Université Joseph Fourier	2012-2013
Licence 3	Parcours A

Algèbre

Contrôle continu du 24/10/2012

The "question de cours" and the three exercises are independent.
Three different papers are required, one for the "question de cours" and the exercise 1, one for the exercise 2 and one for the exercise 3.
The distribution of points is given just as a guide, and approximative. The quality of composition and presentation will be taken into account.
Documents and calculators forbidden.

Question de cours 1 (Index of a subgroup). [about 1 point] Let G be a finite group and H a subgroup. Give the definition of $[G : H]$ and show that $\sharp G = [G : H]\sharp H$.

Exercice 1 (Group of order 10). [About 7.5 to 8.5 points] In this exercise, we assume that $(G, \cdot)$ is a non commutative group of order 10, whose identity will be denoted 1_G.

1. Show that G has no element of order 10. By reasoning on the orders of elements of G, show that G has at least one element of order 5.
2. We choose in G an element b of order 5 and we denote by $H = \langle b \rangle$ the subgroup of G generated by b. Give a list of the elements of H. Give an argument (seen in TD) ensuring that H is normal in G.
3. Let a be an element of $G \setminus H$. Show that $a^2 = e$ (one can look at the class of a in the quotient G/H). Determine the subgroup of G generated by a and b (one can argue on the orders).
4. Show that $aba^{-1} = b^r$ for a certain integer $r \in [0, 4]$. By calculating in two ways $ab^r a^{-1}$, show that 5 divide $r^2 - 1$. Conclude that $aba^{-1} = b^{-1}$.
5. Show that the equalities $a^2 = b^5 = 1_G$ and $aba^{-1} = b^{-1}$ suffice to determine the multiplication table of G.
6. We introduce the matrices
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ and } R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$
Recall that the map $\theta \mapsto R_\theta$ is a group homomorphism from $\mathbb{R}$ to $GL_2(\mathbb{R})$. We denote by D_5 the group generated by the matrices A and $B = R_{2\pi/5}$. What is the order of A and B? What is the value of ABA^{-1}? Deduce from the above that the ten matrices B^k and AB^k for $k \in [0, 4]$ are pairwise distinct and that G is isomorphic to D_5.
7. Give two elements of $\mathcal{S}_5$ which generate a group isomorphic to G.

Continued on the back

Exercice 2 (Field with 9 elements). [About 4.5 to 5.5 points] We set $A = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X]$, and by abuse of notation, we will denote 0, 1, 2 respectively the classes of 0, 1 and of 2 in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. We recall that a polynomial of degree n with coefficients in a field K has at most n roots.

1. Show that $I = (X^2 + 1)$ is a maximal ideal of A.
2. Deduce from the above that A/I is a field. We call it F. Verify that F has 9 elements.
3. We note $B = \{x \in F^* : x^4 = 1\}$. Show that $B \neq F^*$. Deduce that F^* is cyclic.
4. Let $f : F \to F$ be the map defined by $f(t) = t^3$ for all $t \in F$. Show that f is a ring automorphism.
5. Show that $f \circ f = \mathrm{Id}$ (where Id denotes the identity map).
6. Determine the set $S = \{t \in F : f(t) = t\}$.

Exercice 3 (Sylow's theorems for abelians groups). [About 6 to 7 points] Let p be a prime number and $\alpha \in \mathbb{N}^*$. The purpose of the exercise is to prove the following assertions:

- all finite abelian groups whose orders are multiple of p^α have a subgroup of order p^α ;
- if $(G, \cdot)$ is an abelian group of finite order $p^\alpha m$ with m integer non multiple of p, then G has unique subgroup of order p^α.

1. Let $(G, \cdot)$ be a group. If $a \in G$ is of order mn with $m, n \in \mathbb{N}^*$, show that a^m is of order n.
2. Let $(G, \cdot)$ be a finite abelian group, $H_1, \ldots, H_r$ be subgroups of G and H the subgroup of G generated by $H_1, \ldots, H_r$. Show that the map $(x_1, \ldots, x_r) \mapsto x_1 \cdots x_r$ is a group homomorphism from $H_1 \times \cdots \times H_r$ to G, with the image equal to H. Deduce that the order of H divides the product of the orders of $H_1, \ldots, H_r$.
3. Show the first assertion in the case when $\alpha = 1$. Hint: denote by $a_1, ..., a_r$ the elements de G and apply the result of the previous question with $H_i = \langle a_i \rangle$.
4. Show the first assertion by induction on α. Hint: if $(G, \cdot)$ is a finite abelian group whose order is multiple of p^α with $\alpha \geqslant 2$, choose an element a of order p, and use the canonical surjection π from G to $G/\langle a \rangle$.
5. Let $(G, \cdot)$ be an abelian group of finite order, $p^\alpha m$ with m integer not multiple of p. Let H_1 and H_2 be two subgroups of G, of order p^α. Show that $H_1 = H_2$. Hint: let H be the subgroup generated by H_1 and H_2. Using question 2, show that the order of H is a power of p and conclude.
6. Using the first assertion, show that all abelian groups of order 10 are cyclic.

Université Joseph Fourier	2011-2012
Licence 3	Parcours A

Algèbre

Examen du 07/01/2013, 13h-17h

Les exercices sont indépendants.
Le barême est donné à titre indicatif. Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction.
Documents et calculatrices interdits. Dictionnaire français-anglais autorisé.
Rendre l'exercice 1 sur une copie séparée.

Exercice 1 (L'équation de Fermat pour les polynômes). [Environ 5 à 6 points]

1. Soient A et B dans $\mathbb{C}[X]$, premiers entre eux. Soit $n \geqslant 2$ un entier. Montrer que si $AB = Q^n$ avec Q dans $\mathbb{C}[X]$ non nul, alors il existe U et V dans $\mathbb{C}[X]$, premiers entre eux, tels que $A = U^n$ et $B = V^n$. Indication : décomposer Q en facteurs irréductibles.
2. Soient P, Q, R dans $\mathbb{C}[X]$ non nuls vérifiant $P^2 + Q^2 = R^2$.

   (a) On suppose dans un premier temps que P et R sont premiers entre eux. Montrer que $(R+P)/2$ et $(R-P)/2$ sont premiers entre eux, puis montrer l'existence de polynômes U et V dans $\mathbb{C}[X]$, premiers entre eux, tels que $P = U^2 - V^2$, $Q = 2UV$, $R = U^2 + V^2$. Indication : remarquer que
   $$\left(\frac{Q}{2}\right)^2 = \frac{R+P}{2} \times \frac{R-P}{2}.$$

   (b) On ne suppose plus que P et R sont premiers entre eux, et on note $D = P \wedge R$. Montrer que D divise Q. En déduire l'existence de polynômes U et V dans $\mathbb{C}[X]$, premiers entre eux, tels que $P = (U^2 - V^2)D$, $Q = 2UVD$, $R = (U^2 + V^2)D$.

3. On fixe un entier $n \geqslant 3$ et on note $\zeta = e^{i2\pi/n}$. Le but de cette question est de montrer que si trois polynômes non nuls P, Q, R dans $\mathbb{C}[X]$ vérifient $P^n + Q^n = R^n$, alors ils sont constants. On raisonne par l'absurde en supposant l'existence d'une solution formée de polynômes non nuls, non tous constants. On note (P, Q, R) une solution formée de polynômes non nuls, non tous constants, qui minimise l'entier $m = \max(\deg P, \deg Q, \deg R)$ parmi toutes les solutions de $P^n + Q^n = R^n$.

   (a) Montrer les égalités
   $$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(X - \zeta^k) \quad \text{et} \quad R^n - P^n = \prod_{k=0}^{n-1}(R - \zeta^k P).$$
   Indication pour la deuxième égalité : on pourra montrer que les fonctions polynômes coïncident en dehors des zéros de P.

   (b) Montrer que P et R sont premiers entre eux, et que parmi eux au plus un est constant.

   (c) En déduire que les polynômes $R - \zeta^k P$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ sont premiers entre eux deux-à-deux, et que parmi eux au plus un est constant. Indication : si α et β sont des complexes distincts, R et P sont dans le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$ engendré par $R - \alpha P$ et $R - \beta P$.

   (d) Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, montrer l'existence d'un polynôme non nul U_k tel que $U_k^n = R - \zeta^k P$. Majorer le degré de U_k.

   (e) Montrer qu'il existe α et β dans $\mathbb{C}^*$ tels que $R - \zeta^2 P = \alpha(R - P) + \beta(R - \zeta P)$ et obtenir une contradiction.

Exercice 2 (Endomorphismes simples et semi-simples). [Environ 9 à 10 points]
Soient K un corps commutatif, E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. On note χ_u le polynôme caractéristique de u. Si F est un sous-espace vectoriel stable par u (c'est-à-dire si $u(F) \subset F$), on note u_F l'endomorphisme de F induit par u, défini par $u_F(x) = u(x)$ pour tout $x \in F$.
Partie I. On dit que u est simple lorsque les seuls sous-espaces de E stables par u sont $\{0\}$ et E.

1. Montrer que si $n \geqslant 2$, un endomorphisme semi-simple n'admet pas de vecteur propre. En déduire que si $K = \mathbb{C}$ et $n \geqslant 2$, $\mathcal{L}(E)$ ne possède pas d'endomorphismes semi-simples.
2. Soit $x \in E$, non nul. On appelle E_x le sous-espace vectoriel de E engendré par les $u^k(x)$ pour $k \in \mathbb{N}$. Soit $d \geqslant 1$ le plus grand entier tel que la famille $\big(x, u(x), ..., u^{d-1}(x)\big)$ soit libre.
   (a) Justifier l'existence de d et l'existence d'un polynôme B de degré d tel que $B(u)(x) = 0$.
   (b) Montrer que $\big(x, u(x), ..., u^{d-1}(x)\big)$ est une base de E_x Indication : pour $k \geqslant d$, on pourra utiliser la division euclidienne de X^k par B.
   (c) Montrer que le polynôme caractéristique de u_{E_x} divise χ_u. Indication : on pourra compléter $\big(x, u(x), ..., u^{d-1}(x)\big)$ en une base de E.
3. On suppose χ_u irréductible. Montrer que u est simple.
4. On suppose maintenant que u est simple et on veut montrer que χ_u est irréductible.
   (a) Montrer que, pour tout polynôme non nul P de degré strictement inférieur à n et tout $x \in E$ non nul, $P(u)(x) \neq 0$. Indication : utiliser la question 2*b*). En déduire que $P(u)$ est un isomorphisme de E sur E.
   (b) Déduire de ce qui précède que χ_u est irréductible.
5. Si $K = \mathbb{R}$ et si u est simple, quelles sont les dimensions possibles de E ?

Partie II. On dit que u est semi-simple lorsque tout sous-espace vectoriel de E stable par u possède un supplémentaire stable par u.

