = \mathbb{F}_2[X]/(X^{16}-X)$ a un quotient qui est un corps à 16 éléments.

**6.** **a)** Le polynôme $X^4 + X^2 + X + 1$ est sans racine dans $\mathbb{F}_9$.

**b)** Le polynôme $2X^4 + 14X^2 + 8X + 2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

**7.** L'anneau $\mathbb{D} = \mathbb{Z}[1/10]$ des nombres décimaux est un $\mathbb{Z}$-module de type fini.

## III

On considère le polynôme $P = X^7 - 2$.

**1.** Quel est le degré d'un corps de décomposition de $P$ sur $\mathbb{Q}$?

**2.** Dans la suite on considère $P$ comme élément de $\mathbb{F}_{11}[X]$.

**a)** Montrer que le morphisme de groupes $x \mapsto x^7$ de $(\mathbb{F}_{11})^*$ dans lui-même est bijectif.

**b)** Déterminer les extensions finies de $\mathbb{F}_{11}$ dont le groupe multiplicatif contient un élément d'ordre 7.

**c)** Déterminer le corps de décomposition de $P$ sur $\mathbb{F}_{11}$.

**3.** Décrire la décomposition du polynôme cyclotomique $\Phi_7$ en polynômes irréductibles de $\mathbb{F}_{11}[X]$: degrés et multiplicités.

## IV

On considère l'ensemble $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 \mid x - 3y + 2z \equiv 0 \bmod 8\}$.

**1.** Montrer que $M$ est un $\mathbb{Z}$-sous-module libre de $\mathbb{Z}^3$.

**2.** Donner la structure du groupe quotient $\mathbb{Z}^3/M$. Quel est le rang de $M$?

**3.** Donner une base de $\mathbb{Z}^3$ adaptée à $M$.

**4.** Décrire les classes d'isomorphisme de groupes abéliens du même ordre que $\mathbb{Z}^3/M$.

# Examen du 10 janvier 2019

**La correction prendra en compte la justification des arguments et la qualité de la rédaction.**

**Exercice 1** (Calcul explicite). Soit $n > 0$ et

$$(S)\quad \begin{cases} x'(t) = \frac{2}{3}x(t)y(t) \\ y'(t) = -x^2(t) + y^2(t). \end{cases}$$

1. Soit $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$ une solution de $(S)$. Trouver d'autres solutions à partir de $\gamma$ via des symétries. Peut-on avoir comme solution $\sigma(t) = \lambda\gamma(\mu t)$ ? En déduire une propriété géométriques de l'ensemble des solutions maximales de $(S)$.
2. Déterminer les courbes du plan formées des points $(x_0, y_0)$ où les solutions de $(S)$ ont des tangentes parallèles aux axes $(Ox)$ et $(Oy)$. En déduire quelques solutions particulières.
3. A supposer qu'il existe $\Phi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ vérifie $y(t) = \Phi(x(t))$, déterminer $\Phi$ et en déduire toutes les courbes intégrales.
   *Indication : on pourra étudier la fonction $\Psi(x) = \Phi(x)^2$.*

**Exercice 2** (Etude qualitative). Faire l'étude qualitative des solutions maximales de l'équation

$$y' = x - e^y.$$

En particulier on s'attachera à étudier les variations des solutions, ainsi que la forme de leur intervalle de définition et le comportement au bord des solutions.
Un dessin prenant en compte les informations précédentes est attendu.

**Exercice 3** (Sturm-Liouville). Soient $p : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$ et $q : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. On suppose $p > 0$. On se donne $\lambda \in \mathbb{R}$ et l'équation différentielle $(E_\lambda)$ :

$$(p(x)y')' + (q(x) + \lambda)y = 0$$

avec les conditions aux limites $(CL)$

$$\alpha_1 y(a) = \alpha_2 y'(a), \qquad \beta_1 y(b) = \beta_2 y'(b),$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ sont quatre réels tels que $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$.
On veut montrer qu'il existe $\lambda_0$ tel que pour $\lambda \leqslant \lambda_0$ l'équation $(E_\lambda)$ n'admet pas de solution satisfaisant $(CL)$.

1. On suppose que $\alpha_2 = \beta_2 = 1$ et qu'il existe une solution non nulle telle que $y'(a) = 1$.
   (a) On introduit $z(x) = p(x)y'(x)/y(x)$. Montrer que $z$ satisfait une équation de Ricatti de la forme $z' = f(x) + g(x)z^2$.
   (b) Trouver un réel $\lambda_0$ tel que pour $\lambda \leqslant \lambda_0$, $z(x) = z(a)$ implique $z'(x) \geqslant 1$. En déduire que si $\lambda \leqslant \lambda_0$ alors $z(x) > z(a)$ sur le plus grand intervalle $]a, c[$ sur lequel $y$ ne s'annule pas.
   (c) Montrer que si $\lambda_0 \leqslant \lambda_0$, $y$ ne s'annule pas sur $[a, b]$ et $p(a)\alpha_1 \leqslant z(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.
   (d) Montrer qu'il existe $\lambda_1$ tel que si $\lambda \leqslant \lambda_1$ alors $p(a)\alpha_1 \leqslant z(x) \leqslant p(b)\beta_1$.
   (e) En déduire une contradiction si $\lambda$ est assez petit.
2. On suppose que $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 = 0$. Montrer que, pour $\lambda$ assez petit, $z(x)$ est défini sur $]a, b]$. En tirer une contradiction comme pour le cas précédent.
3. Conclure.

**Exercice 4** (Séries de Fourier). Soit $f$ la fonction $2\pi$-périodique qui vaut $+1$ sur $[0, \pi[$ et -1 sur $[-\pi, 0[$.

1. Rappeler les formules des coefficients de Fourier sur la base analytique donnée par les $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$. Au regard des propriétés de la fonctions $f$, que peut-on dire des $a_n(f)$ ?
2. Prouver en détail que, pour tout entier naturel $n$, $b_{2n}(f) = 0$ et $b_{2n+1}(f) = \frac{4}{\pi}\frac{1}{2n+1}$.
3. Soit $f_n(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}$. Montrer que $f_n$ a des extrema locaux en tous les $\frac{k\pi}{2n}$ pour $1 \leqslant k \leqslant 2n$.
4. Montrer que le maximum de $f_n$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ est atteint en $x_n = \frac{\pi}{2n}$. *[Indication : utiliser le fait que $f_n(x) = \int_0^x f_n'(t)dt$]*
5. Montrer que la suite des $f_n(x_n)$ est décroissante et calculer sa limite $\ell$. *[Indication : utiliser le fait que $f_n(x) = \int_0^x f_n'(t)dt$]*
6. Sachant que $\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t}dt > 1,8$ montrer que $\ell > 1$. C'est le phénomène de Gibbs.



