1
2
3
4
5
6
7

MAT36F - Calcul Différentiel L3B

Deuxième Semestre — 2022-2023

Examen terminal - mai 2023

Le barème est seulement indicatif.

Justifier toutes les réponses!

1,5pt **1.** Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 telle que $\nabla f(x) \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $L \subseteq \mathbb{R}^n$ l'ensemble de niveau 0 de f et $x_0 \in L$. Montrer que tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ tangent à L en x_0 est orthogonal à $\nabla f(x_0)$.

Solution. Soit $L_{f,c}$ l'ensemble de niveau de f de c. Soit $\alpha : J \to L_{f,c}$ une application de classe C^1 telle que $\alpha(0) = v_0$, où $J \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert tel que $0 \in J$. Alors, comme la fonction $f \circ \alpha$ est constante (avec valeur c), sa dérivée est nulle. La règle de dérivation en chaîne nous dit que

$$0 = (f \circ \alpha)'(t) = \langle \nabla f\big(\alpha(t)\big), \alpha'(t) \rangle,$$

pour tout $t \in J$. En particulier, pour $t = 0$ on a

$$0 = (f \circ \alpha)'(0) = \langle \nabla f(v_0), \alpha'(0) \rangle,$$

i.e. $T_{v_0} L_{f,c} \subseteq \{v \in \mathbb{R}^n : \langle v, \nabla f(v_0) \rangle = 0\}$.

3pt **2.** Étant donné $a, b \in \mathbb{R}$, soit $f_{a,b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application donnée par

$$f_{a,b}(x,y) = \big(\ln(1 + b^2x^2 + a^2y^2), e^{bx-ay}\big)$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

(*a*) Déterminer l'ensemble

$$C = \big\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : f_{a,b} \text{ est } \mathrm{C}^1\text{-difféomorphisme local en } (a,b)\big\}.$$

(*b*) Soit $(a,b) \in C$. Montrer qu'il existe un unique point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f_{a,b}(x_0, y_0) = (0,1)$, que l'on déterminera. La fonction $f_{a,b}$ est-elle un C^1-difféomorphisme local en (x_0, y_0) ?

Solution.

(*a*) On voit bien que

$$J_{f_{a,b}}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2b^2x}{1+b^2x^2+a^2y^2} & \frac{2a^2y}{1+b^2x^2+a^2y^2} \\ be^{bx-ay} & -ae^{bx-ay} \end{pmatrix}$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, ce qui nous dit que

$$\det\big(J_{f_{a,b}}(x,y)\big) = -2abe^{bx-ay}\frac{bx+ay}{1+b^2x^2+a^2y^2} \tag{1}$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. En conséquence,

$$\det\big(J_{f_{a,b}}(a,b)\big) = -\frac{4a^2b^2}{1+2a^2b^2}.$$

L'expression précédente nous dit que $\det(J_{f_{a,b}}(a,b)) \neq 0$ si et seulement si $ab \neq 0$. Le théorème d'inversion locale nous dit que $(a,b) \in C$, *i.e.* $f_{a,b}$ est un C^1-difféomorphisme local en (a,b), si et seulement si $\det(J_{f_{a,b}}(a,b)) \neq 0$. En conséquence, $(a,b) \in C$ si et seulement si $ab \neq 0$, *i.e.*

$$C = \big(\mathbb{R} \setminus \{0\}\big) \times \big(\mathbb{R} \setminus \{0\}\big).$$

(*b*) Soit $(a,b) \in C$, *i.e.* $a, b \neq 0$. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f_{a,b}(x_0,y_0) = (0,1)$. En particulier, $\ln(1+b^2x_0^2+a^2y_0^2) = 0$ implique que $b^2x_0^2+a^2y_0^2 = 0$, ce qui nous dit que $bx_0 = ay_0 = 0$. En conséquence, $x_0 = y_0 = 0$, car $a, b \neq 0$. En outre, comme $f(0,0) = (0,1)$, on conclut qu'il existe un unique point $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f_{a,b}(x_0,y_0) = (0,1)$, et $(x_0,y_0) = (0,0)$. L'identité (1) nous dit que $\det(J_{f_{a,b}}(0,0)) = 0$, ce qui nous dit que $f_{a,b}$ n'est pas un C^1-difféomorphisme local en $(0,0)$, d'après le théorème d'inversion locale.

3, 5pt **3.** Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2 telle que $h(0) = 0$, $h'(0) = 1$ et $h''(0) = 1$, et soit $f : \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}$ l'application donnée par

$$f(x,y) = h\big(2x^3 + \ln(|y|)\big) - 2h\big(4y^2 - x - 4\big)$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ avec $y \neq 0$.

(*a*) Calculer $f(0,1)$, $\nabla f(0,1)$ et $H_f(0,1)$.

(*b*) Justifier qu'il existe un intervalle ouvert $J \subseteq \mathbb{R}$ incluant 1 et une application $g : J \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $g(1) = 0$ et $f(g(y), y) = 0$ pour tout $y \in J$.

(*c*) Déterminer le polynôme de Taylor d'ordre 2 de g en 1.

Solution.

(*a*) C'est clair que f est de classe C^3, car f est une somme, produit et composition de fonctions de classe C^2. En plus, la règle de dérivation en chaîne nous dit que

$$\nabla f(x,y) = \Big(6x^2h'\big(2x^3+\ln(|y|)\big) + 2h'\big(4y^2-x-4\big),$$
$$y^{-1}h'\big(2x^3+\ln(|y|)\big) - 2^4yh'\big(4y^2-x-4\big)\Big)$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12xh'\big(2x^3+\ln(|y|)\big) + 36x^4h''\big(2x^3+\ln(|y|)\big) - 2h''\big(4y^2-x-4\big),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = 6x^2y^{-1}h''\big(2x^3+\ln(|y|)\big) + 2^4yh''\big(4y^2-x-4\big),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -y^{-2}h'\big(2x^3+\ln(|y|)\big) + y^{-2}h''\big(2x^3+\ln(|y|)\big)$$
$$- 2^4h'\big(4y^2-x-4\big) - 2^7y^2h''\big(4y^2-x-4\big),$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ avec $y \neq 0$. L'expression de f nous dit que

$$f(0,1) = h(0) - 2h(0) = 0,$$

ainsi que

$$\nabla f(0,1) = \big(0.h'(0) + 2h'(0), h'(0) - 16h'(0)\big) = (2,-15)$$

et

$$H_f(0,1) = \begin{pmatrix} -2 & 16 \\ 16 & -144 \end{pmatrix}.$$

(b) Comme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 2 \neq 0,$$

le théorème de la fonction implicite nous dit qu'il existe un intervalle ouvert $J \subseteq \mathbb{R}$ incluant 1 et une application $g : J \to \mathbb{R}$ de classe C^3 telle que $g(1) = 0$ et $f(g(y),y) = 0$ pour tout $y \in J$.

(c) Le théorème de la fonction implicite (ou sinon la règle de dérivation en chaîne et l'identité $f(g(y),y) = 0$ pour tout $y \in J$) nous dit que

$$0 = \frac{d}{dy}\Big(f\big(g(y),y\big)\Big) = g'(y)\frac{\partial f}{\partial x}\big(g(y),y\big) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(g(y),y\big)$$

et

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d^2}{dy^2}\Big(f\big(g(y),y\big)\Big) = \frac{d}{dy}\Big(g'(y)\frac{\partial f}{\partial x}\big(g(y),y\big) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(g(y),y\big)\Big) \\
&= g''(y)\frac{\partial f}{\partial x}\big(g(y),y\big) + g'(y)\frac{d}{dy}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\big(g(y),y\big)\Big) + \frac{d}{dy}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\big(g(y),y\big)\Big) \\
&= g''(y)\frac{\partial f}{\partial x}\big(g(y),y\big) + g'(y)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\big(g(y),y\big) + 2g'(y)\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\big(g(y),y\big) \\
&\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\big(g(y),y\big)
\end{aligned}$$

pour tout $y \in J$. En particulier,

$$0 = g'(1)\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 2g'(1) - 15,$$

et

$$\begin{aligned}0 &= g''(1)\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) + g'(1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) + 2g'(1)\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1) \\ &= 2g''(1) - 2g'(1)^2 + 32g'(1) - 144,\end{aligned}$$

ce qui implique que $g'(1) = 15/2$ et $g''(1) = 33/4$. En conséquence, le polynôme de Taylor d'ordre 2 de g en 1 est de la forme

$$\begin{aligned}g(1) + g'(1)(y-1) + \frac{g''(1)}{2}(y-1)^2 &= 0 + \frac{15}{2}(y-1) + \frac{33}{8}(y-1)^2 \\ &= -\frac{27}{8} - \frac{3}{4}y + \frac{33}{8}y^2.\end{aligned}$$

3pt **4.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application donnée par

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) Déterminer tous les extremums locaux de f.

(b) Montrer que la fonction f est minorée. Est-ce qu'elle est majorée ? Déterminer les extremums globaux de f, s'ils existent.

Solution.

(a) On voit bien que f est de classe C^∞, vu qu'elle est une fonction polynômial. Comme tout extremum local est un point critique, on va classifier les points critiques de f. En outre,

$$\nabla f(x,y) = \big(4(x^3 - y), 4(y^3 - x)\big)$$

et

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. En conséquence, les points critiques de f sont précisément les $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ solutions du système

$$\begin{cases} x^3 = y, \\ y^3 = x. \end{cases} \tag{2}$$

Alors, si $x = 0$ ou $y = 0$, on conclut que la solution est $(0,0)$. Si $x, y \neq 0$, le système précédent devient $x^2 = y^2 = 1$, ce qui nous donne les solutions $(-1,-1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$ et $(1,1)$. Les points $(-1,1)$, $(1,-1)$ ne satisfont les identités (2), tandis que les autres points satisfont ces identités. En conséquence, on voit bien que les points critiques de f sont $(0,0)$, $(-1,-1)$ et $(1,1)$. Le critère de la matrice hessienne nous dit que

(a) $(0,0)$ est un point col, car $\det(H_f(0,0)) = -16 < 0$,

(b) $(\pm 1, \pm 1)$ est un minimum local, car $\det(H_f(\pm 1, \pm 1)) = 108 > 0$ et $\operatorname{tr}(H_f(\pm 1, \pm 1)) = 24 > 0$.

Noter que $f(1,1) = f(-1,-1) = -2$.

(*b*) On voit bien que

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy = (x^2 - y^2)^2 + 2x^2y^2 - 4xy = (x^2 - y^2)^2 + 2(xy-1)^2 - 2$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, ce qui implique que $f(x,y) \geq -2$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. En conséquence, f est minorée. Comme $f(x,y) \geq -2 = f(1,1) = f(-1,-1)$, on conclut que $(-1,-1)$ et $(1,1)$ sont des minimums globaux de f. Comme tout minimum global est un minimum local, on conclut que les minimums globaux de f sont précisément $(-1,-1)$ et $(1,1)$.

Comme

$$\lim_{x \to +\infty} f(x,0) = \lim_{x \to +\infty} x^4 = +\infty,$$

la fonction f n'est pas majorée. En particulier, f ne possède pas de maximum global.

$3,5$pt **5.** (*a*) Calculer les applications 2-fois différentiables $x :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ qui satisfont que $x''(t) + 4x(t) = 0$ pour tout $t \in]-\pi/2, \pi/2[$.

(*b*) Calculer les applications 2-fois différentiables $x :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ qui satisfont que $x''(t) + 4x(t) = \tan(t)$ pour tout $t \in]-\pi/2, \pi/2[$.
Indication : Utiliser que $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(*c*) Parmi les applications $x :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ dans l'item précédent, déterminer l'unique application qui satisfait que $x(0) = 1$ et $x'(0) = 2$.

Solution.