1. On suppose dans cette question que u est semi-simple. On pose $\mu_u = \pi_1^{\alpha_1}...\pi_m^{\alpha_m}$ où les π_k sont irréductibles, deux à deux distincts et les α_k dans $\mathbb{N}^*$ et on note $P = \pi_1...\pi_m$.
   (a) Montrer que $P(u)$ est nilpotent, que $\operatorname{Ker} P(u)$ possède un supplémentaire G stable par $P(u)$ et que l'endomorphisme induit $P(u)_G$ est inversible.
   (b) En déduire que $P(u)$ est nul et que les α_k valent 1.
2. Dans cette question, on suppose que μ_u est irréductible et on note $L = K[X]/(\mu_u)$.
   (a) Vérifier que L est un corps. Dans la suite, si $P \in K[X]$, on notera $\overline{P}$ la classe de P dans L.
   (b) Pour tout $P \in K[X]$ et tout $x \in E$, on pose $\overline{P} \cdot x := P(u)(x)$. Vérifier que cette opération est bien définie. On **admettra** dans la suite que, muni de la loi $+$ et de cette loi $\cdot$, E est un L-espace vectoriel.
   (c) Montrer que, si $F \subset E$, alors F est un K-sous-espace vectoriel de E stable par u si, et seulement si, F est un L-sous-espace vectoriel de E.
   (d) En déduire que u est semi-simple.
3. Dans cette question, on suppose que $\mu_u = \pi_1...\pi_m$ où les π_k sont irréductibles et deux à deux distincts. On cherche à montrer que u est semi-simple. On pose $F_i := \operatorname{Ker}\ (\pi_i(u))$.
   (a) Montrer que F_i est stable par u, et que l'endomorphisme u_{F_i} est semi-simple.
   (b) Soit F un sous-espace de E stable par u. En justifiant les égalités $E = \bigoplus_{i=1}^m F_i$ et $F = \bigoplus_{i=1}^m (F \cap F_i)$, montrer que F possède un supplémentaire stable par u. Indication : à quoi est égal $\operatorname{Ker}(\pi_i(u_F))$?
4. Lorsque $K = \mathbb{C}$, montrer que u est semi-simple si, et seulement si, u est diagonalisable.

Exercice 3 (Le groupe $SL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$). [Environ 5 à 6 points]

Soient $p \geqslant 3$ un nombre premier et $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots \overline{p-1}\}$. On note (e_1, e_2) la base canonique de K^2. À toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(K)$, on associe l'endomorphisme u_M de K^2 de matrice M dans la base (e_1, e_2).

1. Dans le groupe $(K^2, +)$, quel est l'ordre d'un élément non nul ?
2. On note L l'ensemble des droites vectorielles dans K^2. Montrer que $\sharp L = p + 1$. Indication : on pourra remarquer que les droites vectorielles dans K^2 sont exactement les sous-groupes d'ordre p de $(K^2, +)$.
3. Déterminer l'ordre de $GL_2(K)$. Indication : une matrice de $\mathcal{M}_2(K)$est inversible si et seulement si ses deux colonnes forment une famille libre de K^2.
4. Dans cette question, on considère l'action naturelle du groupe $GL_2(K)$ sur l'espace vectoriel K^2, définie par $M \cdot (x, y) = u_M(x, y)$. Déterminer le stabilisateur et l'orbite de $e_1 = (\overline{1}, \overline{0})$. Retrouver ainsi l'ordre de $GL_2(K)$.
5. Soit $SL_2(K) = \{M \in \mathcal{M}_2(K) : \det M = 1\}$. Montrer que $SL_2(K)$ est un sous-groupe distingué de $GL_2(K)$, d'ordre $p(p^2 - 1)$. Indication : montrer que le déterminant est une surjection de $GL_2(K)$ dans K^*.
6. On note $\mathcal{S}_L$ le groupe symétrique sur L. Soit Φ le morphisme de $SL_2(K)$ dans $\mathcal{S}_L$ défini par $\Phi(M)(\ell) = M \cdot \ell = u_M(\ell)$. Montrer que l'action de $SL_2(K)$ sur L ainsi définie est transitive. Quel est le stabilisateur de de $l_1 = Ke_1$? Quel est son ordre ?
7. Déterminer $\operatorname{Ker} \Phi = \{M \in SL_2(K) : \Phi(M) = \mathrm{id}_L\}$ et en déduire l'ordre de $\operatorname{Im} \Phi$.
8. Dans cette question, on prend $p = 3$. En admettant que le seul sous-groupe d'ordre 12 du groupe symétrique $\mathcal{S}_4$ est le groupe alterné $\mathcal{A}_4$, montrer que $SL_2(K)/\operatorname{Ker} \Phi$ est isomorphe à $\mathcal{A}_4$. Le groupe $SL_2(K)$ est-il isomorphe à $\mathcal{S}_4$? On pourra considérer les centres de ces groupes.

Examen du 7 janvier 2013. (durée : 4h)

Tous documents, calculatrices et téléphones portables interdits.
Il sera particulièrement tenu compte du soin apporté à la rédaction.
Barème indicatif : questions de cours : 2,5 points, exercice 1 : 8 points, exercice 2 : 5,5 points, exercice 3 : 4 points

Questions de cours

1. Soit G un groupe fini et $f : G \to G'$ un morphisme de groupes.
   (a) Citer une relation liant les cardinaux de G , $Kerf$ et Imf.
   (b) Montrer cette relation.
2. Soit A un anneau intègre , quand dit-on qu'un élément x de A est irréductible ?
3. Soit K un corps.
   (a) En utilisant la division euclidienne dans l'anneau $K[X]$ des polynômes à coefficients dans K, montrer que tout idéal de l'anneau $K[X]$ est un idéal principal.
   (b) En déduire que si P est un polynôme irréductible de $K[X]$ alors l'idéal de $K[X]$ engendré par P est un idéal maximal de $K[X]$.

Exercice 1 :

On considère l'anneau $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{R}$.

1. Soit I l'idéal de $\mathbb{R}[X]$ engendré par les polynômes $X^4 - 1$ et $X^3 + X^2 - X - 1$.
   (a) Décrire l'idéal I.
   (b) Calculer le PGCD des polynômes $X^4 - 1$ et $X^3 + X^2 - X - 1$ et en déduire une autre description de I.
   (c) Trouver tous les polynômes U et V de $\mathbb{R}[X]$ tels que
   $$(X^4 - 1)U(X) + (X^3 + X^2 - X - 1)V(X) = X^2 - 1$$
2. L'idéal I est-il un idéal maximal de $\mathbb{R}[X]$?
3. Soit J l'idéal de $\mathbb{R}[X]$ engendré par le polynôme $X^2 + 1$. L'idéal J est-il un idéal maximal de $\mathbb{R}[X]$?

4. On considère les anneaux quotient $E = \mathbb{R}[X]/I$ et $F = \mathbb{R}[X]/J$. Les anneaux E et F sont-ils isomorphes ? On note $\overline{P}$ la classe d'un polynôme P modulo I et $\dot{P}$ celle modulo J.
5. Montrer que E et F sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
6. Montrer que la famille $(\overline{1}, \overline{X})$ est une base pour E et que la famille $(\dot{1}, \dot{X})$ en est une pour F. Décomposer la classe du polynôme $X^4 + X^3$ dans ces bases.
7. Les groupes $(E, +)$ et $(F, +)$ contiennent-ils des éléments non nuls d'ordre fini ?
8. On note $E^\times$ l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau E
   (a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, montrer que $\overline{P}$ est inversible dans $E^\times$ si et seulement si P et $X^2 - 1$ sont premiers entre eux dans $\mathbb{R}[X]$.
   (b) Quels sont les éléments de E qui n'appartiennent pas à $E^\times$? Quelle est leur expression dans la base $(\overline{1}, \overline{X})$?
9. Le groupe $(E^\times, \times)$ contient-il des éléments d'ordre fini distincts de 1 et -1 ? Qu'en est-il pour le groupe $(F^\times, \times)$?
10. Montrer que le morphisme d'anneau $\psi : \mathbb{R}[X] \to E \times F$ qui à un polynôme P associe le couple $(\overline{P}, \dot{P})$ se factorise en un morphisme $\overline{\psi} : \mathbb{R}[X]/(X^4-1) \to E \times F$.
11. Montrer que ψ et $\overline{\psi}$ sont des applications linéaires.
12. Quelles sont les dimensions des espaces vectoriels $\mathbb{R}[X]/(X^4 - 1)$ et $E \times F$?
13. L'application $\overline{\psi}$ est-elle injective ?
14. L'application $\overline{\psi}$ est-elle un isomorphisme d'anneaux ?

Exercice 2 :

On considère l'ensemble E formé des huit points $A = (3, 2, 1)$, $B = (-3, 2, 1)$, $C = (-3, -2, 1)$, $D = (3, -2, 1)$, $A' = (3, 2, -1)$, $B' = (-3, 2, -1)$, $C' = (-3, -2, -1)$, $D' = (3, -2, -1)$ de $\mathbb{R}^3$. Ces huit points forment les sommets d'un parallélépipède rectangle. On note G le sous-groupe de $O(\mathbb{R}^3)$ formé des isométries vectorielles de $\mathbb{R}^3$ qui laissent l'ensemble E globalement invariant.

1. On note $F = \{A, B, C, D\}$ et $F' = \{A', B', C', D'\}$, on a donc une partition $E = F \cup F'$ en deux faces F et F' qui sont des rectangles de diagonales $d_1 = [A; C]$, $d_2 = [B; D]$, $d_3 = [A'; C']$, et $d_4 = [B'; D']$.
   (a) Montrer que toute isométrie g de G envoie les diagonales d_1 et d_2 sur deux autres diagonales qui ont un point commun. En déduire que $g(F) = F$ ou $g(F) = F'$.

(b) On obtient donc une action du groupe G sur l'ensemble $\{F, F'\}$ donnée par

$$\forall g \in G \quad g.F = g(F) \quad et \quad g.F' = g(F')$$

Quelle est l'orbite $G.F$ sous cette action ?

(c) Quel est le cardinal de $Stab(F)$? (on pourra remarquer que le groupe $Stab(F)$ agit sur F)

(d) Le groupe $Stab(F)$ est-il un sous-groupe distingué de G ?

(e) Soit N l'ensemble des éléments de G qui envoient la face F sur la face F'.

i. L'ensemble N est-il un sous-groupe de G ?

ii. Etablir une bijection entre N et $Stab(F)$.

iii. Quel est le cardinal de G ?

iv. Faire la liste des isométries de G.

2. Soit s l'homothétie de rapport -1 et $\psi : Stab(F) \times \{id, s\} \to G$ l'application définie par $\psi((h,k)) = hk$. Montrer que ψ est un isomorphisme de groupes.
3. Le groupe G est-il commutatif ?

Exercice 3 :

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3) et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base (e_1, e_2, e_3) est

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme minimal μ_{f,e_i} associé au vecteur e_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$.
2. En déduire le polynôme minimal μ_f et le polynôme caractéristique χ_f.
3. Donner une base (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Montrer que f est un endomorphisme inversible et qu'il existe un polynôme P dans $\mathbb{R}[X]$ tel que $f^{-1} = P(f)$.
5. Calculer M^{-1}.

Université Joseph Fourier — **Topologie L3A**
Licence Sciences et Technologies — **Année 2012–2013**

Examen du 8 janvier 2013

Documents, calculatrices, et téléphones portables sont interdits. Les deux exercices et le problème sont indépendants. Durée de l'épreuve : 4 heures.

Question de cours.
Définir la notion de connexité pour un espace topologique (E, τ), et rappeler ce que sont les composantes connexes de E. Expliquer pourquoi les composantes connexes sont nécessairement des sous-ensembles fermés de E. Que peut-on dire de plus lorsque E possède un nombre fini de composantes connexes ?