4

**M1 – Statistique – 2018/2019**

# Examen final
# Durée : 2h

*Tout matériel qui ne ressemblerait pas à un simple stylo ou à une feuille blanche (calculatrice, portable, note de cours...) est interdit. Si vous vous demandez si vous avez le droit d'avoir un objet sur la table, c'est qu'il est certainement interdit.*
*L'énoncé est composé de deux exercices indépendants pour un total de 9 questions.* ***Si un résultat n'a pas pu être démontré****, il pourra toutefois être admis pour les questions suivantes.*
*Si un résultat n'est pas rigoureusement justifié, la totalité des points ne sera pas donnée. Si la réponse n'est pas correcte mais que le candidat ou la candidate s'en aperçoit et met un commentaire montrant un recul sur son travail, des points pourront éventuellement être accordés ; sinon, aucun point ne sera accordé à la question.*

## Intervalle de confiance

Dans cette partie, nous étudions un $n$-échantillon de loi exponentielle $\mathcal{E}(\theta^\star)$ avec $\theta^\star \in \mathbb{R}_+^\star$ dont nous rappelons la densité :

$$f_{\theta^\star}(x) = \theta^\star e^{-\theta^\star x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

1. En détaillant les calculs de l'espérance, calculer l'estimateur $\widehat{\theta}_n$ basé sur le moment d'ordre 1.

2. En détaillant les calculs de la variance, calculer la loi limite de $\overline{X_n}$.

3. Calculer la loi limite de $\widehat{\theta}_n$.

4. En isolant $\theta^\star$, déduire du résultat précédent un intervalle de confiance asymptotique de $\theta^\star$ de niveau $1-\alpha$ avec $\alpha \in ]0,1[$.

# Test

Dans cette partie, nous étudions des lancers d'une pièce et nous cherchons à savoir si la pièce est équilibrée ou non ; c'est-à-dire si nous avons autant de chance d'obtenir *pile* ou *face*. Pour ce faire, nous modélisons les lancers par un $n$-échantillon de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\theta^\star)$ avec $\theta^\star \in [0,1]$ où 0 représente *face* et 1 *pile*.

5. Expliquer pourquoi nous pouvons modéliser cette problématique par un test comparant les deux hypothèses suivantes :

$$\mathcal{H}_0 : \theta^\star = 1/2 \text{ contre } \mathcal{H}_1 : \theta^\star \neq 1/2.$$

Donner les deux sous-ensembles correspondants.

6. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance du modèle.

7. Montrer que la statistique du rapport de vraisemblance $h(\mathbf{X})$ est égale à $g_n(\overline{X_n})$ avec

$$\begin{aligned} g_n : ]0,1[ &\to \mathbb{R}_+^\star \\ x &\mapsto 2^n x^{nx} (1-x)^{n(1-x)} . \end{aligned}$$

8. En étudiant le sens de variation du logarithme de la fonction $g_n$, montrer que le test du rapport de vraisemblance est équivalent au test :

$$\phi(\mathbf{X}) = \mathbb{1}_{\{\overline{X_n} < \ell_\alpha^1 \text{ ou } \ell_\alpha^2 < \overline{X_n}\}}$$

avec $\ell_\alpha^1 < \ell_\alpha^2$ qui seront définis dans la question suivante.

9. En étudiant la loi asymptotique de $\overline{X_n}$ sous l'hypothèse $\mathcal{H}_0$, proposer des valeurs pour $\ell_\alpha^1$ et $\ell_\alpha^2$ de telle sorte que le test soit de niveau $\alpha$.

Université Joseph Fourier - M1 - 2018-2019 Géométrie différentielle

# Examen session 1

16 mai 2017 - 3h00

**Les exercices sont indépendants. Aucun document ni outil électronique autorisés.**

**Exercice 1.** Soit

$$C := \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x^4 + y^2 = 1, x + t = 1 \text{ et } y^2 + z = 1.\}$$

1. Montrer que $C$ est une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^4$. Quelle est sa dimension ? Montrer que $C$ est compacte.

2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a \neq b$, et $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y,z,t) = ax + bt.$$

Trouver les points critiques de $f_{|C}$. Montrer que ce sont des extrema globaux.

**Exercice 2.** Soit $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ un plan affine et $\gamma : I = [a,b] \to \Pi$ une courbe paramétrée $C^2$, telle que $\gamma'(t)$ ne s'annule pas pour tout $t \in [a,b]$. Soit $Q \notin \Pi$ et $C \subset \mathbb{R}^3$ l'ensemble

$$C := \bigcup_{M \in \gamma(I)} [Q, M],$$

où pour tout couple $(A,B)$ de points de $\mathbb{R}^3$, $[A,B]$ est le segment de droite entre les deux points.

1. Dessiner rapidement $C$ pour $Q = (0,0,1)$ et $\gamma$ une paramétrisation du cercle unité dans le plan $xOy$.
2. Montrer qu'il existe un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ et une surface paramétrée régulière $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de régularité $C^2$ telle que $f(U) \subset C$ et $\overline{f(U)} = C$. Montrer qu'on peut choisir $f$ de sorte que $f$ soit affine en la première variable qu'on notera $s$.

3. Soit $N : U \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ l'application de Gauss associée à la paramétrisation. Que vaut $N'_s$ ?. En déduire la valeur de la courbure $K$.

4. Exprimer l'aire de $C$ en fonction de la longueur de $\gamma$ et de la distance de $Q$ à $\Pi$. Vérifier votre formule si $\gamma([a,b])$ est un segment de droite.

**Exercice 3.** Soit $M_n$ l'espace des matrices carrées réelles de taille $n$, $S_n$ celui des matrices symétriques, et

$$O_n := \{M \in M_n,\ {}^tMM = I_n\},$$

le groupe orthogonal, avec $I_n$ la matrice unité.