(*a*) Si l'on propose que $x(t) = e^{rt}$ avec $r \in \mathbb{C}$ pour $t \in]-\pi/2, \pi/2[$, alors $x''(t) + 4x(t) = 0$ devient $e^{rt}(r^2 + 4) = 0$, ce qui implique que $r \in \{-2i, 2i\}$. En conséquence, une base de l'espace de solutions de $x''(t) + 4x(t) = 0$ pour tout $t \in]-\pi/2, \pi/2[$ est donnée par $\{\cos(2t), \sin(2t)\}$ définies pour $t \in]-\pi/2, \pi/2[$, et, en conséquence, toute solution de l'EDO homogène est précisément de la forme

$$x_H(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t)$$

pour $t \in]-\pi/2, \pi/2[$, où $A, B \in \mathbb{R}$. On écrira $x_1(t) = \cos(2t)$ et $x_2(t) = \sin(2t)$ pour $t \in]-\pi/2, \pi/2[$. Noter que $W(x_1, x_2)(t) = 2$ pour tout $t \in]-\pi/2, \pi/2[$.

(*b*) D'après l'expression donnée dans la dernière page, on a que toute solution x :

$]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ qui satisfait que $x''(t) + 4x(t) = \tan(t)$ est donnée par

$$\begin{aligned} x(t) &= -\cos(2t) \int \frac{\tan(t)\sin(2t)}{2} dt + \sin(2t) \int \frac{\tan(t)\cos(2t)}{2} dt \\ &= -\cos(2t) \int \sin^2(t) dt + \sin(2t) \int \frac{\sin(2t) - \tan(t)}{2} dt \\ &= -\cos(2t) \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4} + C \right] + \sin(2t) \left[-\frac{\cos(2t)}{4} + \frac{\ln\big(|\cos(t)|\big)}{2} + D \right] \\ &= -\cos(2t) \left[\frac{t}{2} + C \right] + \sin(2t) \left[\frac{\ln\big(|\cos(t)|\big)}{2} + D \right] \end{aligned}$$

pour tout $t \in]-\pi/2, \pi/2[$, où l'on a utilisé que $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$ et $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(*c*) D'après l'expression précédente on voit bien que $x(0) = -C$ et $x'(0) = 2D - 1/2$, ce qui nous dit que $C = -1$ et $D = 5/4$, *i.e.*

$$x(t) = -\cos(2t) \left[\frac{t}{2} - 1 \right] + \sin(2t) \left[\frac{\ln\big(|\cos(t)|\big)}{2} + \frac{5}{4} \right]$$

pour $t \in]-\pi/2, \pi/2[$.

1,5pt **6.** Soit $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ une courbe de classe C^1 et régulière. Soit $g : [c, d] \to [a, b]$ un reparamétrage de α. Montrer que la longueur de α coïncide avec la longueur de $\alpha \circ g$.

Solution. On voit bien que

$$\begin{aligned} \ell(\alpha \circ g) &= \int_c^d \big\|(\alpha \circ g)'(s)\big\| ds = \int_c^d \big\|\alpha'(g(s)).g'(s)\big\| ds \\ &= \int_c^d \big\|\alpha'(g(s))\big\|.\big|g'(s)\big| ds = \int_a^b \|\alpha'(r)\| dr = \ell(\alpha), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la règle de dérivation en chaîne dans la deuxième égalité et le théorème de changement de variable dans la quatrième égalité.

4pt **7.** Étant donné $a > 0$, soit $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ l'application de classe C^∞ donnée par $\alpha(t) = (3a(t^2 - 3), at(t^2 - 3))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(*a*) Déterminer l'ensemble $\mathrm{NR} = \{t \in \mathbb{R} : \alpha'(t) = (0, 0)\}$.

(*b*) Montrer que l'image de α est $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 27ay^2 = x^2(x + 9a)\}$.

[bonus] (*c*) Trouver un reparamétrage positif $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de α telle que $\alpha \circ g$ soit paramétrée par longueur d'arc.

Indication : Utiliser le dernier item dans la page suivante.

(d) Calculer le vecteur tangent $\mathbf{t}_\alpha(t)$ à α, le vecteur normal $\mathbf{n}_\alpha(t)$ à α et la courbure $\kappa_\alpha(t)$ à tout temps $t \in \mathbb{R}$ pour lequel ils soient définis.

Solution.

(a) Comme

$$\alpha'(t) = \big(6at, 3a(t^2-1)\big)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, on voit bien que

$$||\alpha'(t)||^2 = 36a^2t^2 + 9a^2(t^2-1)^2 = 9a^2(t^2+1)^2$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui nous dit que

$$||\alpha'(t)|| = 3a(t^2+1) \tag{3}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. En particulier, $||\alpha'(t)|| \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui nous dit que $\alpha'(t) \neq (0,0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, *i.e.* $\mathsf{NR} = \emptyset$.

(b) On voit bien que $x = 3a(t^2-3)$ et $y = at(t^2-3)$ pour $t \in \mathbb{R}$ nous dit que

$$\frac{x}{3a} + 3 = \frac{x+9a}{3a} = t^2,$$

et

$$\frac{y^2}{a^2} = t^2(t^2-3)^2 = \frac{x+9a}{3a}\frac{x^2}{9a^2},$$

ce qui implique que

$$27ay^2 = (x+9a)x^2,$$

i.e. l'image de α est incluse dans $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 27ay^2 = x^2(x+9a)\}$. Or, soit $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $27ay_0^2 = x_0^2(x_0+9a)$. Noter que cela nous dit que $x_0+9a \geq 0$. On définit

$$t_0 = \mathsf{sgn}(x_0)\,\mathsf{sgn}(y_0)\sqrt{\frac{x_0+9a}{3a}} \in \mathbb{R},$$

où $\mathsf{sgn}(c) = 1$ si $c \in \mathbb{R}_{>0}$, $\mathsf{sgn}(c) = -1$ si $c \in \mathbb{R}_{<0}$ et $\mathsf{sgn}(0) = 0$. Alors,

$$\begin{aligned}\alpha(t_0) &= \big(3a(t_0^2-3), at_0(t_0^2-3)\big) = \left(x_0, \mathsf{sgn}(x_0)\,\mathsf{sgn}(y_0)\sqrt{\frac{x_0+9a}{3a}}\frac{x_0}{3}\right)\\ &= \left(x_0, \mathsf{sgn}(y_0)\sqrt{\frac{(x_0+9a)x_0^2}{27a}}\right) = \left(x_0, \mathsf{sgn}(y_0)\sqrt{y_0^2}\right) = (x_0,y_0),\end{aligned}$$

ce qui nous dit que (x_0,y_0) est dans l'image de α. En conséquence, l'image de α est $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 27ay^2 = x^2(x+9a)\}$.

(c) D'après le résultat du cours, l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de α donnée comme la réciproque de $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(t) = \int_0^t ||\alpha'(u)||du$$

pour $t \in \mathbb{R}$, donne un reparamétrage positif de α telle que $\alpha \circ g$ soit paramétrée par longueur d'arc. D'après (3),

$$h(t) = \int_0^t 3a(u^2+1)du = at^3 + 3at$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. La valeur $g(s)$ de l'application réciproque g de h est alors l'unique racine réelle du polynôme $at^3 + 3at = s$, *i.e.*

$$t^3 + 3t - \frac{s}{a} = 0.$$

L'indication dans la dernière page nous dit alors que le reparamétrage est alors

$$g(s) = \sqrt[3]{\frac{s + \sqrt{s^2 + 4a^2}}{2a}} - \sqrt[3]{\frac{2a}{s + \sqrt{s^2 + 4a^2}}}.$$

(d) On voit bien que

$$\mathbf{t}_\alpha(t) = \frac{\alpha'(t)}{||\alpha'(t)||} = \left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1}\right),$$
$$\mathbf{n}_\alpha(t) = \left(\frac{1-t^2}{t^2+1}, \frac{2t}{t^2+1}\right),$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. Finalement, si l'on utilise l'expression de la courbure rappelée dans la dernière page, on conclut que

$$\kappa_\alpha(t) = \frac{18a^2(t^2+1)}{27a^3(t^2+1)^3} = \frac{2}{3a(t^2+1)^2}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Formules utiles

1. Pour $p, q, r \in \mathsf{C}^0(J, \mathbb{R})$, où $J \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert. Alors, l'application $x : J \to \mathbb{R}$ qui satisfait
$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = r(t)$$
pour tout $t \in J$ est donnée par
$$x(t) = -x_1(t) \int \frac{r(t)x_2(t)}{W(x_1, x_2)(t)} dt + x_2(t) \int \frac{r(t)x_1(t)}{W(x_1, x_2)(t)} dt$$
pour tout $t \in J$, où $x_1, x_2 : J \to \mathbb{R}$ forment une base de solutions de l'équation homogène et $W(x_1, x_2) = x_1 x_2' - x_2 x_1'$.
2. Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ est une courbe régulière avec $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$, alors
$$\kappa_\alpha(t) = \frac{\alpha_1'(t)\alpha_2''(t) - \alpha_2'(t)\alpha_1''(t)}{[(\alpha_1'(t))^2 + (\alpha_2'(t))^2]^{3/2}},$$
pour tout $t \in I^\circ$ si le dénominateur est non nul.
3. Pour $c \in \mathbb{R}$ non nul, le polynôme $x^3 + 3x + c = 0$ possède une seule racine réelle de la forme $x = u - u^{-1}$ avec $u \in \mathbb{R}_{>0}$, où u est la solution positive de l'équation $u^6 + cu^3 - 1 = 0$.

UNIVERSITÉ GRENOBLE-ALPES **2022-2023**

Algèbre L3A : Examen du 5 janvier 2022

Durée : 4h.

Documents, calculatrices et téléphones portables interdits.

Problème A. Soient G et H deux groupes finis.

A1. Montrer que l'application
$$f : \mathrm{Aut}(G) \times \mathrm{Aut}(H) \to \mathrm{Aut}(G \times H)$$
définie par $f(\varphi, \psi)(g, h) = (\varphi(g), \psi(h))$ est un homomorphisme de groupes, puis que f est injectif.

A2. Donner un exemple où f n'est pas surjectif.
On suppose maintenant que G et H sont d'ordre premiers entre eux.

A3. Soit $\alpha \in \mathrm{Aut}(G \times H)$. Montrer qu'il existe des uniques homomorphismes de groupes $p_\alpha : G \to G$ et $p'_\alpha : G \to H$ tels que $\alpha(g, 1) = (p_\alpha(g), p'_\alpha(g))$ pour tout $g \in G$.

A4. Montrer que $p'_\alpha(g)$ est l'homomorphisme trivial.

A5. Montrer que p_α est un automorphisme.

A6. Déduire des points précédents que pour tout automorphisme $\alpha \in \mathrm{Aut}(G \times H)$ et tout $(g, h) \in G \times H$ il existe des uniques automorphismes $p_\alpha : G \to G$ et $q_\alpha : H \to H$ tels que $\alpha(g, h) = (p_\alpha(g), q_\alpha(h))$.

A7. Montrer que f est un isomorphisme.

Problème B. Soit G un groupe d'ordre $255 = 3 \cdot 5 \cdot 17$.

B1. Montrer que G possède un unique 17-Sylow H_{17}. Justifier l'existence de $y \in G$ tel que $H_{17} = \langle y \rangle$.

B2. Quel est l'ordre du groupe G/H_{17} ? En déduire l'existence de $x \in G$ tel que $G/H_{17} = \langle \overline{x} \rangle$.

B3. Montrer que $15 \mid o(x)$. En déduire que $o(x) = 15$ ou 255.
On suppose dans ce qui suit que $o(x) = 15$.

B4. Montrer qu'il existe $0 \leq m \leq 16$ tel que $xyx^{-1} = y^m$, puis que $m^{15} \equiv 1 \pmod{17}$. En déduire que l'ordre de $[m]_{17}$ dans $(\mathbb{Z}/17)^\times$ divise 15, où $[m]_{17}$ désigne la classe de m modulo 17.