Exercice 1. (*Cube de Hilbert*)
On considère l'espace $E = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ des suites réelles de carré sommable, muni de la norme

$$\|x\|_2 \;=\; \Bigl(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2\Bigr)^{1/2} \qquad \text{si} \quad x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E\ .$$

On rappelle que E est un espace de Hilbert, et que si $x \in E$ on a $|x_n| \le \|x\|_2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $|x_n| \to 0$ lorsque $n \to \infty$. On se donne également une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels positifs ou nuls, et on définit l'ensemble

$$A \;=\; \Bigl\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \Bigm| 0 \le x_n \le a_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \Bigr\}\ .$$

a) Vérifier que A est un sous-ensemble fermé de E.

b) Vérifier que A est convexe, donc connexe par arcs.

c) Montrer que A est d'intérieur vide, de sorte que $A = \partial A$.

d) Montrer que A est borné si et seulement si

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2 \;<\; \infty\ . \tag{1}$$

e) Si la condition (1) est remplie, montrer que A est homéomorphe à l'espace

$$B \;=\; \prod_{n\in\mathbb{N}} [0, a_n]\ ,$$

muni de la topologie produit. *Indication :* On pourra vérifier que l'application identité $\mathbf{1} : A \to B$ est bicontinue, en comparant la convergence des suites dans A et dans B.

f) En déduire que, si la condition (1) est remplie, A est un sous-ensemble compact de E.

Exercice 2. (*Topologie quotient et décomposition canonique*)
Soient (E_1, τ_1), (E_2, τ_2) deux espaces topologiques, et $f : E_1 \to E_2$ une application continue et surjective. On définit une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur E_1 en posant :

$$x \,\mathcal{R}\, y \quad \text{si et seulement si} \quad f(x) \;=\; f(y) \;.$$

On note $E_1/\mathcal{R}$ l'ensemble des classes d'équivalence de E_1 pour la relation $\mathcal{R}$, et $\pi : E_1 \to E_1/\mathcal{R}$ l'application canonique qui associe à chaque élément x de E_1 sa classe d'équivalence selon $\mathcal{R}$, notée $[x]$.

a) Montrer qu'il existe une application unique $g : E_1/\mathcal{R} \to E_2$ telle que $f = g \circ \pi$. Vérifier que g est bijective.

b) On munit $E_1/\mathcal{R}$ de la topologie quotient

$$\tau \;=\; \Big\{ C \subset E_1/\mathcal{R} \,\Big|\, \pi^{-1}(C) \in \tau_1 \Big\} \;.$$

Vérifier que les applications $\pi : E_1 \to E_1/\mathcal{R}$ et $g : E_1/\mathcal{R} \to E_2$ sont continues.

c) On suppose en outre que l'application $f : E_1 \to E_2$ est *ouverte*, c'est-à-dire que l'image par f de toute partie ouverte de E_1 est ouverte dans E_2. Vérifier que l'application $g : E_1/\mathcal{R} \to E_2$ est également ouverte, et en déduire que g est un homéomorphisme.

d) Montrer que les conclusions de la question précédente restent vraies si on suppose seulement que l'application continue et surjective $f : E_1 \to E_2$ possède la propriété additionnelle suivante :

$$\text{pour tout } A \subset E_2 \;, \quad f^{-1}(A) \in \tau_1 \;\Rightarrow\; A \in \tau_2 \;. \tag{P}$$

e) On suppose à présent que l'espace E_1 est connexe par arcs, et que $E_2 = \mathbb{R}$ est muni de la topologie usuelle. Si $f : E_1 \to E_2$ est continue et surjective, montrer que la propriété (P) est vérifiée. En conclure que $g : E_1/\mathcal{R} \to E_2$ est un homéomorphisme.

Indication : Soit $A \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble non vide, et $a \in A$. Vérifier qu'il existe des points $x_0, x_1 \in E_1$ tels que $f(x_0) = a-1$ et $f(x_1) = a+1$, et un chemin continu $\gamma : [0,1] \to E_1$ qui relie x_0 à x_1. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer que, si $f^{-1}(A)$ est ouvert, alors l'ensemble $f(\gamma([0,1]) \cap f^{-1}(A)) \subset A$ contient nécessairement un voisinage ouvert de a.

f) On suppose enfin que $E_1 = \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$ et $E_2 = \mathbb{R}$ sont munis de la topologie usuelle, et que $f : E_1 \to E_2$ est définie par

$$f(x) \;=\; \begin{cases} \frac{1}{x+1} & \text{si } \; x < -1 \,, \\ \;\;0 & \text{si } \; |x| < 1 \,, \\ \frac{1}{x-1} & \text{si } \; x > 1 \,. \end{cases}$$

Vérifier que f est continue et surjective, mais que f ne possède pas la propriété (P) et n'est en particulier pas ouverte. L'application $g : E_1/\mathcal{R} \to E_2$ est-elle un homéomorphisme dans ce cas ?

Problème. (*Distance de Hausdorff*)
Soit (E,d) un espace métrique. Si A et B sont des sous-ensembles bornés non vides de E, on définit
$$\delta(A,B) \;=\; \sup_{x\in A}\,\inf_{y\in B} d(x,y) \;=\; \sup_{x\in A}\, \mathrm{dist}(x,B)\ .$$
Pour tout $\epsilon \geq 0$, on note aussi $B_\epsilon = \{x \in E \,|\, \mathrm{dist}(x,B) \leq \epsilon\}$.

Première partie :

a) Pour tout $\epsilon \geq 0$, vérifier que $\delta(A,B) \leq \epsilon$ si et seulement si $A \subset B_\epsilon$.

b) En déduire que $\delta(A,B) = 0$ si et seulement si $A \subset \overline{B}$.

c) Si $A, B, C \subset E$ sont bornés et non vides, vérifier que
$$\delta(A,C) \;\leq\; \delta(A,B) + \delta(B,C)\ .$$

d) On définit
$$D_H(A,B) \;=\; \max(\delta(A,B), \delta(B,A))\ . \tag{2}$$
Vérifier que D_H est une distance sur la famille de tous les sous-ensembles fermés, bornés et non vides de E.

Seconde partie :
On suppose désormais que E est l'espace $\mathbb{R}^N$ ($N \in \mathbb{N}^*$) muni de la distance euclidienne $d(x,y) = \|x-y\|_2$. On note $K(E)$ l'ensemble de toutes les parties compactes non vides de E, et on munit $K(E)$ de la distance de Hausdorff D_H définie par (2).

e) Vérifier qu'un sous-ensemble $\mathcal{F} \subset K(E)$ est borné pour la distance D_H si et seulement si $\cup_{A\in\mathcal{F}} A$ est un sous-ensemble borné de E.

f) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $K(E)$. On définit
$$B \;=\; \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\ , \qquad \text{où} \quad B_n \;=\; \overline{\bigcup_{k\geq n} A_k}\ , \quad n \in \mathbb{N}\ .$$
Ici, $^-$ désigne l'adhérence dans E. Vérifier que $B_n \in K(E)$ et que $B_{n+1} \subset B_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que $B \in K(E)$.

g) Montrer que $\delta(B_n, B)$ converge vers zéro lorsque $n \to \infty$. *Indication :* On pourra raisonner par contradiction, en utilisant la propriété de Bolzano-Weierstrass dans E.

h) Montrer que $\delta(A_n, B)$ et $\delta(B, A_n)$ convergent vers zéro lorsque $n \to \infty$. En déduire que $K(E)$ muni de la distance de Hausdorff D_H est un espace métrique complet.

EXAMEN GGMAT35c

8 janvier 2013

Documents, calculatrices et téléphones portables interdits.
Dans la notation, il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.
Durée : 4h

Exercice 1 (Questions de cours)

1. Soit E un espace vectoriel et $\|.\|$, $\|.\|'$ deux normes sur E. Montrer que $\|.\|$ et $\|.\|'$ sont équivalentes si et seulement si

$$id_E : \begin{array}{ccc} (E, \|.\|) & \to & (E, \|.\|'), \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

est un homéomorphisme.

2. (a) Montrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est bornée et fermée.
   (b) Donner une condition suffisante sur E pour que la réciproque (toute partie bornée et fermée est compacte) soit vraie. Est-ce que cette condition est aussi nécessaire ? Justifier votre réponse.

Exercice 2

On prendra soin de justifier toute affirmation le plus soigneusement possible.

On considère les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{array}{rcl} (n=2)\, A & = & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\, x^2 + 4y^2 \leq 1\}, \\ (n=1)\, B & = & \mathbb{Q} \cap]0,1]. \end{array}$$

1. Déterminer l'adhérence et l'intérieur de A et B. Justifier vos réponses.

2. Lesquels de ces ensembles sont compacts, connexes par arcs ? Justifier vos réponses.

Exercice 3 On considère $E = C([0,1];\mathbb{R})$ et $p \in [1, \infty[$. On munit E de la norme

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ données par

$$f_n(x) = \left\{ \begin{array}{ccl} 0 & \text{si} & x \in [0, 1/2], \\ (n+1)(x - 1/2) & \text{si} & x \in]1/2, 1/2 + \frac{1}{n+1}], \\ 1 & \text{si} & x \in]1/2 + \frac{1}{n+1}, 1]. \end{array} \right.$$

T.S.V.P.

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de E. Dessiner f_3.
2. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy pour la norme $\|.\|_p$.
   (Indication : $\forall x \in [1/2, 1] \quad |f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - 1| + |f_n(x) - 1|$.)
3. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas dans E. En déduire que $(E, \|.\|_p)$ n'est pas complet. (Indication: étudier la valeur en $1/2$ d'une limite possible f et arriver à une contradiction).

Exercice 4

On note ℓ^2 l'espace vectoriel des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telles que $\sum_n a_n^2 < \infty$. On munit ℓ^2 du produit scalaire

$$\langle (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle_{\ell^2} = \sum_n a_n b_n.$$

On note $\|.\|_{\ell^2}$ la norme associée. On rappelle que $(\ell^2, \langle ., . \rangle)$ est un espace de Hilbert. On note

$$h^1 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2; \sum_n n^2 a_n^2 < \infty\}.$$

Pour $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in h^1$ on pose

$$\langle (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle_{h^1} = \sum_n (1 + n^2) a_n b_n. \tag{1}$$

1. Montrer que pour $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in h^1$ on a $(\sqrt{n^2+1}\, a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$.
2. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz montrer que la série dans le membre de droite de (1) est convergente et que (1) définit un produit scalaire sur h^1. Soit $\|.\|_{h^1}$ la norme associée.
3. On note $\|.\|_2$ la restriction de la norme $\|.\|_{\ell^2}$ à h^1. Montrer que la norme $\|.\|_{h^1}$ est plus fine que la norme $\|.\|_2$.
4. On considère la suite $(a(m))_{m\in\mathbb{N}}$ d'éléments de h^1 donnée par

$$a(m)_n := \begin{cases} 1 & n = m, \\ 0 & n \neq m. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{c} a(m) = (0, 0, \quad ..., 0, \underset{\substack{\uparrow \\ m\,\text{ième place}}}{1}, 0, ... \quad ....) \end{array} \right)$$

   En utilisant la suite $a(m)$ montrer que la norme $\|.\|_2$ n'est pas plus fine que la norme $\|.\|_{h^1}$.