1. Soit $\phi : M_n \to S_n$, $\phi(M) := {}^tMM - I_n$.
   (a) Montrer que $\phi$ est une application lisse, et calculer sa différentielle $d\phi(M)$ en un point $M \in M_n$. Vérifier que pour tout $M \in M_n$, $Im\ d\phi(M) \subset S_n$ et que $\ker d\phi(I_n) = A_n$, où $A_n$ est l'espace des matrices antisymétriques.

   (b) Montrer que pour tout $M \in O_n$, $Im(d\phi(M)) = S_n$.

   (c) Montrer que $O_n$ est une sous-variété lisse de $M_n$ dont on déterminera la dimension.

   (d) Montrer que $O_n$ est compact.

   (e) Montrer que $O_n$ n'est pas connexe. On pourra utiliser l'application déterminant.

2. Soit $f : O_n \to \mathbb{R}$ la restriction de la fonction trace, $f(M) = Tr(M)$. Montrer que $-n \leq f \leq n$. Ces bornes sont-elles atteintes sur $O_n$ ? Ces bornes sont-elles atteintes sur chacune des composantes connexes de $O_n$ ?

**Exercice 4.** Dans cet exercice, on pourra utiliser le fait suivant admis : il existe une application lisse $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leq \chi(x) \leq 1$, $\chi(x) = 1$ si $|x| \leq 1$ et $\chi(x) = 0$ si $|x| \geq 2$.

1. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, lisse.
   (a) Déterminer une paramétrisation $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ régulière lisse de son graphe.

   (b) Déterminer l'application de Gauss $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ associée à $f$ en fonction de $\varphi$.

   (c) Déterminer la seconde forme fondamentale $II_{(x,y,\varphi(x,y))}$. On pourra fournir sa matrice dans une base associée de façon naturelle à $f$.

   (d) Déterminer la matrice de la première forme fondamentale dans la base $(f'_x, f'_y)$ et calculer son déterminant.

   (e) En déduire que la courbure de Gauss $K$ est continue en $(x, y)$ et vérifie

   $$|K(x,y)| \leq |\det Hess(\varphi)(x,y)|, \tag{1}$$

   où $Hess(\varphi)$ est la matrice de $d^2\varphi$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Montrer de plus que $K$ est du signe de $\det Hess(\varphi)$, et qu'enfin l'inégalité (1) est une égalité aux points critiques de $\varphi$.



9

(f) On suppose que $\varphi(x,y) = \rho(x^2+y^2)$, avec $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lisse. Calculer $K(0,0)$ en fonction de $\rho'(0)$.

2. Soit $M > 0$. Montrer qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ lisse, telle que
   — $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\varphi(x,y) > 0$,
   — $\varphi(0,0) = 0$,
   — la courbure de Gauss du graphe de $\varphi$ en $(0,0)$ vaut $M$.
3. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ une application lisse telle que toutes ses dérivées partielles tendent vers 0 quand $\|(x,y)\| \to \infty$.
   (a) Montrer qu'il existe une telle fonction $g$.

   (b) Soit $\Sigma$ le graphe de $g$, et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $K(x,y)$ la courbure de Gauss de $\Sigma$ au point $(x,y,g(x,y))$. Montrer que
$$\lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} K(x,y) = 0.$$
4. Montrer que pour tout $M > 0$, il existe une application $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$, telle que, si pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $K(x,y)$ désigne la courbure du graphe de $h$ en $(x,y,h(x,y))$,
   (a) $h(x,y) > 0$ si $(x,y) \neq (0,0)$ ;
   (b) $h(0,0) = 0$ ;
   (c) $h \to_{\|(x,y)\| \to \infty} 0$ ;
   (d) $]0, M] \subset K(\mathbb{R}^2)$.



10

Université de Grenoble Alpes
Institut Fourier
M1 Analyse fonctionnelle
2018-2019

# Examen de mai 2019

Sans document, ni calculatrice
Le barème est donné à titre indicatif
Durée : 3 heures

**Exercice 1 [4 points]**

Soient $X$ et $Y$ deux espaces de Banach et soit $T : X \to Y$ une application linéaire continue. On note $X^*$ (respectivement $Y^*$) le dual de $X$ (respectivement de $Y$). On admet qu'il existe une application linéaire continue $T^* : Y^* \to X^*$, appelée adjoint de $T$, telle que pour tout $\psi \in Y^*$, tout $x \in X$, $(T^*(\psi))(x) = \psi(T(x))$.
1) Démontrer que si $T(X)$ est dense dans $Y$, alors l'adjoint $T^*$ de $T$ est injectif.
2) Réciproquement, montrer que si l'adjoint $T^*$ de $T$ est injectif, alors $T(X)$ est dense dans $Y$.
3) Dans le cas où $X = L^2([0,1])$ et $Y = L^1([0,1])$, donner un exemple (simple) dans lequel $T^*$ est injectif mais $T$ n'est pas surjectif.

**Exercice 2 [3 points]**

1) Enoncer le théorème du graphe fermé.
2) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré et soit $\phi : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable telle que pour toute fonction $f \in L^p(\Omega)$, $\phi.f \in L^p(\Omega)$. Démontrer que l'application $M_\phi : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ définie par $M_\phi(f) = \phi.f$ est continue (On pourra appliquer sans preuve que si la suite $(g_n)$ tend vers $g$ dans $L^p(\Omega)$, alors il existe une sous-suite $(g_{nk})$ de $(g_n)$ qui tend vers $g$ presque partout).