B5. Quel est l'ordre de $(\mathbb{Z}/17)^\times$? En déduire que $o([m]_{17}) \mid 16$, puis que $m = 1$.

B6. Quel est l'ordre de xy ?

B7. Combien existe-t-il de groupes d'ordre 255 à isomorphisme près ?

Problème C. Soit $A = \mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. On définit

$$N\colon A \to \mathbb{N}$$

par $N(z) = a^2 + b^2$ pour $z = a + bi$, et on rappelle que $N(z \cdot z') = N(z) \cdot N(z')$. On pourra utiliser (sans le démontrer) que A est un anneau principal. On s'intéresse à l'ensemble

$$\Sigma = \{a^2 + b^2 \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

C1. Montrer que $n \in \Sigma$ si et seulement s'il existe $z \in A$ tel que $n = N(z)$. En déduire que Σ est stable par multiplication.

C2. Montrer qu'un nombre premier p est réductible dans A si et seulement si $p \in \Sigma$.

C3. Soit p un nombre premier impair. Montrer que -1 est un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si et seulement si $(-1)^{\frac{p-1}{2}} = 1$.

C4. Soit p un nombre premier. Montrer qu'on a des isomorphismes

$$\mathbb{Z}[i]/(p) \simeq \mathbb{Z}[X]/(X^2 + 1, p) \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]/(X^2 + \overline{1}).$$

C5. En déduire l'équivalence des propriétés suivantes :
(1) p est réductible dans A ;
(2) -1 est un carré modulo p ;
(3) $p = 2 \pmod 4$ ou $p = 1 \pmod 4$.
Si $n \in \mathbb{N}$ et p est un nombre premier, on note $v_p(n) = m$ si $n = p^m q$ avec q premier à p.

C6. Soit $n \geq 2$. Montrer que $n \in \Sigma$ si et seulement si $v_p(n)$ est pair pour tout $p = 3 \pmod 4$. *Indication.* Si $n = a^2 + b^2$, et si $p = 3 \pmod 4$ divise n, montrer que $p \mid a + ib$ ou $p \mid a - ib$. En déduire que $p^2 \mid n$, et procéder par récurrence.

C7. Montrer que les éléments irréductibles de A sont :
(1) les éléments $\pm p, \pm ip$, où p est premier et congru à 3 modulo 4 ;
(2) les éléments $\pi \in A$ tels que $N(\pi)$ soit un nombre premier.
Indication. Si $\pi \in A$ est irréductible, considérer un diviseur premier p de $N(\pi)$, et distinguer les cas $p = 3 \pmod 4$ et $p = 1 \pmod 4$. Dans le second cas, utiliser le fait que $p \in \Sigma$.

Problème D. Soit E un k-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, et soit $u \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme de E. On rappelle qu'un sous-espace F de E est stable par u si $u(F) \subset F$. Dans ce cas, on note $u_F \in \mathrm{End}(F)$ l'endomorphisme de F induit par u. Si $x \in E$, on pose

$$E_x = \mathrm{Vect}(u^m(x), m \geq 1).$$

D1. Soit $Q \in k[X]$, et soit $x \in E$. Montrer que les sous-espaces $\ker(Q(u))$ et E_x sont stables par u.

D2. Soit F un sous-espace stable par u. Montrer que $\mu_{u_F} \mid \mu_u$.

Soit $\pi \in k[X]$ un polynôme **irréductible** unitaire de degré d. Si

$$\pi = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \ldots + a_0,$$

on pose

$$C(\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ 0 & 1 & & & -a_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{d-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_d(k).$$

D3. On rappelle que $\chi_{C(\pi)} = \pi$. Montrer que $\mu_{C(\pi)} = \pi$.

Dans toute la suite, on considère un endomorphisme $u \in \mathrm{End}(E)$ tel que $\mu_u = \pi$.

D4. Justifier que $\chi_u = \pi^r$ pour un entier $r \geq 1$, et en déduire que $d \mid n$.

D5. On suppose que $n = dr$. Soit $u \in \mathrm{End}(E)$. On suppose **dans cette question seulement** qu'il existe une base $\mathbf{e}$ de E telle que $\mathrm{Mat}(u, \mathbf{e})$ soit la matrice diagonale par blocs

$$\begin{pmatrix} C(\pi) & & \\ & \ddots & \\ & & C(\pi) \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\mu_u = \pi$.

D6. On revient au cas général. Soit $x \in E, x \neq 0$.

(a) Montrer que $\mu_{u_{E_x}} = \pi$.

(b) Soit $P \in k[X]$ tel que $P(u)(x) = 0$. Montrer que $P(u_{E_x}) = 0$, puis $\pi \mid P$.

(c) En déduire que $(x, \ldots, u^{d-1}(x))$ est une famille libre.

(d) Montrer également qu'elle est génératrice et en déduire la dimension de E_x.

D7. Soit F un sous-espace de E stable par u, et soit $x \in E, x \notin F$. Montrer que $F \cap E_x = \{0\}$. *Indication :* si $y \in F \cap E_x$, montrer que $E_y \subset F \cap E_x$. En déduire que si $y \neq 0$, alors $E_y = E_x$ et obtenir une contradiction.

D8. Montrer qu'il existe $x_1, \ldots, x_r \in E$ non nuls tels que

$$E = E_{x_1} \oplus \ldots \oplus E_{x_r},$$

et en déduire l'existence d'une base $\mathbf{e}$ de E telle que $\mathrm{Mat}(u, \mathbf{e})$ soit la matrice diagonale par blocs

$$\begin{pmatrix} C(\pi) & & \\ & \ddots & \\ & & C(\pi) \end{pmatrix}.$$

D9. En déduire que deux endomorphismes $u, u' \in \mathrm{End}(E)$ tels que $\mu_u = \mu_{u'} = \pi$ sont semblables.

D10. Le résultat subsiste-t-il si π n'est pas irréductible ? Justifier.

Université Grenoble Alpes
L3 Mathématiques, UE de Géométrie

UFR IM2AG
2022-2023

Examen

Mardi 2 mai 2023

Aucun document ni calculatrice autorisé.

Questions de cours. Soit E un espace affine euclidien.

1. Soient F_1, F_2, F_3 trois sous-espaces affines de E. On suppose que $F_1 /\!/ F_2$ et $F_2 /\!/ F_3$. Montrer que $F_1 /\!/ F_3$.

2. Soit $f : E \to E$ une application affine telle que $\vec{f} = \mathrm{id}_{\vec{E}}$. Montrer que f est une translation.

3. (*Hyperplan médiateur*) Soient A et B deux points distincts de E. Soit $H = \{M \in E \mid AM = BM\}$ l'ensemble des points de E équidistants de A et B. Démontrer que H est l'hyperplan orthogonal à la droite (AB) passant par le milieu I de $[A, B]$.

Exercice 1 *Les questions 1 et 2 sont indépendantes.*

1. Soit E un plan affine euclidien orienté, rapporté à un repère orthonormé direct. Soit C le point de coordonnées $(2, 1)$ et $\Theta \in \mathbb{R}$. On note $r : E \to E$ la rotation d'angle Θ et de centre C. Donner l'expression en coordonnées de r.

2. On se place dans l'espace affine euclidien $E = \mathbb{R}^3$, muni de son orientation canonique. On définit $f : E \to E$ par $f(x, y, z) := (x', y', z')$ avec $\begin{cases} x' = z + 2 \\ y' = x - 1 \\ z' = y - 1 \end{cases}$.

   (a) Montrer que f est affine et donner sa partie linéaire $\vec{f}$;

   (b) Montrer que f est une isométrie ;

   (c) Déterminer la nature de f et ses éléments caractéristiques.

Exercice 2 On se place dans l'espace affine euclidien $E = \mathbb{R}^3$. On note P le plan d'équation $x + y + z = 1$. On note $\overrightarrow{D} = \overrightarrow{P}^{\perp}$. Soit $\Omega = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. *Les questions 2 et 4 sont indépendantes.*

1. Donner une base $(\vec{v}, \vec{w})$ de $\overrightarrow{P}$ et un vecteur $\vec{u}$ non nul de $\overrightarrow{D}$; Justifier que $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\overrightarrow{E}$;
2. Soient $A = (-1, 1, 1)$, $B = (1, -1, 1)$ et $C = (1, 1, -1)$. Soit $F = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.
   (a) Les droites (BF) et (AC) sont-elles parallèles ?
   (b) Montrer que $\mathcal{A} = (A, B, C)$ est un repère affine de P ;
   (c) Vérifier que $F \in P$ et calculer ses coordonnées barycentriques dans le repère $\mathcal{A}$.
   (d) En déduire que le point $K = \mathrm{Bar}((A, 4), (C, 1))$ est le point d'intersection des droites (BF) et (AC), et le calculer.
3. Déterminer la projection orthogonale H de Ω sur P;
4. On note $s_\Omega : E \to E$ la symétrie centrale de centre Ω et $s_P : E \to E$ la symétrie orthogonale par rapport au plan P. On note $g = s_P \circ s_\Omega$.
   (a) Montrer que g est une isométrie ;
   (b) Donner la matrice M_1 de $\overrightarrow{s_\Omega}$ et la matrice M_2 de $\overrightarrow{s_P}$ dans la base $\mathcal{B}$;
   (c) En déduire que $\vec{g}$ est une symétrie vectorielle orthogonale d'axe $\overrightarrow{D}$;
   (d) Montrer que $\overrightarrow{\Omega g(\Omega)} \in \overrightarrow{D}$;
   (e) Déterminer la nature géométrique de g et ses éléments caractéristiques ;

Exercice 3 Soit E un espace affine de dimension 3. Soient D_1, D_2 et D_3 trois droites de E. Pour $i = 1, 2, 3$ soit $\vec{v}_i$ un vecteur directeur de D_i. On suppose que $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est une base de $\overrightarrow{E}$. Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe une droite $\Delta \subset E$ parallèle à D_3, rencontrant D_1 et D_2. Soit A un point de D_1 et $Q = A + \mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_3)$.

1. Montrer que le plan Q contient la droite D_1.
2. Montrer que Q intersecte D_2 en un unique point que l'on notera B.
3. Soit $\Delta = B + \mathrm{Vect}(\vec{v}_3)$. Montrer que $\Delta \subset Q$ et en déduire que Δ convient.

Université Grenoble Alpes

Intégration et probabilités (Licence de mathématiques)

Examen de mai 2023

Durée : 4h00

Sans calculatrice, ni document.

Le barème est donné à titre indicatif

Questions de cours [3 points]

1) Donner la définition d'une fonction étagée f sur le segment $[a, b]$. La fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ est-elle étagée sur $[0, 1]$?

2) Démontrer que si f est continue sur $[a, b[$, à valeurs positives. alors $\int_a^b f(t)dt$ est convergente si et seulement si la fonction $F : x \to \int_a^x f(t)dt$ est majorée.

3) Expliquer la méthode des rectangles pour approximer l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ où f est une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$. Estimer le terme d'erreur.

4) Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles, de densité f_X. A quelle condition X admet-elle une espérance $\mathbb{E}(X)$ (dont on donnera la définition) ? Application : considérer le cas où $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ (Loi normale). On admettra que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}dx = \sqrt{2\pi}$.

Exercice 1 [4 points]

1) Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$, l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ converge-t-elle ?

2) Déterminer une primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction $f(x) = \ln(x)$. En déduire que f est intégrable sur $]0, 1]$.

On pourra utiliser ces résultats dans la suite sans refaire la démonstration.

3) Etudier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^3 + 1}dx$. On ne cherchera pas à la calculer.

4) Pour chacune des intégrales, étudier la convergence et, si possible, les calculer.

4a) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)}dx$.

4b) $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^3}dx$.

4c) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2 + x + 1}dx$ (on pourra utiliser en le justifiant le changement de variable $t = 1/x$).