   On considère maintenant l'application

$$L : \begin{array}{ccc} (h^1, \|.\|_{h^1}) & \to & (\ell^2, \|.\|_{\ell^2}) \\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & ((n+1)a_n)_{n\in\mathbb{N}}. \end{array}$$

5. Montrer que l'application L est bien définie, linéaire et continue. Calculer sa norme triple $|||L|||$.
6. Montrer que L est bijective. Calculer son inverse L^{-1}. Est-ce que L^{-1} est continue ?

Exercice 5

Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace vectoriel normé réel de dimension supérieure ou égale à 2. On note S_E la sphère unité de E.

1. Soient $x, y \in S_E$.
   (a) Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel F de E de dimension 2 tel que $x, y \in F$.
   (b) Soit $\Psi : \mathbb{R}^2 \to F$ un isomorphisme d'espaces vectoriels. Montrer que Ψ est continue. En déduire que $F \setminus \{0_F\}$ est connexe par arcs.
   (c) En déduire que S_E est connexe par arcs.
2. Soit $R > 0$ et $a \in E$. On munit $F = E \times \mathbb{R}$ de la norme $\|(x, s)\| = \max(\|x\|_E, |s|)$. Montrer que l'application suivante est un homéomorphisme

$$J : \begin{array}{ccc} S_E \times]R, +\infty[& \to & E \setminus \bar{B}(a, R) \\ (x, s) & \mapsto & a + sx. \end{array}$$

3. En déduire que le complément d'une boule fermée est connexe par arcs.

Université de Grenoble I — **Année 2012/2013**
Institut Fourier — **Examen du 23 mai 2013**

L3 de Mathématiques, section A
Calcul différentiel

Durée: 3 heures – il sera tenu particulièrement compte de la rédaction.
Documents, calculettes et téléphones portables interdits.

Question de cours

0.a. Énoncer une version du lemme de Gronwall et en donner une démonstration.

0.b. Expliciter les conséquences du lemme de Gronwall quant à l'unicité des solutions d'une équation différentielle de la forme $y'(t) = f(t, y(t))$, la convergence des solutions approchées et la continuité des solutions en fonction d'un paramètre s.

Exercice 1

On considère dans $\mathbb{R}^3$ la fonction définie par

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 3z - z^3$$

1.a. Déterminer pour quelles valeurs du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ l'ensemble de niveau

$$S_\lambda = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ f(x, y, z) = \lambda\}$$

est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la dimension de S_λ ?

1.b. Pour les valeurs λ_i de λ telles que S_λ ne soit pas une sous-variété, montrer qu'il existe un unique point singulier $p_i \in S_{\lambda_i}$ que l'on déterminera explicitement.

1.c. Pour chaque valeur critique $\lambda = \lambda_i$, on se propose de montrer qu'il existe un changement de variable $\varphi_i : (x, y, z) \mapsto (X, Y, Z) = \varphi_i(x, y, z)$ qui soit un difféomorphisme de classe C^∞ d'un voisinage du point singulier p_i sur un voisinage de $(0, 0, 0)$, transformant S_{λ_i} en un cône quadratique. Y a-t-il un résultat théorique du cours garantissant a priori cette affirmation ? Peut-on prévoir la signature de la forme quadratique définissant le cône pour chacune des valeurs λ_i ?

1.d. Factoriser le polynôme $z^3 - 3z + 2$ et en déduire que pour la valeur critique $\lambda = \lambda_i > 0$ on peut choisir un changement de variable φ_i de la forme $\varphi_i(x, y, z) = (x, y, u_i(z))$ où u_i est une fonction C^∞ que l'on explicitera, ramenant localement S_{λ_i} à un cône quadratique $X^2 + Y^2 - Z^2 = 0$ au voisinage de p_i.

1.e. Traiter de même le cas $\lambda = \lambda_i < 0$, et décrire dans ce cas l'ensemble S_{λ_i} au voisinage de p_i.

Exercice 2

On considère dans $\mathbb{R}^3$ la partie K telle que

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq 0\}.$$

On considère sur K la fonction

$$g(x,y,z) = 2x^3 - y^4 + \frac{8}{3}z^3.$$

2.a. Montrer que K est la réunion de 4 sous-variétés différentiables de $\mathbb{R}^3$ de différentes dimensions, l'une d'entre elles étant l'ouvert $\Omega = K^\circ$ constitué de l'intérieur de K.

2.b. Montrer (sans les calculer) que la fonction g a nécessairement un maximum et un minimum global sur K.

2.c. Déterminer les points critiques de g sur les 4 sous-variétés décrites en 2.a (dans le cas de l'hémisphère supérieur, on commencera par observer qu'un tel point critique vérifie nécessairement $y = 0$).

2.d. Déduire de 2.c la valeur des extrema de g sur K.

Exercice 3

On se propose d'étudier les solutions $t \mapsto y(t)$ d'une équation différentielle du second ordre

$$(*) \qquad y'' - 4y' + 4y = f(t)$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

3.a. Déterminer les solutions de l'équation homogène (correspondant à $f = 0$).

3.b. Ramener l'équation $(*)$ à un système d'ordre 1 en posant $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$, et donner une base de solutions du système homogène associé.

3.c. En utilisant 3.b., exprimer l'unique solution $t \mapsto y(t)$ de l'équation $(*)$ satisfaisant la condition initiale $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. Expliciter cette solution dans le cas particulier où $f(t) = e^{2t}$.

Exercice 4

On considère dans le plan $\mathbb{R}^2$ le champ de vecteurs

$$M = (x,y) \mapsto \vec{V}(M) = (4x^2 + y, -2x - y).$$

4.a. Déterminer les points singuliers de ce champ de vecteurs.

4.b. Calculer les différentielles $d\vec{V}$ en ces points, et déterminer s'il s'agit de points singuliers stables ou instables.

Calcul différentiel

Licence 3 (parcours B) Université Joseph Fourier, Mai 2013

Pas de document autorisé

Examen, 4 heures

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2. On suppose que f verifie la relation :

$$(\star) : \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$

On pose $(u,v) = \sigma(x,y) = (x+y, -x+y)$.

1. Verifier que σ est bijective, et donner $\sigma^{-1}(u,v)$ (c'est à dire x et y en fonction de u et v).
2. On pose $F = f \circ \sigma^{-1}$. Montrer que $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}(u,v) = 0$.
3. Montrer qu'il existe deux fonctions g_1, et g_2 (d'une variable, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^2) telles que $F(u,v) = g_1(u) + g_2(v)$.
4. Montrer que si $\phi(x,y) = h_1(x+y) + h_2(x-y)$ (pour h_1 et h_2 deux fonctions d'une variable, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^2), alors ϕ est solution de l'équation $(\star)$
5. On suppose toujours que f est solution de $(\star)$ et on suppose que
$$f(x,0) = \sin(x) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = -\cos x.$$
Montrer que $\frac{dg_1}{du}(u) = 0$ et que $\frac{dg_2}{dv}(-v) = -\cos v$.
6. En conclure que $f(x,y) = \sin(x-y)$.
7. *Si on interprete la variable y comme le temps, et la variable x comme la position sur un axe, l'équation proposée est l'équation de propoagation des ondes.* Tracer le graphe de $(x \mapsto f(x,0))$ et, sur le même graphe, celui de $(x \mapsto f(x,\epsilon))$, pour $\epsilon > 0$ petit. Expliquer pourquoi on peut dire que "l'onde se propage vers la droite avec le temps". Comment changer les conditions initiales pour qu'elle se propage vers la gauche ?

Tournez S.V.P

Exercice 2

On se place dans le plan Euclidien. On considère $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $P_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

On note $f_1(x,y) = x^2 + (y-1)^2$ et $f_2(x,y) = (x-a)^2 + (y-b)^2$, qui donnent les carrés des distances de $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ à P_1 et à P_2 respectivement.

1. On note $\psi(x,y) = (f_1(x,y)) + (f_2(x,y))$.
   (a) Dans le cas $a = 0, b = -1$, que dire de ψ restreinte au cercle unité (de centre 0, de rayon 1) ?
   (b) On suppose désormais a et b arbitraires. Calculer la différentielle de ψ en un point $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
   (c) Trouver l'unique point où $d\psi$ s'annule. Calculer la matrice de la differentielle seconde $d^2\psi$ (en un point quelconque). Est-ce que le point où $d\psi$ s'annule est un minimum pour ψ, un maximum, ou ni l'un ni l'autre ?
   (d) On recherche maintenant un maximum de ψ en restriction au cercle unité $\{x^2+y^2 = 1\}$. En utilisant le principe des extrema liés, montrer que le maximum de ψ sur le cercle unité se situe en un point dont les coefficients verifient $ay = (b+1)x$.
   (e) On suppose que a est non nul, montrer que ψ atteint son maximum en un point d'abscisse $x = \dfrac{-a}{\sqrt{a^2 + (b+1)^2}}$. Quelle est son ordonnée ?
   (f) Si $b = a = 1$ trouver ce point.
   (g) Comment choisir a, b pour que ce maximum soit strict et atteint au point $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$?
2. On étudie désormais $\phi(x,y) = \dfrac{1}{f_1(x,y)} + \dfrac{1}{f_2(x,y)}$.
   (a) Donner le domaine de définition de ϕ, et calculer sa différentielle, là ou elle existe.
   (b) ϕ admet-elle un maximum ? Un minimum ?
   (c) Désormais on se restreint au cercle unité. Montrer que le minimum de ϕ sur le cercle unité est atteint en un point dont les coordonées (x,y) vérifient $(ay) \times f_1^2(x,y) = x \times (f_2(x,y)^2 + f_1(x,y)^2 b)$.
   (d) On se place dans le cas $a = 1, b = 1$. Le minimum est-il atteint au même point qu'à la question 1f ?

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

1. Calculer la différentielle de f.
2. Justifier que f est un difféomorphisme local en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
3. Montrer que f n'est pas un difféomorphisme global sur son image.

Fin.

Université Joseph Fourier 2012-2013
Licence 3 Parcours B

Géométrie

Examen du 24/05/2013, 09h-12h

Les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction. Documents et calculatrices interdits.

Exercice 1. Soit $\mathcal{P}$ un plan affine.

1. Soit $\mathcal{D}$ une droite affine de $\mathcal{P}$ et $A \in \mathcal{P}$ n'appartenant pas à $\mathcal{D}$. Déterminer l'enveloppe convexe de $\mathcal{D} \bigcup \{A\}$.
2. L'enveloppe convexe d'une partie fermée de $\mathcal{P}$ est-elle fermée ? Justifier.

Exercice 2. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine dirigé par l'espace vectoriel E. Soient $v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. On fixe aussi $O \in \mathcal{E}$ et on désigne par h l'homothétie de centre O et de rapport λ, et par t_v la translation de vecteur v.

1. Vérifier que $t_v \circ h$ et $h \circ t_v$ sont des applications affines.
2. Déterminer l'ensemble des points fixes de $t_v \circ h$ et $h \circ t_v$. Décrire complètement ces applications.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour avoir $t_v \circ h = h \circ t_v$.

Exercice 3. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On définit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ par

$$f(x, y, z) := (-z + a, y + b, -x + c).$$

1. Montrer que f est affine et calculer sa partie linéaire $\overrightarrow{f}$.
2. Montrer que $\overrightarrow{f}$ est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, puis que c'est une réflexion orthogonale. Calculer sa trace et en déduire que $\overrightarrow{f}$ est une réflexion orthogonale par rapport à un plan $P \subset \mathbb{R}^3$.
3. Déterminer P (on calculera l'ensemble des $v \in \mathbb{R}^3$ tels que $\overrightarrow{f}(v) = v$).
4. Déduire de ce qui précède la nature de l'application f (on discutera suivant les valeurs de a, b, c).