**Exercice 3 [6 points]**

Soit $(E, N)$ un espace de Banach de **dimension infinie.** On note $S_E = \{x \in E ; N(x) = 1\}$ la sphère unité de $E$ et $B_E = \{x \in E ; N(x) \leq 1\}$ la boule unité fermée de $E$. Si $A \subset E$, on note $\overline{A}$ l'adhérence de $A$ pour la topologie forte et $\overline{A}^w$ celle pour la topologie faible.
1a) On fixe $x_0 \in B_E \setminus S_E$. Soit $V_0$ un voisinage (pour la topologie faible) de $x_0$. Comment écrire un voisinage faible $V$ de $x_0$ contenu dans $V_0$ à l'aide d'un $\varepsilon > 0$ et de formes linéaires $\phi_1$, ..., $\phi_n$ sur $E$ ?
1b) Démontrer que si $E$ est de dimension infinie et si $\psi_1$, ..., $\psi_k$ est une famille finie de formes linéaires non nulles sur $E$, alors $\bigcap_{j=1}^k \operatorname{Ker}(\psi_j)$ n'est pas réduit au singleton $\{0\}$ (On pourra, par exemple, noter que pour tout $x \in E$ et tout $j$,
$x = \left(x - \dfrac{\psi_j(x)}{\psi_j(x_j)} x_j\right) + \dfrac{\psi_j(x)}{\psi_j(x_j)} x_j$ pour un $x_j$ bien choisi). En déduire qu'il existe $\tilde{x} \neq 0$ tel que $\tilde{x} \in \bigcap_{j=1}^n \operatorname{Ker}(\phi_j)$ où les $\phi_j$ sont donnés par la question précédente.
1c) On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = N(x_0 + t\tilde{x})$ (où $\tilde{x}$ est celui de la question 1b). Démontrer qu'il existe $t_0 > 0$ tel que $f(t_0) = 1$.
1d) On pose $x_1 = x_0 + t_0\tilde{x}$. Démontrer que $x_1 \in S_E$ puis que $x_1 \in V_0$.
1e) En déduire que l'adhérence faible de $S_E$ est $B_E$ (On admettra que $B_E$ est fermé pour la topologie faible).
2a) Supposons que l'application $N : x \in E \to N(x) \in \mathbb{R}$ est continue pour la topologie faible. Montrer qu'alors $N(\overline{S_E}^w) \subset \{1\}$.
2b) Déduire des questions 1e et 2a que l'application $N : x \to N(x)$ n'est pas continue pour la topologie faible.

**Exercice 4 [7 points]**

Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{R}$, on définit $\tau_a f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par $(\tau_a f)(x) = f(x-a)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On munit $\mathbb{R}$ de la mesure de Lebesgue et de la tribu borélienne. On dit qu'un sous-espace fermé $E$ de $L^2(\mathbb{R})$ est invariant par translation si $\tau_a f \in E$ pour tout $f \in E$ et tout $a \in \mathbb{R}$.

Le but de l'exercice est de démontrer que si $E$ est un sous espace vectoriel fermé de $L^2(\mathbb{R})$ invariant par translation, alors il existe un borélien $B$ de $\mathbb{R}$ tel que

$$E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \in L^2(\mathbb{R}), \hat{f} = 0 \text{ presque partout sur } B\},$$

où $\hat{f}(\xi) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2i\pi x.\xi}dx$ pour $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ (Attention, la normalisation n'est pas celle du cours. Voir la question suivante pour l'existence de $\hat{f}$).

1) Justifier que si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors la transformée de Fourier $\hat{f}$ est définie partout sur $\mathbb{R}$.

On admet dans la suite que la définition de la transformée de Fourier $\hat{f}$ s'étend aux fonctions $f$ de $L^2(\mathbb{R})$ par continuité (Théorème de Plancherel).

On notera dans la suite $e_a(x) = e^{2i\pi a.x}$.

On pose $F = \{\hat{f}; f \in E\}$ et on notera $P_F$ la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{R})$ sur $F$ (On admet que cette projection existe. Ceci vient en partie du fait que $E$ est fermé).

2) Vérifier que si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\widehat{(\tau_a f)} = (\hat{f})e_{-a}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, puis montrer que cela reste vrai si $f \in L^2(\mathbb{R})$ (On pourra utiliser la densité des fonctions de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$). Quelle propriété en déduit-on pour $F$?

3) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $(u - P_F u) \perp (P_F v)e_a$ pour tous $u, v \in L^2(\mathbb{R})$.

4) Que signifie cette orthogonalité pour la transformée de Fourier de la fonction $w = (u - P_F u)\overline{P_F v}$? On commencera par justifier que $w \in L^1(\mathbb{R})$. En déduire que $w = 0$ presque partout.

5) Montrer en utilisant la question précédente que l'on a $u(\overline{P_F v}) = (P_F u)\overline{v}$ (presque partout) pour tous $u, \in v \in L^2(\mathbb{R})$.

6a) Donner un exemple de fonction $v_0 \in L^2(\mathbb{R})$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $v_0(t) \neq 0$. On fixe une telle fonction $v_0$ dans la suite.

6b) On pose $\phi(y) = \overline{\left(\frac{(P_F(v_0))(y)}{v_0(y)}\right)}$. En utilisant la question 5, montrer que $\phi(y) = 0$ ou $= 1$ pour presque tout $y \in \mathbb{R}$ (On pourra utiliser le fait que $P_F = P_F^2$).

7) Conclure.

Remarque : Ces résultats sont dus à Norbert Wiener en 1921.

Université Grenoble Alpes
V. Beffara, J. Chevallier

Année 2018–2019
Master M1M

# Processus Stochastiques — Examen final — 16 mai 2019

*Notes de cours et documents autorisés. Les exercices sont presque indépendants.*

Dans tout ce sujet on se donne un graphe fini $G$, et on note $V$ son ensemble de sommets et $E$ son ensemble d'arêtes. On fixe aussi une fonction $f : V \to \mathbb{R}$. Ce qu'on cherche est une méthode aléatoire pour déterminer le sommet $v^*$, supposé unique, où $f$ atteint son minimum. Le premier outil qui va nous servir est une certaine chaîne de Markov construite à partir de la fonction $f$ :

## Exercice 1 — Dynamique de Glauber

**1.** Soit $\lambda > 0$. Comment choisir $Z_\lambda$ pour que $\mu_\lambda(\{x\}) := \frac{e^{-\lambda f(x)}}{Z_\lambda}$ corresponde à une mesure de probabilité ? Par la suite on supposera toujours $Z_\lambda$ choisi de cette façon.