Exercice 2 [3 points]

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction concave et continue telle que $f(0) = 1$ (Rappel : une fonction f est concave sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ si pour tous x, $y \in I$, tout $u \in [0, 1]$, $f(ux + (1-u)y) \geq uf(x) + (1-u)f(y)$). Le but de l'exercice est de montrer que

$$\int_0^1 xf(x)dx \leq \frac{2}{3}\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2.$$

Pour simplifier les notations, on pose $A = \int_0^1 f(x)dx$ et $B = \int_0^1 xf(x)dx$.

1) Justifier que f admet une unique primitive F sur $[0, 1]$ qui s'annule en 0 (on exprimera F en fonction de f) puis en, utilisant une intégration par parties, que

$$B = A - \int_0^1 \left(\int_0^x f(t)dt\right) dx.$$

2) Soit $x \in]0,1]$. En utilisant la concavité de f sur $[0,1]$, montrer que pour tout $t \in [0,x]$, $f(t) \geq \frac{f(x)-1}{x}t + 1$ (rappel : $f(0) = 1$), puis que $\int_0^x f(t)dt \geq \frac{xf(x)+x}{2}$. En déduire une minoration de $A - B$ en fonction de B.

3) Déduire des questions précédentes que $B \leq \frac{2}{3}\left(A - \frac{1}{4}\right)$, et conclure.

Exercice 3 [3 points]

Pour s'aider, on pourra essayer dans la suite de représenter les domaines d'intégration D et Ω.

1a) Donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f(x) = \sin^3(x)$.

1b) Donner la formule de changement en coordonnées polaires pour une intégrale double. En déduire $\int\int_D \sqrt{2 - x^2 - y^2}dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 2x\}$.

2) Calculer l'intégrale triple $\int\int\int_\Omega (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$ où $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$.

Exercice 4 [2 points]

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose, sous réserve d'existence, $f(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(xt)}{\sin(t)}dt$.

1) Démontrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leq |x|$ et que pour tout $x \in [0,\pi/2]$, $\sin(x) \geq \frac{2x}{\pi}$ (on pourra utiliser ces résultats dans la suite même s'ils ne sont pas démontrés).

2b) Déterminer $\lim_{x \to 0^+} f(x)$.

3a) Enoncer et démontrer le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre (sur un segment).

3b) Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 [5 points]

On effectue une série d'expériences du type succès-échec, indépendantes, avec une probabilité de succès commune égale à p ($p \in]0,1[$).On se place donc dans l'univers $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ muni de la probabilité $\mathbb{P}$ rendant les lancers mutuellement indépendants. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit T_n la variable aléatoire donnant le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le n-ième succès. On notera S_i (respectivement E_i) l'événement "Obtenir un succès au rang i" (respectivement l'événement "Obtenir un échec au rang i"). On utilisera sans démonstration que si la variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre p, $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$ et $var(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

1) Déterminer la loi de T_1. Reconnaitre cette loi. En déduire $\mathbb{E}(T_1)$ et $var(T_1)$.

2) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \geq n$. Si $j \in \mathbb{N}^*$, démontrer que $\mathbb{P}((T_n = i) \cap (T_{n+1} - T_n = j)) = \mathbb{P}(T_n = i)\mathbb{P}(E_{i+1} \cap ... \cap E_{i+j-1} \cap S_{i+j})$ (on pourra considérer à part le cas $j = 1$). En déduire que $\mathbb{P}(T_{n+1} - T_n = j | T_n = i) = p(1-p)^{j-1}$.

3a) Enoncer et démontrer la formule des probabilités totales.

3b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déduire des question 2 et 3a) que $T_{n+1} - T_n$ suit une loi géométrique de paramètre p. En déduire $\mathbb{E}(T_{n+1} - T_n)$ et $var(T_{n+1} - T_n)$. Ces résultats seront très utiles dans la suite.

4) Déterminer $\mathbb{E}(T_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (On pourra noter que $T_n = \sum_{k=2}^n (T_k - T_{k-1}) + T_1$).

5a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que $T_{n+1} - T_n$ et T_n sont indépendantes (on pourra utiliser les calculs de la question 2).

5b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = var(T_n)$, c'est à dire u_n est la variance de T_n. Déduire de 5a) que la suite (u_n) est arithmétique de raison $\frac{p-1}{p^2}$ (on énoncera avec soin, mais sans démonstration, la propriété du cours utilisée). En déduire $var(T_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Examen
Calcul différentiel et équations différentielles

3 mai 2023

Documents, calculatrices et téléphones portables interdits.
Dans la notation, il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.
Durée : 3h

Autour du cours

1. Enoncer la formule de Taylor-Lagrange en toute dimension. Préciser les hypothèses.

2. On considère l'équation différentielle

$$\frac{du}{dt} = A(t)u(t), \tag{1}$$

où $A(t) \in C(I; M_n(\mathbb{R}))$ pour un certain intervalle ouvert I contenant 0.

(a) Montrer que pour toute donnée initiale $u(0) = u_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe une solution unique $u \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$.

(b) Montrer que l'ensemble des solutions de (1) est un sous-espace vectoriel de $C^1(I; \mathbb{R}^n)$ de dimension n.

Exercice 1

Soit X un espace de Banach et $E = \mathcal{L}_c(X)$ l'espace vectoriel normé des applications linéaires continues sur X muni de la norme d'opérateurs.

1. En utilisant seulement la définition de la différentiabilité, montrer que $f : E \ni A \mapsto A \circ A \in E$ est différentiable en tout point $A \in E$ et donner l'expression de sa différentielle.

2. Montrer que f est deux fois différentiable et donner l'expression de sa différentielle seconde.

3. Soit $U = Isom(X)$ l'ensemble des isomorphismes de X. On rappelle que U est un ouvert de E. Montrer que $g : U \ni A \mapsto A^{-1} \in E$ est différentiable et donner l'expression de sa différentielle.

4. Montrer que $h = f \circ g$ est différentiable sur U et donner l'expression de sa différentielle.

Exercice 2 Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ et C l'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x, y) = 0$.

1. Au voisinage de quels points la relation $f(x, y) = 0$ détermine-t-elle y en fonction de x, x en fonction de y par le théorème de fonctions implicites ?

2. Calculer la dérivée de la fonction implicite en fonction de la fonction implicite elle-même lorsqu'elle existe et écrire l'équation de la tangente à C en tout point $(a, b) \neq (0, 0)$.

T.S.V.P.

Exercice 3 (Plus petite valeur propre d'une matrice symétrique)

On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel $\langle .,. \rangle$, et de la norme euclidienne associée, notée $\|.\|_2$. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique, et soit f la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) := \langle Ax, x \rangle$. Montrer que

1. f est de classe C^∞.
2. Il existe $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|v\|_2 = 1$ et $f(v) = \inf_{\|x\|_2=1} f(x)$.
3. v est un vecteur propre de A, c.à.d. il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Av = \lambda v$.
4. λ est la plus petite valeur propre de A.

Exercice 4 (Cylindre) Soit $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ y^2 + z^2 = 1\}$.

1. Dessiner M.
2. Montrer que M est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer l'espace affine tangent $T_{(0,0,1)}M$.

Exercice 5 (Lotka-Volterra)

Dans cet exercice on étudie le système Lotka-Volterra (système proie-prédateur)

$$\left.\begin{array}{rcl} x'(t) & = & x(t)(a - by(t)), \\ y'(t) & = & y(t)(-c + dx(t)), \end{array}\right\} \tag{2}$$

$$(x(0), y(0)) = (x_0, y_0), \tag{3}$$

où $a, b, c, d > 0$ et x_0, $y_0 \geq 0$. On cherche une solution $M(t) = (x(t), y(t)) \in C^1(I; \mathbb{R}^2)$ pour un certain intervalle I contenant 0.

1. Existence, unicité, solutions particulières.
   (a) Montrer qu'il existe un intervalle ouvert I contenant 0 et une solution maximale unique $M(t) = (x(t), y(t)) \in C^1(I; \mathbb{R}^2)$ de (2), (3).
   (b) Montrer que si $x_0 = 0$, alors $x(t) = 0$ pour tout $t \in I$.
   (c) Montrer que si $x_0 > 0$, alors $x(t) > 0$ pour tout $t \in I$.
   Des résultats analogues à (b), (c) sont valables pour $y(t)$, on les admet dans la suite.
   (d) Soit $H(x, y) = dx - c \ln x + by - a \ln y$. Montrer que $H(x(t), y(t))$ est constante pour toute solution $M(t)$ de (2).
   (e) En déduire que $I = \mathbb{R}$.
   (f) Trouver toutes les solutions constantes de (2).
2. Périodicité des solutions. On définit

$$Z_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < \frac{c}{d},\ 0 < y < \frac{a}{b}\right\},\ Z_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > \frac{c}{d},\ 0 < y < \frac{a}{b}\right\},$$
$$Z_3 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > \frac{c}{d},\ y > \frac{a}{b}\right\},\ Z_4 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < x < \frac{c}{d},\ y > \frac{a}{b}\right\}.$$

   On suppose $(x_0, y_0) \in Z_1$. Soit $M(t) = (x(t), y(t))$ la solution associée.
   (a) Montrer qu'il existe $t_1 > 0$ tel que $x(t_1) = \frac{c}{d}$, $0 < y(t_1) < \frac{a}{b}$. En déduire que pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit $(x(t_1 + \varepsilon), y(t_1 + \varepsilon)) \in Z_2$. *On montre de la même façon que $(x(t), y(t))$ sort de la zone Z_i pour entrer dans la zone Z_{i+1} pour tout $i \in \{1, .., 4\}$, $(Z_5 := Z_1)$. En particulier on trouve $t_5 > t_1$ tel que $x(t_5) = \frac{c}{d} = x(t_1)$, $y(t_5) < \frac{a}{b}$. Ce résultat est admis pour la suite.*
   (b) Montrer que $y(t_5) = y(t_1)$.
   (c) En déduire que la solution $M(t)$ est périodique.

Théorie de la mesure et probabilités - Examen terminal

Durée : 4h. Tous documents interdits.
Les résultats doivent être justifiés. Les théorèmes utilisés doivent être énoncés. On peut admettre le résultat d'une question pour répondre à une question qui suit. Ne pas hésiter à répondre même partiellement à une sous-question.

Exercice 1. Intégration sur un ensemble dénombrable.
Soit μ une mesure sur un ensemble X dénombrable muni de la tribu discrète $\mathscr{P}(X)$.

1. Notons $\rho(x) := \mu(\{x\}) \geq 0$. Montrer que pour toute fonction $f : X \to \mathbb{R}^+$ on a $\int_X f \mathrm{d}\mu = \sum_{x\in X} f(x)\rho(x)$.
2. Montrer que si $f : X \to \mathbb{N}$, alors $\int_X f \mathrm{d}\mu = \sum_{n\geq 1} \mu(f \geq n)$.
3. Si $\mu = \delta_x$ est la masse de Dirac au point $x \in X$, montrer que pour toute fonction $f : X \to \mathbb{R}^+$, on a $\int f \mathrm{d}\delta_x = f(x)$.
4. Si $X = \mathbb{N}$ et μ est la mesure de comptage, interpréter les trois théorèmes principaux de convergence (Convergence Monotone, Lemme de Fatou, Convergence Dominée) comme affirmations à propos des séries infinies.

Exercice 2. Densité.
Soit $(E, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré, et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive. Pour tout $A \in \mathscr{A}$, soit

$$\nu(A) = \int 1_A f d\mu := \int_A f d\mu.$$

1. Montrer que ν est une mesure sur $(E, \mathscr{A})$. On dit que ν est la mesure de densité f par rapport à μ, et on note $\nu = f\mu$.
2. Soit $A \in \mathscr{A}$. Montrer que $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$. On dit que ν est absolument continue par rapport à μ.
3. Montrer que pour toute fonction $g \in \mathscr{M}^+$, $\int g \mathrm{d}\nu = \int fg \mathrm{d}\mu$. (Commencer par $g = 1_A$ avec $A \in \mathscr{A}$.)