Exercice 4. Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien. Soient A, A', B, B' quatre points de $\mathcal{P}$ tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$. On rappelle qu'il existe une unique similitude directe f de $\mathcal{P}$ telle que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$.

1. Déterminer le rapport de f.
2. On suppose que les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles. Montrer que f est une homothétie (dont on calculera le centre et le rapport) ou une translation (dont on calculera le vecteur)
3. On suppose les droites (AB) et $(A'B')$ sécantes en un point I. On supposera également que $I \notin \{A, A', B, B'\}$.
   (a) Montrer que f possède un centre O.
   (b) Montrer que O est l'un des points d'intersection des cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ circonscrits respectivement à IAA' et IBB'.
   (c) Déterminer finalement le point O, selon que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont tangents ou non.

Exercice 5. Soit $\mathcal{E}$ une ellipse dans un plan affine euclidien $\mathcal{P}$. On fixe une droite $\overrightarrow{D}$ de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. On définit F comme l'ensemble des points $I \in \mathcal{P}$ pour lesquels il existe des points $A_1, A_2 \in \mathcal{E}$ tels que la droite (A_1A_2) soit dirigée par $\overrightarrow{D}$ et I soit le milieu de A_1A_2.

1. Montrer que F est le segment joignant les points M_1 et M_2 de $\mathcal{E}$ en lesquels la tangente a la direction $\overrightarrow{D}$.
2. Que peut-on dire des milieux des segments B_1B_2 où B_1 et B_2 sont des points de $\mathcal{E}$ avec $B_1 \neq B_2$ et la droite (B_1B_2) est parallèle à la droite (M_1M_2) ?

Université Joseph Fourier – Grenoble I

L3 : Licence Sciences et Technologies

UE Fonctions Holomorphes : examen, 22 mai 2012, 9–12 h.

Durée 3h. Tout document est interdit. Les calculatrices et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont également interdits.

Autour du cours

1. Vrai ou faux ? Justifiez vos réponses :
   (a) $z \mapsto \log(z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C} - \{0\}$.
   (b) Une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui est différentiable (aus sens réel) est holomorphe.
   (c) Une fonction entière est méromorphe.
   (d) La fonction $u(x, y) = \log(x^2 + y^2)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ est harmonique.
2. Soit $f(z)$ une fonction rationnelle. Décrire le sous-domaine maximal de $\mathbb{C}$ sur lequel f est holomorphe ; sous quelle condition f est-elle holomorphe en ∞ ?
3. Rappeler le théorème sur les développements de Laurent. Discuter la nature des singularités de $\dfrac{1}{z^n - 1}$, $e^{1/z}$ et $\dfrac{\sin z}{z}$.
4. Soit $S \subset \mathbb{C}$ un sous-ensemble dénombrable sans points d'accumulation dans $\mathbb{C}$. Supposons que f_1 et f_2 sont deux fonctions entières ayant des zéros d'ordre 1 dans tout point $s \in S$ et nulle part ailleurs. Que peut-on dire de la relation entre f_1 et f_2 ? Donner une indication de la preuve de votre assertion.

Exercices

1. Trouver toutes les fonctions holomorphes $f(z) = u + \mathrm{i}v$ telles que

$$u = 3 + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Ici $z = x + \mathrm{i}y$. Indication : on pourra utiliser que

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}\right) = \frac{2x(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3}.$$

2. (a) Rappeler le théorème de Rouché ;

   (b) Soit f holomorphe dans un domaine contenant le disque unité $D := \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$ et tel que $|f(z)| < 1$ sur D. Montrer que $f(z) = z$ a une unique solution dans D ;

3. Soit $f(z)$ méromorphe avec unique pôle d'ordre 1 en $z = 0$ avec résidu r. On pose $g(z) = f(z) + f(-z)$. Soit $\gamma_\rho = \rho e^{2\pi \mathrm{i}t}$, $0 \leq t \leq 1$ le cercle de rayon ρ et de centre 0 et $\gamma_\rho^\pm$ les demi-cercles correspondants (avec même orientation) dans les demiplans supérieur/inférieur.

   (a) Montrer que $g(z)$ est une fonction entière. Déduire que

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{\gamma_\rho^\pm} g(z)dz = 0;$$

   (b) Montrer que $\int_{\gamma_\rho^+} f dz = -\int_{\gamma_\rho^-} f(-z)dz$. Utiliser (a) pour en déduire que

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{\gamma_\rho^+} f(z)dz = \lim_{\rho \to 0} \int_{\gamma_\rho^-} f(z)dz = \pi \mathrm{i}r;$$

   (c) On suppose qu'il y a des constantes $\alpha > 1$ et $M > 0$ telles que

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^\alpha}, \quad |z| \gg 0.$$

   Montrer que

$$\int_0^\infty (f(x) + f(-x))dx = \pi \mathrm{i}r.$$

   Indication : utiliser le contour ci-dessous (Fig. 1).

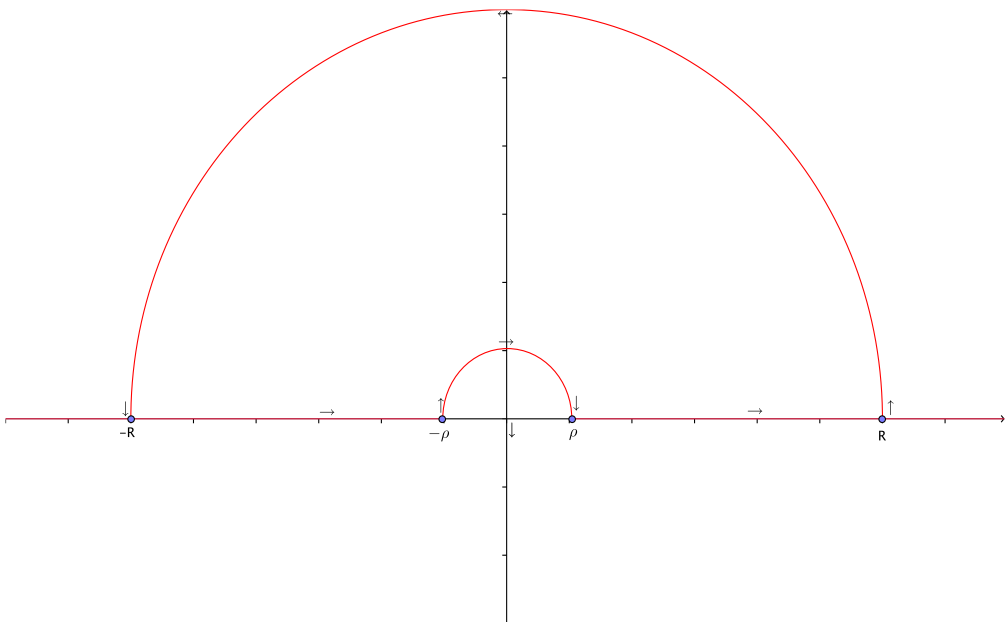


FIGURE 1 – Contour pour 3(c)

(d) Montrer que pour $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ on a

$$\int_0^\infty \frac{\cos(2ax) - \cos(2bx)}{x^2} = \pi(b-a).$$

Indication : appliquer ce qui précède avec les fonctions $f(z) = \frac{e^{2iaz}-1}{z^2}$, resp. $f(z) = \frac{e^{2ibz}-1}{z^2}$.

Intégration et théorie de la mesure
Examen

21 mai 2013

Documents, calculatrices et téléphones interdits.

On demande d'énoncer clairement chaque théorème utilisé et de vérifier les hypothèses.

Exercice 1 : Soit X un ensemble, $\mathcal{A}$ une σ-algèbre sur X et $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ une mesure. Soit μ^* la mesure extérieure canonique associée à μ, et $\mathcal{A}^*$ la famille des ensembles μ^*-mesurables.

(1) Rappeler la définition μ^* et $\mathcal{A}^*$. Qu'affirme le théorème de Carathéodory ?

(2) Pour tous $E, F \subset X$ on pose $\mu^*_E(F) = \mu^*(E \cap F)$. Montrer que μ^*_E est une mesure extérieure.

(3) Montrer que pour tout $E \subset X$, les éléments de $\mathcal{A}^*$ sont μ^*_E-mesurables.

(4) Soit $E \subset X$ fixé. Montrer la famille $\mathcal{F}$ des ensembles du type $(A \cap E) \cup (A' \setminus E)$, avec $(A, A') \in \mathcal{A}^2$, est une σ-algèbre contenant $\mathcal{A}$.

(4) On définit $m : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ en posant $m((A \cap E) \cup (A' \setminus E)) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A' \setminus E)$. Montrer que m est bien définie, et que c'est une mesure sur $\mathcal{F}$ prolongeant μ.

Exercice 2 : Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, et $f : X \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable telle que $\displaystyle\int_X f d\mu < +\infty$. Pour tout $t > 0$ on pose

$$X_t = \{x \in X \text{ t.q. } f(x) > t\} \text{ et } \varphi(t) = \mu(X_t).$$

(1) Montrer que pour tout $t > 0$, $\mu(X_t) < +\infty$ et que φ est décroissante.

(2) On munit $X_t \times \mathbb{R}_+$ de sa tribu et de la mesure produit de μ par la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que pour tout $t > 0$, l'ensemble $E_t = \{(x, s) \in X_t \times \mathbb{R}_+ \text{ t.q. } f(x) > s\}$ est mesurable.

(3) Calculer de deux façons différentes la mesure produit de E_t. En déduire que

$$\int_{X_t} f d\mu = \int_0^{+\infty} \varphi(\max(s,t))ds = t\varphi(t) + \int_t^{+\infty} \varphi(s)ds.$$

(4) En justifiant le passage à la limite $t \to 0$, montrer que $\displaystyle\int_X f d\mu = \int_0^{+\infty} \varphi(s)ds$.

Exercice 3 : Soit $\mathcal{P}$ un plan de $\mathbb{R}^3$, S un point n'appartenant pas au plan, et $E \subset \mathcal{P}$ mesurable. Démontrer que le volume du cône de base E et de sommet S est $\dfrac{h \cdot m(E)}{3}$, où $m(E)$ est la mesure de Lebesgue de E et h la distance de S au plan $\mathcal{P}$. On utilisera une paramétrisation du cône.

PROBLÈME

Première partie. *On fixe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$, et $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Soit $\alpha > 0$ tel que $\varphi'(t) \geq \alpha$ pour tout $t \in [a,b]$.*

(1) Énoncer le second théorème de la moyenne.

(2) Effectuer, en le justifiant, le changement de variables $u = \varphi(t)$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_a^b e^{i\varphi(t)}dt$.

(3) Montrer que si φ' est monotone, $\displaystyle\left|\int_a^b e^{i\varphi(t)}dt\right| \leq \frac{2}{\alpha}$.

Seconde partie. *On fixe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$, et $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Soit $\alpha > 0$ tel que $\varphi''(t) \geq \alpha$ pour tout $t \in [a,b]$. On désigne par m la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On fixe $\varepsilon > 0$, et on pose*

$$I_1 = \{t \in [a,b] \text{ t.q. } \varphi'(t) \geq \varepsilon\},\ I_2 = \{t \in [a,b] \text{ t.q. } \varphi'(t) \leq -\varepsilon\},\ I_3 = \{t \in [a,b] \text{ t.q. } |\varphi'(t)| \leq \varepsilon\}.$$

(1) Montrer que I_1, I_2 et I_3 sont des intervalles compacts.