**2.** On définit une chaîne de Markov $(X_n)$ d'ensemble d'états $V$ en se donnant les probabilités de transition $p_{ij}(\lambda)$ de la manière suivante :

$$p_{ij}(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \text{ et } ij \text{ n'est pas une arête de } G \\ e^{-\lambda(f(j)-f(i))_+}/C_\lambda & \text{si } i \neq j \text{ et } ij \text{ est une arête de } G \\ 1 - \sum_{k \neq i} p_{ik}(\lambda) & \text{si } i = j \end{cases}$$

en choisissant la constante $C_\lambda \geqslant 1$ de telle sorte qu'on ait $p_{ii} > 0$ pour tout $i$. (La notation $x_+$ désigne la partie positive de $x$, qui vaut $x$ si $x > 0$ et 0 sinon.) Montrer que la mesure $\mu_\lambda$ est invariante pour cette chaîne de Markov. *Indication : on pourra montrer que $\mu_\lambda$ vérifie la condition de réversibilité.*

**3.** On rappelle qu'un graphe est dit *connexe* si quels que soient deux sommets, ils sont reliés par un chemin formé d'une suite finie d'arêtes du graphe. Vérifier que la chaîne de Markov $(X_n)$ est irréductible si et seulement si le graphe $G$ est connexe.

**4.** Montrer que $(X_n)$ converge en loi vers $\mu_\lambda$, et donner un contre-exemple pour justifier la nécessité de la condition $p_{ii} > 0$ dans le choix de $C_\lambda$.

**5.** Soit $\delta = \min\{f(i) : i \neq v^*\} - f(v^*)$. Montrer que $\delta > 0$ et que $\mu_\lambda(\{v^*\}) \geqslant 1 - Ke^{-\lambda\delta}$ pour un certain $K$ que l'on précisera.

**6.** Déduire de ce qui précède qu'en choisissant $\lambda$ assez grand, on peut déterminer $v^*$ avec probabilité arbitrairement proche de 1 en simulant assez longtemps la chaîne de Markov issue d'un sommet arbitraire de $V$.

L'inconvénient de cette méthode est que d'une part on doit choisir la chaîne de Markov, ou au moins le paramètre $\lambda$, en fonction de la probabilité de succès voulue (alors qu'on voudrait un algorithme qui fonctionne presque sûrement), et que d'autre part on n'a pas a priori d'information sur la vitesse de convergence de $(X_n)$ vers $\mu_\lambda$. On va commencer par regarder le second problème.

## Exercice 2 — Métastabilité

Dans cet exercice on suppose que $V = [0, L] \cap \mathbb{Z} = [\![0, L]\!]$ et que pour un certain $\ell \in ]\!]0, L[\![$, $f$ est croissante sur l'intervalle $[\![0, \ell]\!]$ et décroissante sur $[\![\ell, L]\!]$ avec $f(0) > 0$ et $f(L) = 0$ (donc $v^* = L$) ; les arêtes sont les paires $\{i, i+1\}$. On reprend la chaîne de Markov de l'exercice précédent, partant de l'état 0, et on cherche à estimer le temps d'atteinte de $L$.

**1.** Soit $\tau = \inf\{n > 0 : X_n = \ell\}$. Montrer que $\tau$ est un temps d'arrêt, et qu'il est fini presque sûrement. Montrer également que $\mathbb{E}[\tau] < \infty$.



13

2. On note, pour $x \in [\![0, \ell]\!]$, $q(x)$ l'espérance du temps d'atteinte de $\ell$ pour la chaîne de Markov issue de $x$. Montrer qu'on a

$$q(0) = 1 + \frac{e^{-\lambda(f(1)-f(0))}q(1)}{C_\lambda} + \frac{C_\lambda - e^{-\lambda(f(1)-f(0))}}{C_\lambda}q(0)$$

et, pour tout $0 < x < \ell$,

$$q(x) = 1 + \frac{q(x-1) + e^{-\lambda(f(x+1)-f(x))}q(x+1)}{C_\lambda} + \frac{C_\lambda - 1 - e^{-\lambda(f(x+1)-f(x))}}{C_\lambda}q(x).$$

3. En posant $\pi(x) := q(x+1) - q(x)$ pour $x \geqslant 0$ et $\pi(-1) = 0$, déduire de la question précédente qu'on a pour tout $0 \leqslant x < \ell$,

$$\pi(x-1) = e^{-\lambda(f(x+1)-f(x))}\pi(x) + C_\lambda.$$

En posant maintenant $\rho(x) := \pi(x)e^{-\lambda f(x+1)}$, en déduire la relation, toujours pour $0 \leqslant x < \ell$,

$$\rho(x-1) - \rho(x) = C_\lambda e^{-\lambda f(x)}.$$

4. Calculer $\rho(x)$, puis $\pi(x)$, puis $q(x)$ pour tout $x$. Montrer en particulier qu'on a

$$q(0) = C_\lambda \sum_{y=1}^{\ell} \sum_{x=0}^{y-1} e^{\lambda(f(y)-f(x))}.$$

5. Si $\varphi$ est une fonction de $V$ dans $\mathbb{R}$, on note $M_n^\varphi := n - \varphi(X_n)$. Déterminer $\varphi$ qui fasse de $(M^\varphi_{n\wedge\tau})$ une martingale, et retrouver le résultat de la question précedente en utilisant le théorème d'arrêt.
6. Déduire des questions précédentes que $\mathbb{E}[\tau] \geqslant C_\lambda e^{\lambda(f(\ell)-f(0))}$. Que peut-on en déduire sur le temps d'atteinte de $L$ par la chaîne de Markov issue de 0 ?
7. Que se passerait-il si $f$ était décroissante sur l'intervalle $[\![0, \ell]\!]$ ? pas monotone sur $[\![0, \ell]\!]$ ?

Le phénomène observé est général : le temps qu'il faut à une chaîne de Markov définie par la dynamique de Glauber pour passer d'un minimum local de $f$ à son minimum global se comporte comme $e^{\lambda\Delta}$ où $\Delta$ est la barrière à franchir. Pour trouver $v^*$ avec bonne probabilité il faut choisir $\lambda$ grand, et le temps d'y arriver croît exponentiellement avec $\lambda$, ce qui n'est pas idéal. Voici une façon d'y remédier :

**Exercice 3 — Recuit simulé (plus difficile, réponses partielles encouragées)**
On considère à présent une chaîne de Markov *inhomogène* $(Y_n)$, choisie de la manière suivante : on se donne une suite croissante $(\lambda_n)$ qui tend vers l'infini, et on impose

$$\mathbb{P}[Y_{n+1} = j | Y_n = i] = p_{ij}(\lambda_n)$$

en choisissant $C_{\lambda_n} = C = \frac{1}{2|V|}$.