   Sur $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \lambda^d)$, on appelle densité de probabilité une fonction $f \in \mathscr{M}^+$ telle que $\int f \mathrm{d}\lambda^d = 1$. Dans ce cas, $\nu = f\lambda^d$ est une mesure de probabilité.
4. Montrer qu'une variable aléatoire X de loi $\nu = f\lambda^1$ a une fonction de répartition continue.
5. Soient X_n des variables aléatoires de loi $\nu_n = f_n\lambda^d$ à densité $f_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$.
   Supposons que
   - $f_n(x) \to f(x)$ pour λ^d-presque tout x.
   - il existe une fonction $q \geq 0$ telle que, pour tout n, $f_n(x) \leq q(x)$ pour λ^d-presque tout x, et $\int_{\mathbb{R}^d} q \mathrm{d}\lambda^d < \infty$.

   Montrer que
   (a) f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^d$.
   (b) X_n converge en loi. Quelle est la loi limite ?
6. Soit X_n une suite de variables aléatoires de loi $\mathscr{N}(0, \sigma_n^2)$.
   (a) Supposons que $\sigma_n \to \sigma \neq 0$ lorsque $n \to \infty$.
   Montrer que X_n converge en loi vers une variable aléatoire $\mathscr{N}(0, \sigma^2)$.
   (b) Supposons que $\sigma_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$.
   Montrer que X_n converge en loi vers la v.a. constante égale à 0. Peut-on appliquer le point (5b) ?

   On rappelle que la densité d'une variable aléaoire gaussienne $\mathscr{N}(m, \sigma^2)$ est $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}$.

Exercice 3. L'espace L^∞.
On note
$$\mathscr{L}^\infty(E,\mathscr{A},\mu)=\{f:E\to\mathbb{R} \text{ mesurable tq } \exists C\in\mathbb{R}^+ \text{ tq } |f|\le C \ \mu\text{-p.p. }\}$$
Soit $L^\infty := \mathscr{L}^\infty/\sim$ avec la relation d'équivalence $f\sim g \Leftrightarrow f=g\ \mu-p.p.$ Pour tout $f\in\mathscr{M}$, soit
$$\|f\|_\infty=\inf\{C\in[0,\infty] \text{ tq } |f|\le C\ \mu\text{-p.p. }\}.$$
Montrer les affirmations suivantes.

1. Si $f\sim g$ alors $\|f\|_\infty=\|g\|_\infty$. On peut donc définir $\|\cdot\|_\infty$ sur L^∞.
2. $(L^\infty,\|\cdot\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé.
3. $\|f_n-f\|_\infty\to 0$ si et seulement si il existe $A\in\mathscr{A}$, $\mu(A^c)=0$, tel que $f_n\to f$ uniformément sur A.
4. $(L^\infty,\|\cdot\|_\infty)$ est complet.
5. Les fonctions étagées sont denses dans L^∞ (pour la norme $\|\cdot\|_\infty$).

Exercice 4. Somme de variables aléatoires.

1. Soit $f:(E,\mathscr{A})\to(F,\mathscr{B})$ mesurable et μ une mesure sur $(E,\mathscr{A})$. Pour tout $B\in\mathscr{B}$, soit $\nu(B)=\mu(f^{-1}(B))$. Montrer que ν est une mesure sur $(F,\mathscr{B})$. On dit que ν est la mesure image de μ par f.
2. Si μ et ν sont deux mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^d$, on note $\mu\star\nu$ la mesure image de $\mu\otimes\nu$ par l'application $(x,y)\mapsto x+y$. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, de lois P_X et P_Y respectivement.
   (a) Montrer que la loi de $X+Y$ est $P_X\star P_Y$.
   Indication : montrer que pour toute fonction $\varphi\in\mathscr{M}^+$, $\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(z)(\mu\star\nu)(\mathrm{d}z)=\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x+y)\mu(\mathrm{d}x)\nu(\mathrm{d}y)$.
   (b) En particulier, montrer que si X et Y sont à densité, i.e. en reprenant les notations de l'exercice 2, $P_X=p_X\lambda^d$ et $P_Y=p_Y\lambda^d$, alors la loi de $X+Y$ est de densité $p_X\star p_Y$, i.e. $P_{X+Y}=(p_X\star p_Y)\lambda^d$.
   (c) Montrer que la fonction caractéristique de $X+Y$ est $\Phi_{X+Y}(t)=\Phi_X(t)\Phi_Y(t)$.
3. Soient $n\in\mathbb{N}$ et $p\in[0,1]$.
   Soit Z une variable aléatoire de loi *Binomiale*(n,p), c'est-à-dire $P(Z=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ pour tout $k\in\{0,\dots,n\}$. Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p, c'est-à-dire $P(X_i=1)=1-P(X_i=0)=p$. Soit $S_n:=\sum_{i=1}^n X_i$.
   (a) Montrer que $S_n=Z$ en loi.
   (b) Calculer la fonction caractéristique de la loi *Binomiale*(n,p).
   (c) En utilisant le théorème de Lévy, montrer le TCL dans ce cas : $\sqrt{n}(S_n/n-p)\to\mathscr{N}(0,p(1-p))$ en loi lorsque $n\to\infty$.
   (d) Donner une interprépation "pratique" de ce résultat.
   (e) Posons $p=1/2$. En suivant les étapes ci-dessous, montrer que pour tout $a>1/2$,
   $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log P(S_n\ge an)=-I(a)\quad \text{où}\quad I(x)=\begin{cases}\log 2+x\log x+(1-x)\log(1-x) & \text{si } x\in[0,1]\\ \infty & \text{sinon.}\end{cases}\qquad(\star)$$
      i. Montrer le cas $a>1$. Pour la suite, on suppose donc $a\in]\frac{1}{2},1]$.
      ii. Montrer que $2^{-n}Q_n(a)\le P(S_n\ge an)\le(n+1)2^{-n}Q_n(a)$ où $Q_n(a)=\max_{k\ge an}\binom{n}{k}$.
      iii. Montrer que le maximum ci-dessus est atteint en $k=\lceil an\rceil$.
      iv. Utiliser la formule de Stirling $n!=n^ne^{-n}\sqrt{2\pi n}(1+O(\frac{1}{n}))$ pour conclure la preuve de $(\star)$.
      v. Montrer que la même assertion $(\star)$ est vraie pour $P(S_n\le an)$ et $a<1/2$.
      vi. Etudier la fonction $I(x)$ et esquisser son graphe. Montrer en particulier qu'elle possède un unique zéro en $x=1/2$.
   (f) Toujours pour $p=1/2$. En utilisant la question (3e), montrer que pour tout $\delta>0$, on a $\sum_{n\in\mathbb{N}}P(|S_n/n-\frac{1}{2}|>\delta)<\infty$.
   (g) En déduire la loi des grands nombres : $S_n/n\to\frac{1}{2}$ presque sûrement.

Exercice 5. Bonus. Enoncer un théorème du cours qui n'apparait pas dans ce sujet.

Topologie L3B – Examen

Correction

Exercice 1 : Pairs et impairs

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et soit (x_n) une suite de E. On suppose que les sous-suites (x_{2p}) et (x_{2q+1}) convergent vers deux limites ℓ et ℓ' dans E.

Supposons d'abord que la suite (x_n) converge vers une limite $x_\infty \in E$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang N tel que $|x_n - x_\infty| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. Soit $K = \lceil N/2 \rceil$ le plus petit entier au-dessus de $N/2$. Si $p \geq K$, on a alors que $2p \geq N$ et donc que

$$\forall p \geq K \ , \quad |x_{2p} - x_\infty| < \varepsilon$$

c'est-à-dire que (x_{2p}) converge vers x_∞. De même, si $q \geq K$, on a $2q + 1 \geq N$ et donc

$$\forall q \geq K \ , \quad |x_{2q+1} - x_\infty| < \varepsilon$$

c'est-à-dire que (x_{2q+1}) converge vers x_∞. On obtient donc que les deux suites (x_{2p}) et (x_{2q+1}) convergent vers la même limite $\ell = \ell' = x_\infty$.

Supposons maintenant que les sous-suites (x_{2p}) et (x_{2q+1}) convergent vers la même limite $\ell = \ell'$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux rangs P et Q tels que

$$\forall p \geq P \ , \quad |x_{2p} - \ell| < \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \forall q \geq Q \ , \quad |x_{2q+1} - \ell| < \varepsilon \ .$$

On pose $N = \max(2P, 2Q + 1)$. Si $n \geq N$ et $n = 2p$ pair, alors $p \geq P$ et $|x_n - \ell| = |x_{2p} - \ell| < \varepsilon$. De même, si $n \geq N$ et $n = 2q + 1$ impair, alors $q \geq Q$ et $|x_n - \ell| = |x_{2q+1} - \ell| < \varepsilon$. Dans tous les cas $|x_n - \ell| < \varepsilon$ à partir du rang N et donc (x_n) converge vers ℓ.

Exercice 2 : Un espace de polynômes

Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels. On le munit dans tout l'exercice de la norme

$$\|P\| = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)| \ .$$

1. Comme $x \mapsto |P(x)|$ est une fonction continue comme composée de fonctions continues et que $[0, 1]$ est compact, cette fonction est bornée sur $[0, 1]$ et atteint ses bornes. Donc $\|P\| = \max_{x \in [0,1]} |P(x)|$ est un nombre positif bien défini. Si $\|P\| = 0$, alors $P(x) = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$ et le polynôme P a donc une infinité de racines : c'est le polynôme nul $P \equiv 0$. Soit P et Q deux polynômes,

on a

$$\begin{aligned}\|P+Q\| &= \max_{x\in[0,1]} |P(x)+Q(x)| \le \max_{x\in[0,1]} |P(x)|+|Q(x)| \\ &\le \max_{x\in[0,1]} |P(x)| + \max_{x\in[0,1]} |Q(x)| = \|P\|+\|Q\| \ .\end{aligned}$$

Enfin, si $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\|\lambda P\| = \max_{x\in[0,1]} |\lambda P(x)| = \max_{x\in[0,1]} |\lambda|.|P(x)| = |\lambda| \max_{x\in[0,1]} |P(x)| = |\lambda|.\|P\| \ .$$

Donc $\| \cdot \|$ est bien une norme sur $\mathbb{R}[X]$

2. On pose
$$f : P \mapsto \int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x$$
qui définie une application linéaire de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}$ par linéarité de l'intégrale. On a
$$\begin{aligned}|f(P)| &= \left|\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_0^1 |P(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\le \int_0^1 \max_{t\in[0,1]} |P(t)|\,\mathrm{d}x = 1\times\|P\| \ .\end{aligned}$$
Ceci montre que f est continue (car f est linéaire) et que $|||f||| \le 1$. Comme on vérifie facilement que si $P \equiv 1$ est constant, alors $\|P\| = 1$ et $f(P) = 1$, on a que $|||f||| = 1$.
3. Pour $n \ge 1$, on pose $P_n = \frac{n}{2^n}X^{n-1}$. On a
$$\|P_n\| = \max_{x\in[0,1]} |P_n(x)| = P(1) = \frac{n}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
et donc (P_n) tend vers le polynôme 0. On pose
$$g : P \mapsto \int_0^2 P(x)\,\mathrm{d}x \ .$$
On calcule
$$g(P_n) = \int_0^2 \frac{n}{2^n}X^{n-1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2^n}X^n\right]_0^2 = 1 \ .$$
Comme $g(P_n)$ ne tend pas vers $g(0) = 0$, on en déduit que g n'est pas continue.
4. Soit $d \in \mathbb{N}$ et soit g_d la restriction de g à l'espace $\mathbb{R}_d[X]$. Comme g est linéaire de $\mathbb{R}_d[X]$ dans $\mathbb{R}$ et que $\mathbb{R}_d[X]$ est de dimension finie, g est forcément continue (théorème du cours).