(2) Montrer que $\displaystyle\left|\int_{I_1} e^{i\varphi(t)}dt\right| \leq \frac{2}{\varepsilon}$ et $\displaystyle\left|\int_{I_2} e^{i\varphi(t)}dt\right| \leq \frac{2}{\varepsilon}$.

(3) Montrer que $\displaystyle\int_{I_3} \varphi''(t)dt \leq 2\varepsilon$. En déduire que $m(I_3) \leq \dfrac{2\varepsilon}{\alpha}$.

(4) Montrer que $\displaystyle\left|\int_a^b e^{i\varphi(t)}dt\right| \leq \frac{4}{\varepsilon} + \frac{2\varepsilon}{\alpha}$ pour tout $\varepsilon > 0$ puis que $\displaystyle\left|\int_a^b e^{i\varphi(t)}dt\right| \leq \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha}}$.

Troisième partie. *On fixe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$, un entier $k \geq 2$, $\alpha > 0$ et $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^k tels que $\varphi^{(k)}(t) \geq \alpha$ pour tout $t \in [a,b]$. Montrer par récurrence qu'il existe une constante $C_k > 0$, dépendant de k, mais pas de a, b, α ou φ, telle que*

$$\left|\int_a^b e^{i\varphi(t)}dt\right| \leq \frac{C_k}{\alpha^{\frac{1}{k}}}.$$

EXAMEN
CALCUL INTEGRAL B
MAI 2013

Durée : 3 heures. Aucun document n'est autorisée. Rédiger avec soin. Lire toutes les questions avant de commencer.
Rappel : Une fonction f est lischitzienne sur $[a, b]$ ssi il existe $M > 0$ tel que $\forall x, y \in [a, b]$:

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

Question de cours

Soient

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}$$

une fonction intégrable au sens de Riemann et

$$g : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$$

une fonction continue. On définit les fonctions $F, G : [0, 1] \to \mathbb{R}$:

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt, \; G(x) = \int_0^1 g(x, t)dt.$$

(1) Montrer que F est lipschitzienne et en déduire qu'elle est continue.

(2) Donner un exemple explicite de f telle que la fonction F correspondante n'est pas derivable.

(3) Donner une condition suffisante sur f pour que F soit derivable.

(4) Montrer que si g est continue alors G l'est aussi.

(5) si $g(x, t) = \sqrt{x}$ la fonction G est-elle lipschitzienne ?

Exercice 1 :

(1) (a) Déterminer la nature de l'intégrale impropre :
$$\int_1^{+\infty} e^{-x} \ln x \, dx$$
(b) Déterminer la nature de la limite :
$$\lim_{n\to\infty} \int_n^{+\infty} e^{-x} \ln x \, dx$$

(2) Pour $u > -1$, déterminer une fonction $f : [0, \infty[\to \mathbf{R}$ telle que

$$\ln(1+u) = \int_0^u f(t)dt,$$

et en déduire que $\ln(1+u) \leq u$.

(3) Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que :

$$\forall x \in [0,n], 0 \leq \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x}$$

(On pourra utiliser la question précédente.)

(4) Soit $k > 0$.

(a) Justifier que la fonction $x \mapsto \exp(x)$ est lischitzienne sur $[0, k]$ et en déduire que si les fonctions f_n convergent vers f uniformement sur $[0, k]$ alors la suite $\exp \circ f_n$ converge vers $\exp \circ f$ uniformement sur $[0, k]$

(b) Pour x réel, montrer que la suite $\left(\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n\right)_n$, $n > x$ converge vers e^{-x}.
Dire si la convergence est uniforme :
– sur $[0, k]$, $k > 0$?
– sur $[0, \infty[$?

Justifier vos réponses.

(5) (a) Donner une condition suffisante sur la suite de fonctions $f_n : [1, k] \to \mathbf{R}$ pour que

$$\int_1^k f_n(x)dx \to \int_1^k f(x)dx.$$

(b) Déduire des questions précédentes que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln x \, dx = \int_1^{+\infty} e^{-x} \ln x \, dx.$$

(on pourra utiliser la relation de Chasles pour récrire la première intégrale comme somme de 2 intégrales sur les intervalles $[1, k]$ et sur $[k, n]$ respectivement.)

Exercice 2 : Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ un ouvert.

(1) Soit h une fonction continue sur un pavé fermée $P \subset \Omega$

(a) Définir les sommes de Darboux inférieure $\sigma(h, S)$ et supérieure $\Sigma(h, S)$ de h par rapport à une subdivision S de P.

(b) Donner un encadrement de l'intégrale de Riemann de la fonction h par les sommes de Darboux.

(c) Si on suppose que $h(x,y) \geq \eta$, en déduire que
$$\int_P h(x,y)dxdy \geq \eta \times m(P),$$
où $m(P)$ dénote la mesure du pavé P.

(2) Soit $h : \Omega \to \mathbf{R}$ une fonction continue .
Montrer que si $h(x_0, y_0) > 0$ alors il existe $\eta > 0$ et $\epsilon > 0$ tel que
$$\|(x,y) - (x_0,y_0)\|_\infty \leq \epsilon \Rightarrow h(x,y) \geq \eta$$

(3) Soit f une fonction admettant les dérivées partielles d'ordre 2 continues sur Ω

(a) Soit (x_0, y_0) un point de Ω. En appliquant le théorème de Fubini sur un pavé P contenant (x_0, y_0) montrer que $h(x_0, y_0) \leq 0$ où fonction $h : \Omega \to \mathbf{R}$ est définie par :
$$h = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$
[On pourra prendre $P = [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon] \times [y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon]$ et utiliser la question (1c)]

(b) En considérant la fonction $-h$ montrer que
$$h(x_0, y_0) = 0, \, \forall (x_0, y_0) \in \Omega$$
c'est-à-dire
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Exercice 3 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = x^2$.

(1) Déterminer la série de Fourier de f.

(2) Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \, dx$. En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

(3) Montrer que : $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $\displaystyle x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos(nx)}{n^2}$.

(4) En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Université Joseph Fourier
MAT367

Licence 3
$2^{\text{ème}}$ semestre 2012/2013

Examen Méthodes Numériques

Mardi 21 mai 2012
Durée : 3 h

Exercice 1

1. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\alpha > 0$.
   On s'intéresse à l'équation différentielle suivante où $a \in \mathbb{R}$ est fixé.

$$(*) \qquad \begin{cases} -x''(t) + \alpha x(t) = f(t) \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = a \ . \end{cases}$$

   On note $x_a : [0,1] \to \mathbb{R}$ la solution de $(*)$.

   (a) Ecrire l'équation différentielle $(*)$ sous la forme d'un système de deux équations du premier ordre, $X'(t) = AX(t) + B(t)$, où $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$ est la fonction inconnue, A est une matrice 2×2 à déterminer et B une fonction de $[0,1] \to \mathbb{R}^2$ à déterminer.

   (b) Ecrire la méthode d'Euler associée à l'équation $(*)$ avec pas constant $h = \frac{1}{N}$. On posera $t_n = nh$ et l'on notera $(Z_n)_{0 \le n \le N}$ la suite obtenue, avec $Z_n = \begin{pmatrix} z_n \\ z'_n \end{pmatrix}$. Donner Z_0.

   (c) On admet la généralisation en dimension deux du théorème vu en cours montrant que la méthode d'Euler est convergente et donc, en particulier, $\max_{0 \le n \le N} |z_n - x_a(t_n)| \to 0$ quand $N \to \infty$. En déduire que z_N tend vers $x_a(1)$ quand $N \to \infty$.

2. Soit $y : [0,1] \to \mathbb{R}$ la solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} -y''(t) + \alpha y(t) = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \ . \end{cases}$$

   Soit $(W_n)_{0 \le n \le N}$ la suite associée par la méthode d'Euler à pas constant $h = \frac{1}{N}$.

(a) Montrer que pour $0 \leq n \leq N$, $W_n = (I_2 + hA)^n W_0$ où W_0 est un vecteur de $\mathbb{R}^2$ à déterminer et I_2 désigne la matrice identité sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Montrer que les valeurs propres de $I_2 + hA$ sont $1 + h\sqrt{\alpha}$ et $1 - h\sqrt{\alpha}$.
En déduire que $I_2 + hA$ est diagonalisable et qu'il existe deux matrices R et S telles que pour tout $n \geq 0$,

$$(I_2 + hA)^n = (1 + h\sqrt{\alpha})^n R + (1 - h\sqrt{\alpha})^n S \ .$$

(c) En utilisant la formule précédente pour $n = 0$ et $n = 1$, montrer que

$$R = \frac{1}{2}(I_2 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}A) \ , \ S = \frac{1}{2}(I_2 - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}A)$$

(d) Calculer W_N et sa limite quand $N \to \infty$.

3. On note $(V_n)_{0 \leq n \leq N}$ la suite associée à l'équation $(*)$ pour $a = 0$, obtenue par la méthode d'Euler de la question 1(b).
Montrer que la suite $(Z_n)_{0 \leq n \leq N}$ associée à l'équation $(*)$ pour $a \in \mathbb{R}$ quelconque est donnée par :

$$Z_n = aW_n + V_n \quad \text{pour tout } 0 \leq n \leq N.$$

4. (a) Montrer que l'on peut choisir $a \in \mathbb{R}$ de telle manière que $(Z_n)_{0 \leq n \leq N}$ satisfait $z_N = 0$. On notera a_N cette valeur de a, $(Z_n^{(N)})_{0 \leq n \leq N}$ la suite associée à l'équation $(*)$ pour $a = a_N$, et $z_n^{(N)}$ la première composante de $Z_n^{(N)}$.
Déterminer $z_n^{(N)}$ en fonction de a_N, w_n et v_n.

(b) Montrer que quand N tend vers $+\infty$, a_N tend vers

$$a_\infty = -\frac{x_0(1)}{\frac{\sinh(\sqrt{\alpha})}{\sqrt{\alpha}}} \ .$$

(c) Montrer que $0 = a_\infty y(1) + x_0(1)$.
(Rappel : x_0 est la solution de $(*)$ pour $a = 0$ et y est la solution de $(**)$.)

5. On considère à présent l'équation différentielle :

$$(***) \qquad \begin{cases} -\psi''(t) + \alpha\psi(t) = f(t) \\ \psi(0) = 0 \\ \psi(1) = 0 \end{cases}$$

(a) Montrer que la fonction ψ définie sur $[0, 1]$ par $\psi(t) = a_\infty y(t) + x_0(t)$ est solution de $(***)$.

(b) Montrer que $E_N = \max_{0 \leq n \leq N} |z_n^{(N)} - \psi(t_n)|$ tend vers 0 quand $N \to +\infty$.

(c) Déduire des questions précédentes un algorithme pour déterminer une solution approchée de l'équation $(***)$.
L'implémenter sur Scilab en prenant $\alpha = 1$. Donner une valeur approchée de $\psi(1/2)$ pour $f(t) = t$.