1. Vérifier que les conditions de la question 2 de l'exercice 1 sont satisfaites pour tout $\lambda_n$.
2. Soit $A$ l'événement sur lequel $(Y_n)$ converge :

$$A = \{\exists v \in V,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ Y_n = v\}.$$

Montrer que sur l'événement $A$, la limite $v$ est nécessairement un minimum local strict de $f$, au sens où pour toute arête $vv'$ on a $f(v') > f(v)$.

3. On suppose dans les questions suivantes (sauf la dernière) que $\lambda_n$ croît assez vite pour que l'on ait la sommabilité $\sum e^{-\varepsilon\lambda_n} < \infty$ pour tout $\varepsilon > 0$. Montrer que si toutes les valeurs prises par $f$ sont différentes, alors on a $\mathbb{P}[A] = 1$, autrement dit la suite $(Y_n)$ converge presque sûrement. *Indication : on pourra choisir $\varepsilon = \min\{|f(i) - f(j)| : i \neq j\} > 0$ et appliquer le lemme de Borel-Cantelli dans la construction des chaînes de Markov vue en cours.*
4. Montrer que la conclusion de la question précédente reste vraie si on suppose la même condition sur $(\lambda_n)$ mais qu'on ne demande à $f$ que le fait que tous ses minima locaux soient stricts.
5. Dans le cadre de l'exercice 2, montrer que si $f(1) > f(0)$ alors $\mathbb{P}[A, v = 0] > 0$.
6. Toujours dans le cadre de l'exercice 2, expliquer pourquoi (et démontrer si possible) on a presque sûrement $Y_n \to L$, donc l'algorithme fonctionne et trouve le minimum global de $f$, si on suppose

$$\sum e^{-(f(\ell)-f(0))\lambda_n} = +\infty \quad \text{et} \quad \sum e^{-(f(\ell)-f(L))\lambda_n} < +\infty.$$



14

**Examen, 16 mai 2019, part 1 (Cours de F.Dahmani)**
**M1-MSIAM :1h30 ; M1-MG :2h ;**
**(Les barêmes sont adaptés ; L'exercice 1 seul, bien rédigé, permet d'avoir 18 pour les M1-MG, et 20 pour les M1-MSIAM)**

**Exercice 1**
On propose le protocole suivant.
Le nombre $p$ est un nombre premier public.
Le nombre $\alpha \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un élément primitif public.

**Q. 1.** Rappeller ce que signifie que $\alpha$ est primitif dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Alice choisit $s \in \{1, \ldots, p-1\}$ secretement. Elle calcule $\beta = \alpha^s \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et publie $\beta$.
Puis Alice choisit $M \in \{1, \ldots, p-1\}$.
Ensuite Alice choisit $k \in \{1, \ldots, p-2\}$, premier avec $p-1$, et calcule $u$ l'entier positif inférieur à $p$ tel que $u = \alpha^k\, [mod\, p]$.
Ensuite Alice calcule la solution $v \in \{1, \ldots, p-1\}$ de l'équation $M = us + kv\ [mod\ (p-1)]$. (c'est l'étape "V").
Alice publie le triplet $(M, u, v)$.

On rappelle que l'algorithme d'Euclide étendu est de faible complexité.

**Q. 2.** Comment Alice peut-elle verifier que $k$ est bien premier avec $(p-1)$ ?

**Q. 3.** Si $\gamma$ est inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, comment peut on calculer son inverse ? (Le correcteur appréciera une méthode de faible complexité).

**Q. 4.** Montrer que lors de l'étape "V" , la solution $v$ existe et est unique. Comment Alice peut-elle la calculer ?

**Q. 5.** On considère un individu, Bob, ayant acces à tout cc qui a été rendu public, et seulement à ces informations.

**5-a.** Expliquer Bob peut retrouver (par un calcul peu complexe) la valeur de $\alpha^M\, [mod\, p]$, et $\beta^u u^v\, [mod\, p]$.



15

**5-b.** Proposer une commande SageMath (ou à défaut, dans un logiciel préféré) pour effectuer cela. (Les valeurs de $\alpha, M, u, v, \beta, p$ et leur natures sont supposées déjà attribuées, et on peut utiliser les commandes SageMath usuelles).

**Q. 6.** On dit qu'un triplet d'entiers positifs $(M', u', v')$ tous inférieurs à $p$, est acceptable si

$$\alpha^{M'} = \beta^{u'}(u')^{v'}\ [mod\, p].$$

Montrer que le triplet $(M, u, v)$ publié par Alice est acceptable. En déduire que Bob peut facilement verifier que Alice a publié un triplet acceptable.

**Q. 7.** On considère une individue Eve, qui, après avoir vu publiés $p, \alpha$ et $\beta$, cherche à publier un triplet acceptable.

**7-a.** Expliquer que si Eve parvient à résoudre une instance du problème du logarithme discret, elle peut facilement publier un triplet acceptable avec la valeur $M'$ de son choix.
On suppose que la réciproque est aussi vraie (bien qu'elle n'est pas démontrée).

**7-b.** Alice ayant publié $p, \alpha, \beta$ au début, expliquer pourquoi la publication du triplet $(M, u, v)$ peut être considérée comme un indice fiable du fait que Alice est l'auteure de $M$.

♠♡♢♣

**Exercice 2**

Soit $f : (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \to \{0, 1\}$ une fonction.
Sa transformée de Walsh Hadamard est $\hat{f} : (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \to \mathbb{Z}$ donné par

$$\hat{f}(t) = \sum_{x \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n} f(x)(-1)^{(t \cdot x)}$$

**Q. 1.** Montrer que $\displaystyle\sum_{t \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n} \hat{f}(t) = 2^n f(0)$.

**Q. 2.** Soit $F(x) = (-1)^{f(x)}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{t \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n} \hat{F}(t)^2 = 2^{2n}$.

Fin.



16

M1-Maths-Générales 2019
Algèbre 2

**Examen, 15 mai 2019 ; durée 3h (3 pages)**

**Problème A ; Explorer un groupe grâce à ses repésentations ($\simeq$ 14 pts)**

Soit $G$ un groupe **fini**, non-trivial, que l'on notera multiplicativement, de sorte que par exemple, l'élément neutre de $G$ est désigné par 1. Le corps de base est $\mathbb{C}$.