Exercice 3 : Prolongement de fonctions

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés et soit $A \subset E$.

1. Soit $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ deux fonctions continues de $\overline{A}$ dans F telles que
$$\forall a \in A\ , \quad \tilde{f}(a) = \tilde{g}(a)\ .$$
Soit $x \in \overline{A}$, par caractérisation de l'adhérence, il existe une suite (a_n) à valeur dans A convergeant vers x. Comme $f(a_n) = g(a_n)$ pour tout n et que les fonctions f et g sont continues sur $\overline{A}$, on peut passer à la limite et on obtient que $f(x) = g(x)$. Ceci montre que $f \equiv g$ sur tout $\overline{A}$.
2. En particulier, prenons le cas où A est dense dans E et $f : A \to F$ continue. Si $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ sont deux prolongements continus de f, alors par définition, on doit avoir $\tilde{f} = \tilde{g} = f$ sur A. Mais la question précédente nous dit que $\tilde{f} = \tilde{g}$ sur $\overline{A} = E$, c'est-à-dire que $\tilde{f} \equiv \tilde{g}$. Donc il existe au plus un prolongement continue de f.
3. On pose
$$f\ :\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \ \longmapsto \frac{x^2}{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}$$
qui est définie et continue sur tout $\mathbb{R}^2$ privé de l'origine. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit $(x_n, y_n) = (2^{-n}, \alpha 2^{-n})$. On a
$$f(x_n, y_n) = \frac{2^{-2n}}{2^{-2n} + \alpha^2 2^{-2n}} = \frac{1}{1+\alpha^2}$$
et donc $f(x_n, y_n)$ tend vers $1/1+\alpha^2$ quand n tend vers $+\infty$. Comme (x_n, y_n) tend vers $(0,0)$, si $\tilde{f}$ est un prolongement continu de f en $(0,0)$, on devrait avoir $\tilde{f}(0,0) = \lim f(x_n, y_n) = 1/1+\alpha^2$. Mais ce nombre dépend de α et donc on ne peut trouver une unique valeur pour $\tilde{f}(0,0)$ convenant à toutes les suites convergeant vers $(0,0)$. Donc f n'est pas prolongeable en une fonction continue $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
4. Supposons que f se prolonge en une fonction $\tilde{f}$ continue sur $\overline{A}$. Comme A est borné, $\overline{A}$ est aussi borné. Par définition $\overline{A}$ est un fermé : il s'agit donc d'un fermé borné de $\mathbb{R}^d$ qui est de dimension finie et donc $\overline{A}$ est un compact. Comme $\tilde{f}$ est continue sur $\overline{A}$, $\tilde{f}$ est uniformément continue sur $\overline{A}$. A fortiori, sa restriction $f = \tilde{f}_{|A}$ est aussi uniformément continue.
5. On considère
$$f\ :\ x \in\ ]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\ \longmapsto\ 1\ .$$
De façon évidente, la fonction constante $\tilde{f}_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto 1$ est un prolongement continu de f sur tout $\mathbb{R}$. Mais la fonction
$$\tilde{f}_2\ :\ x \in \mathbb{R}\ \longmapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$
en est un autre possible. Il existe donc plusieurs prolongements différents de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 : Complets et compacts

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

1. Un espace complet est un espace vectoriel normé dans lequel toute suite de Cauchy converge.
2. Soit (x_n) une suite de Cauchy de E. En appliquant la définition à $\varepsilon = 1$, on sait qu'il existe un rang N tel que, pour tout $p, q \geq N$, $\|x_p - x_q\| < 1$. En particulier,
$$\forall n \geq N \ , \quad \|x_n\| = \|x_n - x_N + x_N\| \leq \|x_n - x_N\| + \|x_N\| < 1 + \|x_N\| \ .$$
Les termes x_n avec $n < N$ sont en nombre fini et sont donc bornés. On peut en conclure que toute la suite est bornée, par exemple par la borne
$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \quad \|x_n\| \leq 1 + \max_{k=1\ldots N} \|x_k\| \ .$$
3. Soit (x_n) une suite de Cauchy de E et soit $(x_{\varphi(n)})$ une de ses sous-suites. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que, pour tout $p', q' \geq N$, $\|x_{p'} - x_{q'}\| < \varepsilon$. Mais alors, si $p, q \geq N$, comme $\varphi(p) \geq p$ et $\varphi(q) \geq q$, en appliquant la propriété précédente à $p' = \varphi(p)$ et $q' = \varphi(q)$, on doit aussi avoir
$$\forall p, q \geq N \ , \quad \|x_{\varphi(p)} - x_{\varphi(q)}\| < \varepsilon$$
ce qui montre que $(x_{\varphi(n)})$ est aussi de Cauchy.
4. Soit (x_n) une suite de Cauchy dont une sous-suite $(x_{\varphi(k)})$ converge vers une limite $\ell \in E$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang N tel que
$$\forall p, q \geq N \ , \quad \|x_p - x_q\| < \varepsilon/2$$
et un rang K tel que
$$\forall k \geq K \ , \quad \|x_{\varphi(k)} - \ell\| < \varepsilon/2 \ .$$
On choisit maintenant un indice $k_0 \geq K$ tel que $\varphi(k_0) \geq N$ (c'est possible par $\varphi(k)$ tend vers l'infini) et on pose $M = \varphi(k_0)$. Soit $n \geq M$, on a $k_0 \geq K$, $n \geq N$ et aussi $\varphi(k_0) \geq N$. On obtient donc
$$\|x_n - \ell\| \leq \|x_n - x_{\varphi(K)}\| + \|x_{\varphi(k)} - \ell\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \ .$$
Ceci montre que toute la suite (x_n) tend vers ℓ.
5. Soit (e_n) une suite de Cauchy de E qui ne converge pas dans E. Soit $x \in E$ et $\lambda > 0$ et soit $x_n = x + \lambda e_n$. La suite (x_n) est de Cauchy. En effet, soit $\varepsilon > 0$ et soit $\varepsilon' = \varepsilon/\lambda$. Comme (e_n) est de Cauchy, il existe N tel que, pour tout $p, q \geq N$, $\|e_p - e_q\| < \varepsilon'$ et donc
$$\|x_p - x_q\| = \|(x + \lambda e_p) - (x + \lambda e_q)\| = \lambda \|e_p - e_q\| < \lambda \varepsilon' = \varepsilon \ .$$
Ceci montre que la suite (x_n) est aussi de Cauchy. Imaginons que cette suite converge. Alors la suite $e_n = \lambda^{-1}(x_n - x)$ convergerait aussi, ce qui n'est pas vrai par hypothèse. Donc (x_n) ne converge pas non plus. Comme la suite (e_n) est de Cauchy, elle est bornée par une borne $R > 0$. Si on se fixe une boule $B(x, r)$, on peut prendre $\lambda > 0$ assez petit pour que $\lambda R < r$ et la suite (x_n) est alors entièrement incluse dans la boule $B(x, r)$. Autrement dit, toute boule ouverte $B(x, r)$ contient une suite de Cauchy qui ne converge pas.

6. Soit K un compact de E et soit (x_n) une suite de Cauchy à valeur dans K. Comme K est compact, on peut en extraire une sous-suite convergeant vers une limite $\ell \in K$. Par la question 4, cela implique que (x_n) toute entière tend vers ℓ.
7. Si K compact contenait une boule ouverte $B(x,r)$, alors la question 5 montrerait que K contient une suite de Cauchy qui ne converge pas. D'après la question précédente, c'est absurde et donc K ne contient aucune boule ouverte $B(x,r)$. Par caractérisation de l'intérieur, cela montre que l'intérieur de K est vide.
8. Supposons que $a \in E$ est non nul. On pose

$$K = \{x \in E \ , \quad x = \lambda a \text{ avec } \lambda \in [0,1]\} \ .$$

L'ensemble K est l'image de $[0,1]$ par la fonction

$$f \ : \ \lambda \in [0,1] \ \longmapsto \lambda a \in E \ .$$

Il s'agit d'une fonction continue (car si $\lambda_n \to \lambda$, alors $\lambda_n a \to \lambda a$ d'après le cours) et $[0,1]$ est un compact de $\mathbb{R}$. Donc K est compact comme image d'un compact par une fonction continue. On peut aussi montrer que f est bijective de $[0,1]$ dans K (homéomorphisme) et donc que le cardinal de K est le même que celui de $[0,1]$.
9. On a supposé que E est non complet. Comme tout espace de dimension fini est complet, on en déduit que E est de dimension infinie. Donc il existe des sous-espaces de E de dimension aussi grande que l'on veut. Si $(a_1, a_2, \ldots, a_d)$ est une base d'un sous-espace de dimension d, alors l'image de la fonction

$$g \ : \ \lambda \in [0,1]^d \ \longmapsto \sum_{i=1}^{d} \lambda_i a_i \in E$$

est un compact (même arguments que précédemment) de dimension d (il est contenu dans $\mathrm{vect}\{a_i\}$ et contient tous les a_i qui forment une famille libre).

Exercice 5 : Sous-espace des fonctions lipschitziennes

1. Prenons $f \in A$ une fonction lipschitzienne : il existe $K \geq 0$ tel que,

$$\forall x, x' \in [0,1] \ , \quad |f(x) - f(x')| \leq K|x - x'| \ .$$

Soit $x \in [0,1]$ et soit (x_n) une suite tendant vers x. On a alors, $|f(x_n) - f(x)| \leq K|x_n - x| \to 0$ et donc $(f(x_n))$ tend vers $f(x)$. Ceci montre que f est une fonction continue.
2. Soit (f_n) une suite de fonctions $K-$lipschitziennes qui converge uniformément vers une fonction f sur $[0,1]$. Soit x et x' dans $[0,1]$. Pour tout n, on a

$$|f_n(x) - f_n(x')| \leq K|x - x'| \ .$$

Par ailleurs, la convergence de la suite de fonctions montre que $f_n(x)$ tend vers $f(x)$ et $f_n(x')$ tend vers $f(x')$. Donc en passant à la limite dans l'estimation ci-dessus, on obtient

$$|f(x) - f(x')| \leq K|x - x'|$$

ce qui montre que f est aussi $K-$lipschitzienne.

3. Soit f une fonction $K-$lipschitzienne et soit (f_n) la suite de fonctions continues définie par $f_n(x) = f(x) + \frac{1}{n}\sqrt{x}$. On a

$$\forall x \in [0,1] \ , \quad |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n}\sqrt{x} \leq \frac{1}{n}$$

ce qui montre que

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

et donc que (f_n) tend vers f pour la topologie de la norme infinie. D'autre part, pour tout n fixé, on a

$$\begin{aligned} \frac{|f_n(1/k) - f_n(0)|}{|1/k - 0|} &= k\Big|f(1/k) - f(0) + \frac{1}{n\sqrt{k}}\Big| \leq k|f(1/k) - f(0)| + \frac{k}{n\sqrt{k}} \\ &\leq k\frac{K}{k} + \frac{\sqrt{k}}{n} = K + \frac{\sqrt{k}}{n} \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty \ . \end{aligned}$$

Si f_n avait été lipschitzienne de constante K', alors le quotient $\frac{|f_n(1/k)-f_n(0)|}{|1/k-0|}$ aurait dû être majoré par K'. Ce n'est pas le cas, donc aucune des fonctions f_n n'est lipschitzienne.

4. La question 2 montre que la limite de fonctions $K-$lipschitzienne est $K-$lipschitzienne et donc que A_K est un fermé de $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. La question 3 montre que toute fonction $K-$lipschitzienne est limite de fonctions qui ne le sont pas et donc qu'elle se trouve dans l'adhérence du complémentaire de A_K. Ceci montre que A_K est d'intérieur vide. Par définition, la frontière de A_K est donc A_K.