Exercice 2

On s'intéresse au problème suivant : Etant donnée une matrice $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, trouver une matrice $B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

1. Montrer que pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, le problème n'a pas de solution.
2. Montrer que pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, toute matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $x \in \mathbb{R}$ est solution.
3. Montrer que si A est diagonalisable avec des valeurs propres positives, il existe une matrice B diagonalisable à coefficients positifs commutant avec A telle que $B^2 = A$.
4. On propose de déterminer B de manière approchée grâce à la méthode de Newton-Raphson, en utilisant la fonction

$$F : \begin{array}{lcl} \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & X^2 - A \, . \end{array}$$

   (a) En calculant $F(X + H) - F(X)$ pour X et H dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, montrer que la différentielle de F en X est donnée par :

$$DF(X) : \begin{array}{ll} \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \\ H & \longmapsto DF(X).H = HX + XH \, . \end{array}$$

   (b) La suite utilisée pour la méthode de Newton-Raphson si elle existe, est définie par $X_0 \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et pour $n \geq 1$,

$$X_n = X_{n-1} - (DF(X_{n-1}))^{-1}.F(X_{n-1})$$

   On est donc ramené à étudier l'inversibilité de $DF(X)$.
   On rappelle que si $X \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ et une matrice triangulaire supérieure $T \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ tels que $X = PTP^{-1}$.
   Soit K et H dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.
   Montrer que $XH + HX = K$ si et seulement si $T\widetilde{H} + \widetilde{H}T = \widetilde{K}$ avec $\widetilde{H} = P^{-1}HP$ et $\widetilde{K} = P^{-1}KP$.

   (c) Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ les éléments de la diagonale de T. On suppose que pour tout $1 \leq i, j \leq d$, $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$.
   Montrer alors que pour tout $K \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ et toute matrice triangulaire supérieure $T \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, l'équation $T\widetilde{H} + \widetilde{H}T = \widetilde{K}$ a une unique solution $\widetilde{H} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, qui peut être déterminée récursivement comme suit :

$$(T + \lambda_1 I_d)H_1 = K_1$$

$$(T + \lambda_i I_d)H_i = K_i - \sum_{j=1}^{i-1} t_{ji} H_j \qquad , \, i = 1, \ldots, d,$$

où $H_1, \ldots, H_d$ sont les vecteurs colonnes de H, $K_1, \ldots, K_d$ sont les vecteurs colonnes de K, I_d est la matrice identité $d \times d$, et t_{ij}, $i, j = 1, \ldots, d$, sont les éléments de matrice de T.

(d) Montrer que si X n'a pas de valeurs propres opposées (en particulier 0 n'est pas valeur propre), alors $DF(X)$ est inversible.

5. On suppose qu'il existe B telle $B^2 = A$ et telle que B n'a pas de valeurs propres opposées.

   (a) Montrer alors que si X_0 est suffisament proche de B, la méthode de Newton-Raphson converge.

   On considère un tel X_0.

   (b) On suppose que X_0 commute avec A.

   Montrer alors par récurrence que pour tout $n \geq 1$, X_n commute avec B et que $X_n = \frac{1}{2}\left(X_{n-1} + (X_{n-1})^{-1}A\right)$.

   (*On montrera que* $H_n = \frac{1}{2}\left(X_{n-1} - (X_{n-1})^{-1}A\right)$ *vérifie* $DF(X_{n-1}).H_n = F(X_{n-1})$.)

   (c) Application numérique : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}$.

   En prenant $X_0 = I_3$, calculer le nombre d'itérations nécessaires n_0 pour avoir $|||X_{n_0}^2 - A|||_2 \leq 0,0001$ en utilisant la suite donnée par la question précédente. Donner X_{n_0} et $X_{n_0}^2$

   (*La matrice identité de* I_3 *s'écrit eye(3,3) avec Scilab et le calcul de la norme se fait par la fonction norm .*)

Université Joseph Fourier	2012-2013
Licence 3	Parcours A

Algèbre

Examen du 21/06/2013, 14h-18h

Les exercices sont indépendants.
Le barème est donné à titre indicatif. Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction.
Documents et calculatrices interdits.

Exercice 1 (Ensemble AB où A et B sont deux sous-groupes d'un groupe G). [Environ 4 points]

Soient A et B deux sous-groupes d'un groupe G. On note f l'application de $A \times B$ dans G définie par $f(a,b) = ab$. On note $AB = f(A \times B) = \{ab\ ;\ (a,b) \in A \times B\}$ et H le sous-groupe de G engendré par $A \cup B$.

1. Montrer que $AB \subset H$.
2. Donner un exemple où AB n'est pas un sous-groupe de G.
3. Montrer que f est un morphisme de groupes si et seulement si tout élément de A commute avec tout élément de B.
4. En déduire que si tout élément de A commute avec tout élément de B, alors $AB = H$.
5. Dans cette question, on suppose que pour tout $(a,b) \in A \times B$, $bab^{-1} \in A$. Montrer alors que $AB = H$ et que A est distingué dans H.
6. Dans cette question, on suppose que A et B sont finis et que leurs ordres sont premiers entre eux. Montrer alors que f est injective. Qu'en déduit-on sur le cardinal de AB ? Indication : prendre (a,b) et (a',b') dans $A \times B$ tels que $ab = a'b'$, et regarder l'ordre de $a^{-1}a'$.

Exercice 2 (Probabilité pour que deux éléments commutent dans un groupe fini non abélien). [Environ 4 points]

1. Montrer que tout groupe fini d'ordre premier est cyclique.
2. Soit G un groupe. Montrer que son centre $Z(G) = \{x \in G : \forall y \in G, xy = yx\}$ est un sous-groupe distingué dans G. Montrer que si le groupe $G/Z(G)$ est cyclique, alors G est abélien. Si G est d'ordre fini, quelle relation y-a-t-il entre les ordres de G, de $Z(G)$ et de $G/Z(G)$?
3. Soit G un groupe fini d'ordre n, non abélien.
   (a) À l'aide des questions précédentes, montrer que $Z(G)$ est d'ordre au plus $n/4$.
   (b) Pour $x \in G$, on note $C_x = \{y \in G : xy = yx\}$ l'ensemble des éléments de G qui commutent avec x. Montrer que C_x est un sous-groupe de G. En déduire que si $x \notin Z(G)$, alors C_x est d'ordre au plus $n/2$.
   (c) En déduire que l'ensemble $B = \{(x,y) \in G^2 : xy = yx\}$ a au plus $5n^2/8$ éléments.

Remarque (inutile pour l'exercice) : on peut interpréter ce résultat en disant que la probabilité pour que deux éléments choisis indépendamment et uniformément dans G commutent est au plus $5/8$.

Suite au dos

Exercice 3 (Anneau des nombres dyadiques). [Environ 6 points] On note D l'ensemble des rationnels de la forme $a/2^n$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que D est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.
2. On note D^* l'ensemble des éléments inversibles de D. Montrer que D^* est l'ensemble des rationnels de la forme $\varepsilon 2^k$ où $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ et $k \in \mathbb{Z}$.
3. Soit $x \in D \setminus \{0\}$. Montrer que x s'écrit de façon unique sous la forme $x = b2^k$, avec $b \in \mathbb{Z}$ impair et $k \in \mathbb{Z}$. On pose alors $f(x) = |b|$. Montrer que l'application f ainsi définie de $D \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{N}$ est un stathme euclidien sur D. Quelles propriétés de D en déduit-on ?
4. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$. Rappeler pourquoi la division euclidienne de P par $X - 2$ a un sens dans $\mathbb{Z}[X]$. En déduire que $P(2) = 0$ si et seulement si $X - 2$ divise P dans $\mathbb{Z}[X]$.
5. Soit S l'ensemble des polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ qui ne s'annulent pas en 0.
   (a) Soient $A \in S$. En notant n le degré de A et $A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on définit $\tilde{A} \in \mathbb{Z}[X]$ par $\tilde{A} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} X^k$. Montrer que $\tilde{A} \in S$ et que pour tout $x \in \mathbb{Q}^*$, $\tilde{A}(x) = x^n A(1/x)$.
   (b) Montrer que, pour tous A et B dans S, on a $AB \in S$ et $\widetilde{AB} = \tilde{A}\tilde{B}$.
   (c) Soit $P \in S$. À l'aide des questions précédentes, montrer que $P(1/2) = 0$ si et seulement si $2X - 1$ divise P dans $\mathbb{Z}[X]$.
   (d) Étendre ce résultat à tout polynôme de $\mathbb{Z}[X]$.
6. Montrer que $D = \{P(1/2) \; ; \; P \in \mathbb{Z}[X]\}$. En déduire un isomorphisme de $\mathbb{Z}[X]/(2X - 1)\mathbb{Z}[X]$ vers D.

Exercice 4 (Trigonalisation simultanée). [Environ 6 points] Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie, supérieure ou égale à 1. Soit $\mathcal{F}$ une partie de $\mathcal{L}(E)$ formée d'endomorphismes trigonalisables qui commutent deux-à-deux.

1. Pour $u \in \mathcal{F}$, que sait-on sur le polynôme minimal μ_u et sur ses racines ?
2. Montrer que si S est un sous-espace propre d'un endomorphisme $v \in \mathcal{F}$, alors S est stable par tout élément de $\mathcal{F}$.
3. Montrer que si S est un sous-espace stable par tout élément de F, les endomorphismes induits u_S pour $u \in \mathcal{F}$ sont trigonalisables et commutent deux-à-deux.
4. Dans cette question, on montre par récurrence sur la dimension de E que les éléments de $\mathcal{F}$ ont un vecteur propre en commun.
   (a) Montrer le résultat en dimension 1.
   (b) Soit $n \geqslant 2$. On suppose le résultat vrai en toute dimension comprise entre 1 et $n - 1$, et on suppose que E est de dimension n. Montrer le résultat pour $\mathcal{F}$. Indication : si $\mathcal{F}$ contient un endomorphisme v qui n'est pas une homothétie, utiliser les questions précédentes.

   On note E^* le dual de E. Pour $\mathcal{L}(E)$, on note ${}^t u$ le transposé de u. On rappelle que ${}^t u$ est l'endomorphisme de E^* défini par ${}^t u(\varphi) = \varphi \circ u$ pour $\varphi \in E^*$. On rappelle que l'application $u \mapsto {}^t u$ de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E^*)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
5. Pour $u, v \in \mathcal{L}(E)$, $k \in \mathbb{N}$ et $P \in K[X]$, déterminer ${}^t(u \circ v)$, ${}^t(u^k)$ et ${}^t P(u)$. En déduire que ${}^t u$ a même polynôme minimal que u.
6. En déduire que la famille ${}^t\mathcal{F} = \{{}^t u \; ; \; u \in \mathcal{F}\}$ vérifie les mêmes hypothèses que $\mathcal{F}$.
7. En utilisant les questions 4 et 6, montrer l'existence d'un hyperplan stable par tous les éléments de $\mathcal{F}$.
8. En raisonnant par récurrence sur la dimension de E, montrer l'existence d'une base trigonalisant tous les éléments de $\mathcal{F}$.

Examen du 21 juin 2013.