**Q. 1.** Justifier que $G$ possède au moins une représentation irréductible non-triviale sur $\mathbb{C}$.

**Q. 2.** On suppose que $H$ est un sous-groupe distingué de $G$, non-trivial, et différent de $G$. Montrer qu'il existe une représentation non-triviale de $G$ dont le caractère $\chi$ vérifie :

$$\forall h \in H,\ \chi(h) = \chi(1).$$

**Q. 3.** Soit $(S, \sigma)$ une representation irréductible de $G$, de caractère $\chi$.

**3-a.** Montrer que, pour tout $g \in G$, $\sigma(g)$ est un endomorphisme de $S$ diagonalisable, dont les valeurs propres sont des complexes de module 1.

**3-b.** Montrer que si $a_1, \ldots a_n$ sont des complexes de module 1, et si $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| = n$, alors $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

**3-c.** Montrer que $\chi(1) = \chi(g)$ si et seulement si $\sigma(g) = Id_S$.

**3-d.** Montrer que si $G$ est un groupe simple (c'est à dire sans quotient propre non-trivial) pour tout caractère irréductible non-trivial $\chi$, pour tout $g \in G \setminus \{1\}$, on a $\chi(1) \neq \chi(g)$.

**Q. 4.** Montrer que $g$ est conjugué à $g^{-1}$ dans $G$, si, et seulement si, pour tout caractère irréductible, $\chi$, on a $\chi(g) \in \mathbb{R}$.

**Q. 5.** Montrer que si $(S, \sigma)$ est une representation irréductible d'un groupe $G$, et si $H$ est un sous-groupe distingué de $G$, et si $W$ est un sous-espace de $S$, non-trivial, invariant par $\sigma(H)$ de dimension minimale, alors pour tout $g \in G$, $\sigma(g)(W)$ est soit égal à $W$, soit d'intersection triviale avec $W$, et invariant par $\sigma(H)$.

**Q. 6.** On donne la table des caractères suivante, d'un certain groupe $G_m$.

| | 1 | **a** | **b** | **c** | **d** | **e** | **f** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\chi_{triv}$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\chi_2$ | 1 | 1 | $\bar{\omega}$ | $\omega$ | 1 | $\omega$ | $\bar{\omega}$ |
| $\chi_3$ | 1 | 1 | $\omega$ | $\bar{\omega}$ | 1 | $\bar{\omega}$ | $\omega$ |
| $\chi_4$ | 2 | -2 | -1 | -1 | 0 | 1 | 1 |
| $\chi_5$ | 2 | -2 | $-\bar{\omega}$ | $-\omega$ | 0 | $\omega$ | $\bar{\omega}$ |
| $\chi_6$ | 2 | -2 | $-\omega$ | $-\bar{\omega}$ | 0 | $\bar{\omega}$ | $\omega$ |
| $\chi_7$ | 3 | 3 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 |

pour $\omega$ une racine cubique de l'unité.

**6-a.** Determiner l'ordre du groupe $G_m$. Montrer que la classe de conjugaison **a** ne contient qu'un élément et qu'il est central.

**6-b.** Montrer que l'abélianisé de $G_m$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. En déduire que le sous-groupe dérivé $D(G_m)$ est d'ordre 8 et déterminer les classes de conjugaison qui le constituent.

**6-c.** Montrer que $G_m$ est isomorphe à un produit semi-direct de $D(G_m)$ par $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

**6-d.** On considère la representation $(S_4, \sigma_4)$ de caractère $\chi_4$. Indiquer la dimension de $S_4$. Montrer que si $g$ est dans la classe **d**, alors $\sigma_4(g)$ possède deux valeurs propres simples.

**6-e.** Montrer que $D(G_m)$ n'est pas abélien (on peut utiliser les questions 5 et 6-d).

♣◇♡♠

**Problème B : Groupes cristallographiques et produits semi-directs ($\simeq$ 14 pts)**

On considère $\mathbb{R}^n \rtimes O(n)$ le groupe des isométries de l'espace affine euclidien de dimension $n$.

On rappelle que la multiplication dans $\mathbb{R}^n \rtimes O(n)$ :

$$(\vec{v}, A) \cdot (\vec{w}, B) = (\vec{v} + A(\vec{w}), AB).$$

Soit $\Gamma < \mathbb{R}^n \rtimes O(n)$ un groupe cristallographique de dimension $n$. On note $T(\Gamma)$ le sous-groupe distingué de $\Gamma$ constitué des translations : $T(\Gamma) = \Gamma \cap (\mathbb{R}^n \rtimes \{I_n\})$.

**Q. 1.** Rappeller ce que dit le premier théorème de Bieberbach au sujet de $T(\Gamma)$ et de $\Gamma/T(\Gamma)$.

**Q. 2.** On note $S = \left(\begin{smallmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, et $I_2 = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ (l'identité de $\mathbb{R}^2$). On prend l'exemple du groupe cristallographique $\Gamma_K$, sous-groupe de $\mathbb{R}^2 \rtimes O(2)$ engendré par les deux éléments suivant

$$\alpha = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ I_2\right) \qquad \text{et} \qquad \beta = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ S\right).$$

**2-a.** Déterminer l'image de $\Gamma_K$ dans $O(2)$ par l'homomorphisme quotient $\mathbb{R}^2 \rtimes O(2) \to O(2)$. On rappelle que $T(\Gamma_K) = \Gamma_K \cap (\mathbb{R}^2 \rtimes \{I_2\})$. En déduire que $T(\Gamma_K)$ est d'indice 2 dans $\Gamma$.

**2-b.** Montrer que $T(\Gamma_K)$ est engendré par $(\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right),\ I_2)$ et $(\left(\begin{smallmatrix}0\\2\end{smallmatrix}\right),\ I_2)$.

**2-c.** En distinguant selon l'appartenance à $T(\Gamma_K)$ ou à $T(\Gamma_K)\beta$, montrer que $\Gamma_K$ ne possède aucun élément d'ordre 2. En déduire que $\Gamma_K$ n'est pas un produit semi-direct par son groupe fini cristallisant.

**2-d.** On considère $\Gamma_0$ le groupe engendré par $\Gamma_K$ et $\{(\left(\begin{smallmatrix}k\\r\end{smallmatrix}\right),\ I_2),\ k, r \in \mathbb{Z}\}$. On pose $\sigma(I_2) = (\vec{0}, I_2)$ et $\sigma(S) = (\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right), S)$. Vérifier que $\sigma$ est un homomorphisme de groupe, allant de $\{I_2, S\}$ dans $\Gamma_0$.