5. Soit P un polynôme. Sa dérivée P' est aussi un polynôme, donc est continue sur $[0,1]$ compact et donc P' est majorée par une certaine valeur K. Le théorème des accroissements fini montre donc que

$$\forall x, x' \in [0,1] \ , \quad |P(x) - P(x')| \leq (\max_{t\in[0,1]} |P'(t)|)|x - x'| \leq K|x - x'|$$

c'est-à-dire que $x \mapsto P(x)$ est $K-$lipschitzienne.

6. Le théorème de Weierstrass dit que les polynômes forment un ensemble dense dans $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme infinie. Ceci montre que toute fonction peut-être approchée par une suite de fonctions lipschitziennes (attention, la constante de Lipschitz n'est pas forcément uniforme dans cette suite) et donc l'adhérence de A est $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ tout entier. Pour l'intérieur, l'argument plus haut reste valable et l'intérieur de A est vide et donc $\partial A = A$.

Université Grenoble Alpes 2022-2023
L3 MATH - MNUM

Examen final
05/05/2023
durée : 3h

Les documents, calculatrices, téléphones, ordinateurs... ne sont pas autorisés. La rédaction et la clarté des justifications seront prises en compte dans la notation.

sujet de 4 pages

Exercice 1 - Questions de cours.

1. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible, $b \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ et $\delta b \in \mathbb{R}^n$. Montrer que si x et $x + \delta x$ sont les solutions respectives des systèmes linéaires $Ax = b$ et $A(x + \delta x) = b + \delta b$ alors
$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}.$$
2. Soit f une fonction infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que les expressions suivantes :
$$\frac{f(x) - f(x-h)}{h} \tag{1}$$
$$\frac{2f(x+h) + 3f(x) - 6f(x-h) + f(x-2h)}{6h} \tag{2}$$
sont des approximations du nombre dérivé $f'(x)$ et calculer l'ordre de précision de chacune de ces approximations par rapport à h.
3. Soit l'équation différentielle d'ordre 1 avec condition de Cauchy
$$\begin{cases} u'(t) &= f(t, u(t)), \quad t \in]0, T], \\ u(0) &= u_0. \end{cases}$$
L'intervalle $[0, T]$ est discrétisé avec un pas de discrétisation constant Δt et $N + 1$ points de discrétisation définis par $t_n = n\Delta t$ avec $n = 0, \cdots, N$ et $\Delta t = \frac{T}{N}$. Nous considérons un schéma d'approximation à un pas de la forme
$$\begin{cases} u_{n+1} &= u_n + \Delta t \phi(t_n, u_n, \Delta t), \quad n = 0, \cdots, N-1, \\ u_0 & \end{cases}$$
Définir la notion de consistance puis celle de stabilité par rapport aux erreurs pour ce schéma d'approximation.

Exercice 2 - Décompositions d'une matrice avec un paramètre.
Soit $A_\alpha \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice définie par

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

où α est un paramètre réel.

1. Localiser le spectre de A_α avec le théorème de Gershgorin.
2. A quelle condition sur α la méthode de Cholesky est-elle applicable sur la matrice A_α ?
3. Nous supposons que cette condition est vérifiée. Écrire la factorisation de Cholesky de A_α.
4. A quelle condition sur α la matrice A_α admet-elle une décomposition de la forme $PA_\alpha = LU$ avec P une matrice de permutation, L une matrice triangulaire inférieure de termes diagonaux égaux à 1 et U une matrice triangulaire supérieure ?
5. Écrire cette décomposition lorsque $\alpha^2 = 2$.
6. En utilisant cette décomposition, déterminer la solution du système linéaire

$$A_{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 - Polynôme d'interpolation par différences divisées.
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction que nous souhaitons approcher par un polynôme et $x_0, \ldots, x_n$ des réels distincts de $[a, b]$. Nous notons $P_{x_0,\ldots,x_k} f$ le polynôme d'interpolation de f en les points $x_0, ..., x_k$ et $f[x_0, ..., x_k]$ le coefficient dominant de ce polynôme. Nous rappelons que

$$P_{x_0,\ldots,x_n} f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, \ldots, x_k] \prod_{l=0}^{k-1} (x - x_l)$$

ainsi que la relation de récurrence pour $k \geq 1$:

$$f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, \ldots, x_k] - f[x_0, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}.$$

1. En utilisant cette procédure, déterminer le polynôme P de degré 2 passant par les points $(-1,1)$, $(0,2)$ et $(2,-1)$.

2. Nous considérons un polynôme P de degré m qui s'écrit sous la forme suivante

$$P(X) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} a_k \prod_{l=0}^{k-1}(X - x_l).$$

   Écrire une fonction Python `polynome_horner`

   - qui prend en paramètres d'entrée deux listes de réels (x_i), (a_i) et un réel z
   - et retourne en sortie la valeur de $P(z)$.

   Le nombre d'opérations effectuées dans cette fonction doit être en $\mathcal{O}(m)$.

3. Écrire une fonction Python `coef_newton`

   - qui prend en paramètres d'entrée $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ et $(y_i)_{0\leq i\leq n}$ (avec $y_i = f(x_i)$)
   - et retourne en sortie les coefficients du polynôme $P_{x_0,\ldots,x_n}f$ dans la base de Newton $\Big(1, (X-x_0), (X-x_0)(X-x_1), \ldots, (X-x_0)\ldots(X-x_{n-1})\Big)$.

4. Écrire un code Python (qui appelle les deux fonctions précédentes) de façon à évaluer le polynôme de la question 1 aux points de discrétisations de l'intervalle $[-1,2]$ définis par $y_j = -1 + jh$ avec $j = 0, \cdots, N$, $h = \frac{3}{N}$ et $N = 100$.

Exercice 4 - Intégration numérique.

Nous cherchons une méthode d'intégration numérique de la forme

$$\int_0^1 f(t)dt \approx \alpha f(0) + \beta f'(\gamma) := I(f),$$

où α et β sont deux réels et $\gamma \in]0,1]$.

1. Déterminer α et β pour que la méthode soit exacte pour des polynômes de degré inférieur ou égal à 1 (quelque soit la valeur de γ).

2. Déterminer γ pour que la méthode soit aussi exacte pour des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

   Dans la suite de l'exercice, nous fixons α, β et γ aux valeurs trouvées précédemment.

3. Nous supposons que $f \in \mathcal{C}^3([0,1])$. À l'aide d'un développement de Taylor-Lagrange de $f(t)$ en 0, montrer que

$$\Big|\int_0^1 f(t)dt - I(f)\Big| \leq \frac{5}{72} \sup_{x\in[0,1]} |f^{(3)}(x)|.$$

4. En effectuant un changement de variable, que devient cette méthode d'intégration lorsque nous souhaitons approcher $\int_a^b f(t)dt$.

5. Écrire la méthode composite associée lorsque l'intervalle $[a, b]$ est subdivisé de façon régulière avec un pas de discrétisation $h = \frac{b-a}{N}$ (avec $N \in \mathbb{N}^*$).

FIN DU SUJET

Université Grenoble Alpes | **Année 2022-2023**
Licence de mathématiques, 3e année | **Algèbre, parcours B**

Examen final – Janvier 2023

- Le sujet comporte 5 exercices, qui sont indépendants les uns des autres. Vous pouvez les aborder dans l'ordre que vous préférez.
- S'il vous plaît, rédigez les exercices différents sur des copies différentes (sauf le premier, que vous pouvez mettre avec un autre car il est court).
- La clarté des explications et la qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation.

Exercice 1. Une permutation

Ecrire la décomposition en produit de cycles à supports disjoints de la permutation suivante.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 9 & 7 & 2 & 5 & 12 & 11 & 8 & 3 & 1 & 4 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

Quel est l'ordre de σ ?

Exercice 2. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et ses endomorphismes

Soit $n > 0$ un entier. On rappelle qu'un *endomorphisme* de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est un morphisme de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ dans lui-même et qu'un *automorphisme* de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est un endomorphisme bijectif de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

1. Rappeler la définition de "φ est un morphisme de groupes".
2. On suppose dans cette question que $n = 12$.
   (a) Montrer que l'application définie par $\psi_8(\bar{k}) = 8\bar{k}$ est un endomorphisme. Est-ce un automorphisme ?
   (b) Montrer que l'application définie par $\psi_5(\bar{k}) = 5\bar{k}$ est un automorphisme de $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +)$.
3. On s'intéresse dans cette question aux endomorphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans lui-même.
   (a) L'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est-il un groupe pour la composition des applications ?
   (b) Soit φ_1 et φ_2 deux endomorphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Montrer que $\varphi_1 = \varphi_2$ si et seulement si $\varphi_1(\bar{1}) = \varphi_2(\bar{1})$.
   (c) On suppose dans cette question (et dans cette question seulement) que $n = 12$. Justifier qu'il existe un unique endomorphisme de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ vérifiant $\varphi(\overline{1}) = \overline{8}$, et donner la valeur de $\varphi(\overline{k})$ pour tout $\bar{k} \in \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.
   (d) Combien y a t'il d'endomorphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$? (n est ici de nouveau quelconque)
4. On considère maintenant la structure d'anneau de $\mathbb{Z}/nZ$.
   (a) Rappeler la définition de : " φ est un morphisme d'anneau de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ dans lui-même". (Ces morphismes sont donc des endomorphismes d'anneau de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$).
   (b) Combien y a t'il d'endomorphismes d'anneaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?
5. Soit $\overline{m}$ un élément de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Montrer que $\overline{m}$ est inversible dans l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si et seulement si $m \wedge n = 1$.
6. On s'intéresse maintenant aux automorphismes (de groupe) de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.
   (a) Montrer que l'ensemble des automorphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un groupe pour la composition.

(b) Montrer qu'un endomorphisme φ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est surjectif si et seulement si $\varphi(\bar{1})$ est un générateur de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

(c) Montrer qu'un endomorphisme de groupe de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est surjectif si et seulement si il est injectif.

(d) En déduire que φ est un automorphisme de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si et seulement si $\varphi(1)$ est inversible dans l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

7. On définit une application $F : \mathrm{Aut}\,(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \longrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}$ en posant

$$\forall \varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}),\ F(\varphi) = \varphi(\bar{1}).$$

(a) Montrer que F est un morphisme de groupes. On précisera bien les lois des groupes.

(b) Décrire $\ker F$.

(c) En déduire que $\mathrm{A}ut(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^{\times}$.

(d) On suppose que $n = p^{\alpha}$, où $p \in \mathbb{N}$ est un nombre premier. Combien y a t'il d'automorphismes de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$?

Exercice 3. Sous-groupes d'indice 2 et conjugaison

Soit $(G, \cdot)$ un groupe. Soit H un sous-groupe de G. On dit que H est *stable par conjugaison* si il vérifie :

$$\forall h \in H, \forall g \in G, ghg^{-1} \in H.$$

Le but de cet exercice est de montrer qu'un sous-groupe d'indice 2 de G est stable par conjugaison, et d'étudier un exemple d'application de ce résultat.

On admet le théorème suivant (Théorème de Cauchy), que l'on pourra utiliser librement.

Théorème Soit G un groupe fini, et soit p un entier naturel **premier**, tel que p divise l'ordre de G. Alors G contient un élement d'ordre p.

1. Soit $(G', \cdot)$ un groupe, et soit $\varphi : G \longrightarrow G'$ un morphisme de groupes, et soit K le noyau de φ.

(a) Montrer que K est un sous-groupe de G.

(b) Montrer que K est stable par conjugaison.

On suppose dans les questions 2, 3 et 4 que H est un sous-groupe d'indice 2 de G.

2. (a) Justifier l'existence d'un élément $a \in G \setminus H$ tel que

$$G = H \cup a.H, \text{ et } H \cap a.H = \emptyset.$$

(b) Soient g_1 et g_2 deux éléments de G. Démontrer les propriétés suivantes.

(i) Si $g_1 \in H$ et $g_2 \in aH$, alors g_1g_2 et g_2g_1 sont dans aH.