**2-e.** En déduire que $\Gamma_0$ est un produit semi-direct d'un réseau par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

**Q. 3.** On se place à nouveau dans le cas général. On note $m$ le cardinal de l'image de $\Gamma$ dans $O(n)$. On note $T(\Gamma)^*$ le groupe de tous les éléments $(\frac{1}{m}\vec{v}, I_n)$ pour $\vec{v}$ tels que $(\vec{v}, I_n) \in T(\Gamma)\}$, et on note $\Gamma^*$ le groupe engendré par $T(\Gamma)^*$ et $\Gamma$.

**3-a.** Verifier que l'image $\overline{\Gamma^*}$ de $\Gamma^*$ dans $O(n)$ coincide avec celle de $\Gamma$.

**3-b.** Pour chaque $A$ dans $\overline{\Gamma^*}$, on choisit $\phi_A = (\vec{v}_A, A) \in \Gamma$. Pour tout $A, B$ dans $\overline{\Gamma^*}$, determiner, en fonction de $\vec{v}_A$, $A$, $\vec{v}_B$, et $\vec{v}_{AB}$, un vecteur $\tau(A, B) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\phi_A \cdot \phi_B = (\tau(A, B), I_n) \cdot \phi_{AB}$. Montrer que $\tau(A, B) \in T(\Gamma)$ (notez l'absence d'étoile).

**3-c.** Montrer que, pour $A$ fixé, la somme $\displaystyle\sum_{B \in \overline{\Gamma^*}} \tau(A, B)$ vaut $(m\vec{v}_A + (A - I_n)\vec{s})$ pour un vecteur $\vec{s}$ indépendant de $A$ que l'on explicitera.

**3-d.** On définit finalement $\sigma : \overline{\Gamma^*} \to \mathbb{R}^n \rtimes O(n)$ par $\sigma(A) = (\frac{-1}{m}(A - I_n)\vec{s},\ A)$. Montrer que $\sigma$ est un homomorphisme à valeurs dans $\Gamma^*$. En déduire que $\Gamma^*$ est un produit semidirect de $T(\Gamma)^*$ par un groupe fini.

*Fin*

# Examen du mercredi 9 janvier 2019

Durée 3 heures + tiers-temps. Documents, calculatrices et téléphones portables interdits. La notation tiendra compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

## Question de cours 1

Soient $z$ un nombre complexe, $R$ un nombre réel strictement positif, $D^*(z,R)$ le disque du plan complexe centré en $z$ de rayon $R$ privé de $z$, et $f : D^*(z,R) \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe.

1. Rappeler les trois natures possibles de la singularité $z$ de la fonction $f$.

Pour tout $r$ dans $]0,R[$, on note $A(r) = \{|f(w)|\,;\, 0 < |w-z| < r\}$.

2. Donner une caractérisation de chacune des trois situations de la question 1., qui utilise uniquement les ensembles $A(r)$ dans la limite $r \to 0$.

## Question de cours 2

Soient $R$ un nombre réel strictement positif, $\Omega$ un domaine du plan complexe contenant le disque fermé centré en 0 et de rayon $R$, et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ et $g : \Omega \to \mathbb{C}$ des fonctions holomorphes.

1. Rappeler l'énoncé du théorème de Rouché, à propos des zéros de $f$ et $g$.

2. Rappeler l'énoncé du théorème de d'Alembert et le démontrer en utilisant le résultat rappelé à la question 1.

## Exercice 1

Pour tout nombre réel $R$ strictement positif, on note $\gamma(R)$ le bord du rectangle $[-R,R] + i\cdot[0,\pi]$ orienté positivement. En appliquant le théorème des résidus aux contours $\gamma(R)$, calculer, pour tout nombre réel $t$, la valeur des intégrales

$$I(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx}}{\cosh x} dx \qquad J(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx}}{\cosh^2 x} dx$$

**T.S.V.P.**

## Exercice 2

Soit $\Omega$ un ouvert connexe borné du plan complexe et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction. On suppose que $f$ tend vers l'infini au bord de $\Omega$, au sens suivant : Pour toute suite $(z_n)$ de points de $\Omega$ convergeant vers un point du bord de $\Omega$, $\lim\limits_{n\to\infty} |f(z_n)| = \infty$.

Le but de l'exercice est de montrer que cette condition n'est jamais remplie si $f$ est holomorphe. Pour ce faire, on suppose que $f$ est holomorphe sur $\Omega$ et on note $Z = \{z \in \Omega\,;\ f(z) = 0\}$ l'ensemble de ses zéros.

1. Dans cette question, on suppose que $Z$ est vide. Utiliser la fonction $g = 1/f$ pour arriver à une contradiction.

2. Dans cette question, on suppose que $Z$ est fini, et on note $p(w) = \prod\limits_{z\in Z}(w - z)$ en comptant les zéros de $f$ avec leur multiplicité. Utiliser la fonction polynomiale $p$ pour se ramener au cas où $Z$ est vide, et en déduire que $Z$ ne peut pas être fini.

3. Dans cette question, on suppose que $Z$ est infini. Montrer qu'il existe une suite $(z_n)$ de points de $Z$, tous distincts, qui converge vers un point $z_\infty$ de $\Omega$. En déduire que $f = 0$ sur $\Omega$, donc de nouveau une contradiction.

## Exercice 3

Soient $U = \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| < 1\}$ le disque unité et $H = \{z \in \mathbb{C}\,;\ \mathfrak{Im}\, z > \mathfrak{Re}\, z\}$ un demi-plan du plan complexe.

1. Rappeler pourquoi les domaines $H$ et $U$ sont conformément équivalents.

2. Exhiber des nombres complexes $v$ et $w$ tels que, pour tout nombre complexe $z$, $|z - v| < |z - w|$ si et seulement si $z$ appartient à $H$.

3. En utilisant la question 2. ou par un autre raisonnement, exhiber une bijection biholomorphe entre $H$ et $U$.

On s'intéresse désormais aux bijections biholomorphes de $U$ dans $U$ sans point fixe.

4. Exhiber une bijection biholomorphe de $H$ dans $H$ sans point fixe.

5. Déduire de ce qui précède une bijection biholomorphe de $U$ dans $U$ sans point fixe.

**Fin.**