(ii) Si $g_1 \in aH$ et $g_2 \in aH$, alors $g_1g_2 \in H$

3. On considère maintenant le groupe $G' = (\{+1, -1\}, \times)$. Soit $\varphi_H : G \longrightarrow G'$ l'application définie par

$$\varphi_H(g) = \begin{cases} 1 & \text{si } g \in H \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déduire de la question 2.b que φ est un morphisme de groupe.

4. En déduire que H est stable par conjugaison.

5. On suppose dans cette question que $G = S_n$ est le groupe symétrique sur n éléments et que $H = A_n$, le groupe alterné. Reconnaître le morphisme ϕ_H dans ce cas.

6. On suppose dans cette question que $G = A_4$, le groupe alterné sur 4 élements. On se propose de montrer que A_4 n'a aucun sous-groupe d'ordre 6. Pour ce faire, on raisonne par l'absurde, et on suppose l'existence d'un sous-groupe H de A_4, d'ordre 6.
   (a) Quel est le cardinal de A_4 ? Donner la liste de tous les éléments de A_4, et donner l'ordre de chacun de ces élements.
   (b) On note $V_4 = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$. Montrer que V_4 est un sous-groupe de A_4.
   (c) Justifier que H est stable par conjugaison.
   (d) Justifier que H contient un élement d'ordre 2.
   (e) En déduire que tous les éléments d'ordre 2 de A_4 sont dans H.
   Indication : on pourra calculer le conjugué de $(ij)(k\ell)$ par (ijk), où i, j, k, ℓ sont deux à deux distincts.
   (f) En déduire que H admet un sous-groupe d'ordre 4.
   (g) Conclure par contradiction.

Exercice 4. Polynômes

On considère l'anneau des polynômes à coefficients réels $\mathbb{R}[X]$.

1. Rappeler la définition d'un idéal de $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit I un idéal de $\mathbb{R}[X]$ non-réduit à $\{0\}$.
   (a) En considérant l'ensemble des degrés des éléments de I, montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire $P \in I$ tel que pour tout polynôme $Q \in I$, $\deg(P) \leqslant \deg(Q)$.
   (b) Montrer que le polynôme P obtenu à la question précédente engendre I.
3. Soit $I = \{P \in \mathbb{R}[X], P(1) = P(2) = 0\}$. Montrer que I est un idéal de $\mathbb{R}[X]$. Quel est dans ce cas le générateur unitaire de I ?
4. On considère les deux polynômes $P_1 = 2$ et $P_2 = X + 1$. Justifier que l'idéal de $\mathbb{R}[X]$ engendré par P_1 et P_2, noté $I^{\mathbb{R}}$, est égal à $\mathbb{R}[X]$.
5. On considère maintenant $\mathbb{Z}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients entiers. Montrer que $\mathbb{Z}[X]$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}[Z]$.
6. L'idéal $I^{\mathbb{Z}}$ de $\mathbb{Z}[X]$ engendré par P_1 et P_2 est-il égal à $\mathbb{Z}[X]$?
   Indication : on pourra considérer un élement de $I^{\mathbb{Z}}$ et l'évaluer en -1.

Exercice 5. Une famille de matrices

On considère la famille de matrices dépendant d'un paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ définie par

$$M(\alpha) = \begin{bmatrix} 4-\alpha & -3 & 4-2\alpha \\ 1 & -\alpha & 2 \\ \alpha-1 & 1-\alpha & 2\alpha \end{bmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de $M(\alpha)$, et l'écrire sous forme factorisée.
   Indication : faire apparaître un 0 en faisant une opération élémentaire sur les colonnes.
2. Quelles sont les valeurs propres de $M(\alpha)$?
3. Justifier que $\forall \alpha \neq 0$, $M(\alpha)$ est diagonalisable.
4. On suppose maintenant que $\alpha = 0$, et l'on écrit $M = M(0)$. Quel est le polynôme minimal de M ?
5. La matrice M est-elle diagonalisable ?
6. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est M. Justifier que $\mathbb{R}^3 = \ker(f - 2id) \oplus \ker((f - id)^2)$.
7. **Question hors barême :** Au vu de l'exemple ci-dessus, l'ensemble des matrices diagonalisables est-il un fermé de $M_3(\mathbb{R})$?

Université Grenoble Alpes | **Topologie L3A**
Licence de mathématiques | **Année 2022–2023**

Examen du 6 janvier 2023

Les documents, calculatrices, téléphones portables et objets connectés sont interdits. Les deux exercices et le problème sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. Sauf mention explicite du contraire, l'ensemble $\mathbb{R}$ est toujours muni de la topologie usuelle. Durée de l'épreuve : 4 heures.

Question de cours. Soit (E, τ) un espace topologique et $A \subset E$ une partie de E.

a) Définir l'intérieur, l'adhérence, et la frontière du sous-ensemble A.

b) Caractériser, à l'aide de ces notions, les parties ouvertes et les parties fermées de E.

c) Si $f : E \to E$ est une application continue, vérifier que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Exercice 1. (*Semi-continuité supérieure*)
Soit (E, τ) un espace topologique. On dit qu'une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est semi-continue supérieurement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in E \mid f(x) < t\}$ est un ouvert de E.

a) Montrer qu'une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est continue si et seulement si chacune des deux fonctions f et $-f$ est semi-continue supérieurement.

b) Soit $A \subset E$ et soit $\chi_A : E \to \mathbb{R}$ la fonction caractéristique de A, telle que $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\chi_A(x) = 0$ si $x \in E \setminus A$. Vérifier que χ_A est semi-continue supérieurement si et seulement si A est un fermé de E.

c) Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de fonctions de E dans $\mathbb{R}$, toutes semi-continues supérieurement. On suppose que, pour tout $x \in E$,

$$g(x) \,:=\, \inf_{i \in I} f_i(x) \,>\, -\infty\,.$$

Montrer que la fonction $g : E \to \mathbb{R}$ est semi-continue supérieurement.

d) On suppose dans cette question que (E, d) est un espace métrique. Montrer qu'une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est semi-continue supérieurement si et seulement si, pour tout $\bar{x} \in E$ et pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans E qui converge vers $\bar{x}$, on a

$$\limsup_{n \to +\infty} f(x_n) \,\leq\, f(\bar{x})\,. \tag{1}$$

Indication : Pour montrer que la condition est nécessaire, on pourra remarquer que, pour tout $\bar{x} \in E$ et tout $\epsilon > 0$, l'ensemble $\{x \in E\,;\, f(x) < f(\bar{x}) + \epsilon\}$ est ouvert si la fonction f est semi-continue supérieurement.

e) Si (E, τ) est un espace topologique compact et $f : E \to \mathbb{R}$ une application semi-continue supérieurement, montrer que l'image $f(E)$ est bornée supérieurement et qu'il existe $\bar{x} \in E$ tel que

$$f(\bar{x}) \,=\, \sup_{x \in E} f(x)\,.$$

Indication : Soit $m = \sup(f(E)) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Si $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle strictement croissante qui converge vers m, on remarquera que l'ensemble $K_n := \{x \in E \mid f(x) \geq t_n\}$ est un compact non vide et que $K_{n+1} \subset K_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. (*Une famille de formes linéaires*)
On considère l'espace préhilbertien $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad \forall\, f, g \in E\,,$$

et de la norme associée $\|f\| = \langle f, f\rangle^{1/2}$. On fixe également un réel $\alpha \in [0, 1[$.

a) Vérifier que, pour tout $f \in E$, l'intégrale généralisée $\int_0^1 x^{-\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge, et que l'application $L_\alpha : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$L_\alpha(f) = \int_0^1 x^{-\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad \forall\, f \in E\,,$$

est une forme linéaire sur E.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \in E$ la fonction définie par

$$f_n(x) = \min(n^\alpha, x^{-\alpha}) = \begin{cases} n^\alpha & \text{si } x \in [0, n^{-1}]\,, \\ x^{-\alpha} & \text{si } x \in [n^{-1}, 1]\,. \end{cases}$$

Calculer $\|f_n\|^2$ et $L_\alpha(f_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que le rapport $L_\alpha(f_n)/\|f_n\|^2$ possède une limite lorsque $n \to \infty$, et calculer la valeur de cette limite.

c) Si $\alpha \in [1/2, 1[$, en déduire que la forme linéaire L_α n'est pas continue sur E.

d) Si $\alpha \in [0, 1/2[$, montrer que la forme linéaire L_α est continue sur E, et calculer sa norme d'opérateur (pour ce calcul, on pourra utiliser à nouveau la question b).

e) On suppose désormais que $\alpha \in]0, 1/2[$, et on note $M = \ker(L_\alpha) \subset E$ le noyau de la forme linéaire L_α. Rappeler pourquoi M est un hyperplan fermé de E.

f) Vérifier que $M^\perp = \{0\}$. *Indication :* Si $f \in M^\perp$, on pourra considérer la fonction $g \in E$ définie par $g(x) = x^\alpha f(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$. Vérifier que $\langle g, h\rangle = 0$ pour toute fonction $h \in E$ à moyenne nulle, et en déduire que g est constante sur l'intervalle $[0, 1]$. Conclure.

Problème (*Espaces topologiques localement connexes*)

Première partie :
On dit qu'un espace topologique (E, τ) est localement connexe s'il possède en chacun de ses points une base de voisinages ouverts et connexes. En d'autres termes, pour tout $x \in E$ et pour tout ouvert V contenant x, il existe un ouvert *connexe* W tel que $x \in W \subset V$.

a) Soit (E, τ) un espace topologique localement connexe. Étant donné $x \in E$, on note $\mathcal{C}_x$ la composante connexe de E contenant x. Montrer que $\mathcal{C}_x$ est à la fois ouverte et fermée.

b) En déduire que les sous-ensembles à la fois ouverts et fermés dans E sont exactement les unions de composantes connexes de E.

c) Si (E_1, τ_1) et (E_2, τ_2) sont deux espaces topologiques localement connexes, montrer que le produit $E_1 \times E_2$ muni de la topologie produit $\tau_1 \times \tau_2$ est encore un espace topologique localement connexe.

d) Montrer que tout espace vectoriel normé est un espace topologique localement connexe.

e) Notons $\mathbb{N}^{-1} = \{1/n\,;\, n \in \mathbb{N}^*\}$, et considérons le sous-ensemble $K \subset \mathbb{R}^2$ défini par

$$K \;=\; \Big\{(x,y) \in [0,1]^2\,;\, xy = 0\,,\ \text{ou } x \in \mathbb{N}^{-1}\Big\}\,.$$

Représenter approximativement le sous-ensemble K. Montrer que K, muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^2$, est un espace compact, connexe, mais non localement connexe.

Deuxième partie :
Soit (E,τ) un espace topologique connexe et localement connexe, et $f : E \to \mathbb{R}$ une application continue et surjective.

f) Vérifier que le sous-ensemble $A = \{x \in E\,;\, f(x) \le 0\}$ n'est pas ouvert. En déduire qu'il existe un point $x \in A$ dont tout voisinage V intersecte $A^c := E \setminus A$. Vérifier que $f(x) = 0$.

g) Soit $B \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble contenant l'origine et tel que $f^{-1}(B)$ soit ouvert dans E. En utilisant la question précédente, montrer que $[0,\epsilon] \subset B$ pour un $\epsilon > 0$ suffisamment petit. Par un argument similaire, vérifier que $[-\epsilon, 0] \subset B$.

h) Plus généralement, si $B \subset \mathbb{R}$ et $f^{-1}(B)$ est ouvert dans E, montrer que B est un ouvert de $\mathbb{R}$. En déduire que la topologie usuelle est la topologie la plus fine sur $\mathbb{R}$ pour laquelle l'application $f : E \to \mathbb{R}$ soit continue.

i) Montrer que le résultat de la question précédente reste vrai si (E,τ) est un espace topologique connexe par arcs, et $f : E \to \mathbb{R}$ une application continue et surjective.