Tous documents, calculatrices et téléphones portables interdits.
Il sera particulièrement tenu compte du soin apporté à la rédaction.
Barême indicatif : question de cours : 3, exercice 1 : 4, exercice 2 : 7, exercice 3 : 2, exercice 4 : 6

Questions de cours

1. Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble E ;
   (a) Montrer que l'orbite d'un élément x de E est toujours finie.
   (b) Citer une relation liant le cardinal de G, celui de l'orbite de x et celui du stabilisateur de x.
   (c) Montrer cette relation.
2. Soit A un anneau intègre , quand dit-on qu'un élément x de A est irréductible ?
3. (a) En utilisant la division euclidienne dans l'anneau $\mathbb{Q}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}$, montrer que tout idéal de l'anneau $\mathbb{Q}[X]$ est un idéal principal.
   (b) En déduire que si P est un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[X]$ alors l'idéal de $\mathbb{Q}[X]$ engendré par P est un idéal maximal de $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice 1 :

On considère l'action de S_5 sur lui-même par conjugaison, c'est à dire l'application $a : S_5 \times S_5 \to S_5$ qui à un couple de permutations (τ, σ) associe la permutation $\tau\sigma\tau^{-1}$.

1. Vérifier que l'on définit bien ainsi une action.
2. Quelle est l'orbite du cycle $c = (1, 2, 3)$ sous cette action ?
3. Montrer que le stabilisateur C_1 du cycle c sous cette action est l'ensemble des permutations de S_5 qui commutent avec c.
4. Quel est le sous-groupe de S_5 engendré par un 3-cycle α ?
5. Soit $\{a, b, c\}$ un sous-ensemble de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, combien de cycles de S_5 ont pour support $\{a, b, c\}$?
6. Combien y a-t-il de 3-cycles dans S_5 ?

7. Quel est le cardinal du stabilisateur C_1 du cycle c ?
8. Montrer que C_1 contient autant de permutations paires que de permutations impaires.
9. Décrire C_1.
10. On considère maintenant l'action du groupe A_5 sur S_5 par conjugaison, c'est à dire l'application $a : A_5 \times S_5 \to S_5$ qui à un couple de permutations (τ, σ) associe la permutation $\tau\sigma\tau^{-1}$. Quel est le stabilisateur C_2 du cycle c sous cette action ?
11. En déduire l'orbite du cycle c sous l'action de A_5.

Exercice 2 :

On considère le sous-ensemble G de $\mathbb{C}$ constitué des racines huitièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$, c'est-à dire

$$G = \{z \in \mathbb{C}, \quad z^8 = 1\}$$

1. Montrer que G est un sous-groupe du groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$.
2. Quel est le cardinal de G ?
3. Montrer qu'un élément z de G est d'ordre 8 si et seulement si $z^4 = -1$.
4. En déduire que G possède exactement 4 éléments d'ordre 8.
5. Etablir la liste des éléments d'ordre 8 de G.
6. Quelle est la décomposition du polynôme $X^4 + 1$ en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{C}[X]$?
7. Quelle est la décomposition du polynôme $X^4 + 1$ en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$?
8. Le polynôme $X^4 + 1$ est-il irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$?
9. On considère $w_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ et le morphisme d'évaluation $e_1 : \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{C}$ qui à un polynôme P de $\mathbb{Q}[X]$ associe $P(w_1)$.
   (a) L'image A_1 de e_1 est-elle un sous-anneau de $\mathbb{C}$?
   (b) Montrer que le noyau de e_1 est l'idéal de $\mathbb{Q}[X]$ engendré par le polynôme $X^4 + 1$.
   (c) Existe-t-il un morphisme d'anneaux $f : \mathbb{Q}[X]/(X^8 - 1) \to \mathbb{C}$ qui factorise e_1 ? (si on note $p_1 : \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}[X]/(X^8 - 1)$ le morphisme de passage au quotient, "f factorise e_1" signifie $e_1 = f \circ p_1$).
   (d) Existe-t-il un morphisme d'anneaux $g : \mathbb{Q}[X]/(X^4 + 1) \to \mathbb{C}$ qui factorise e_1 ? (si on note $p_2 : \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}[X]/(X^4 + 1)$ le morphisme de passage au quotient, "g factorise e_1" signifie $e_1 = g \circ p_2$).

   (e) L'image de A_1 de e_1 est-elle un sous-corps de $\mathbb{C}$?

10. On note $w_3 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et on considère le morphisme d'évaluation $e_3 : \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{C}$ qui à un polynôme P de $\mathbb{Q}[X]$ associe $P(w_3)$.
    (a) Quel est le noyau de e_3 ?
    (b) On note A_3 l'image de e_3. Montrer que $w_3 \in A_1$ et $w_1 \in A_3$. En déduire que $A_1 = A_3$. On notera $A = A_1 = A_3$.
    (c) Montrer qu'il existe un isomorphisme d'anneaux $\phi : A \to A$ tel que $\phi(w_1) = w_3$

Exercice 3 :

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3) et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base (e_1, e_2, e_3) est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme minimal μ_{f,e_1} de l'endomorphisme f, associé au vecteur e_1.
2. En déduire le polynôme minimal μ_f de l'endomorphisme f et son polynôme caractéristique χ_f.
3. Montrer que f est un endomorphisme inversible et qu'il existe un polynôme P dans $\mathbb{R}[X]$ tel que $f^{-1} = P(f)$.
4. Calculer M^{-1}.

Exercice 4 :

1. Soit $\sum_{i=0}^{i=d} a_i X^i$ un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ de degré d. Soit $r = \frac{p}{q}$ une racine rationnelle de ce polynôme avec $p, q \in \mathbb{Z} - \{0\}$ premiers entre eux. Montrer que q divise a_d et que p divise a_0 dans $\mathbb{Z}$.

   Dans les questions suivantes on considère le polynôme $A = X^3 + X + 1$.
2. Montrer que A n'a pas pas de racine dans $\mathbb{Q}$ et qu'il est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
3. L'idéal $I = A\mathbb{Q}[X]$ est-il un idéal premier de $\mathbb{Q}[X]$?
4. L'idéal I est-il un idéal maximal de $\mathbb{Q}[X]$?

5. On note L l'anneau quotient $\mathbb{Q}[X]/A\mathbb{Q}[X]$ et $G = L \setminus \{0\}$. Montrer que tout élément de L est inversible et en déduire que la multiplication des polynômes induit une structure de groupe sur G.
6. On considère le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $E = \mathbb{Q}^3$, et un endomorphisme f de E tel que $f^3 + f + id = 0$.
   Quel est le polynôme minimal de f ?
7. Montrer que l'on peut définir une application $a : G \times E \to E$ par $a(\overline{P}, v) = P(f)(v)$ et que cette application est une action du groupe G sur l'ensemble E.
8. Existe-t-il un vecteur non nul v de E dont le polynôme minimal $\mu_{f,v}$ soit de degré strictement inférieur à 3 ?
9. Existe-t-il un vecteur v non nul de E tel que la famille $(v, f(v), f^2(v))$ ne soit pas libre ?
10. Quelle est l'orbite d'un vecteur v de E sous l'action a ?
11. Quel est le stabilisateur d'un vecteur v de E sous l'action a ?

Université de Grenoble I **Année 2012/2013**
Institut Fourier **Examen du 19 juin 2013**

L3 de Mathématiques, section A
Calcul différentiel (examen, 2ème session)

Durée: 3 heures – il sera tenu particulièrement compte de la rédaction.
Documents, calculettes et téléphones portables interdits.

Exercice 1

Pour $p > 1$ on munit l'espace $\mathbb{R}^3$ de la norme $N_p(x, y, z) = (|x|^p + |y|^p + |z|^p)^{1/p}$ et on pose également $f_p(x, y, z) = |x|^p + |y|^p + |z|^p$.

1.a) Préciser la classe de différentiabilité en 0 de la fonction $x \mapsto x^p$ sur $[0, +\infty[$ lorsque $p > 1$, et en déduire la classe de différentiabilité de f_p.

1.b) Déterminer les points de $\mathbb{R}^3$ en lesquels la fonction N_p est différentiable, et expliciter la différentielle dN_p aux points de différentiabilité. (Pour simplifier les notations et éviter d'introduire des cas multiples, on pourra introduire la fonction signe $\sigma(x)$ telle que $\sigma(x) = 1$ si $x > 0$, $\sigma(x) = -1$ si $x < 0$ et $\sigma(0) = 0$). Pour quelles valeurs de p la fonction N_p est-elle indéfiniment différentiable en dehors de l'origine ?

1.c) Montrer que les sphères $S_p(r) = \{u \in \mathbb{R}^3 \,;\, N_p(u) = r\}$ de rayon $r > 0$ sont des sous-variétés différentiables de $\mathbb{R}^3$ pour tout $p > 1$. Préciser leur dimension et leur classe de différentiabilité.

1.d) Déterminer les extrema de la fonction linéaire $\ell(x, y, z) = x + y + z$ sur la sphère $S_4(r) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, f_4(x, y, z) - r^4 = 0\}$ $(r > 0)$.

1.e) [Question bonus hors barème] Montrer que les différentielles df_2 et df_4 sont indépendantes en dehors de la réunion des droites de la forme $\{(t, 0, 0)\}$, $\{(t, t, 0)\}$, $\{(t, -t, 0)\}$ à permutation près des coordonnées (soit 9 droites), et $\{(t, \pm t, \pm t)\}$, $t \in \mathbb{R}$ (soit 4 droites). Calculer les extrema de la fonction f_4 sur $S_2(r)$. En déduire que l'intersection $S_2(r) \cap S_4(r')$ est vide si $r' > r > 0$ ou $3^{-1/4}r > r' > 0$, réduite à un ensemble fini si $r' = r > 0$ ou $r' = 3^{-1/4}r > 0$, et que c'est une courbe lisse si $r'/r \in]3^{-1/4}, 1[\smallsetminus 2^{-1/4}$. Déterminer les constantes optimales permettant d'encadrer N_4 par des multiples de N_2.

Exercice 2

On se place dans l'espace de Banach $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$. On considère l'application $\Phi : E \to E$, $f \mapsto g = \Phi(f)$ telle que

$$g(x) = \int_0^x f(t)^2 dt \qquad \text{pour tout } x \in [0, 1].$$

2.a) Montrer que Φ est différentiable sur E tout entier et calculer explicitement sa différentielle $d\Phi$ en tout point $f \in E$.

2.b) Calculer $d^2\Phi$ et les différentielles successives $d^k\Phi \in \mathcal{L}_c^k(E^k, E)$ pour $k \geq 3$. Le résultat était-il prévisible ?

2.c) Déterminer une constante de Lipschitz λ pour Φ sur la boule fermée $\overline{B}(0, R)$ relativement à la norme $\| \ \|_\infty$.

2.d) Montrer que l'équation fonctionnelle $f + \Phi(f) = g$ admet une solution voisine de 0 lorsque $g \in B(0, r)$ et que $r > 0$ est assez petit. On précisera si possible une valeur explicite de r et une valeur du rayon R de la boule $B(0, R)$ dans laquelle on peut trouver une solution f unique.

2.e) On suppose que g est de classe C^1 sur $[0, 1]$. Montrer que f est solution de l'équation $f + \Phi(f) = g$ si et seulement si f est solution de l'équation différentielle $f' + f^2 = g'$ avec la condition initiale $f(0) = g(0)$. Déterminer cette solution dans le cas de la fonction constante $g(x) = a$. En déduire une majoration des rayons $r > 0$ pour lesquels l'équation $f + \Phi(f) = g$ peut se résoudre dans E pour tout $g \in B(0, r)$.

Exercice 3

On considère l'équation différentielle du second ordre

$$(\mathcal{E}) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + y(t) = f(t)$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

3.a) Déterminer les solutions de l'équation homogène ($f = 0$ identiquement). Que donnent les résultats généraux du cours quant à la nature de l'espace des solutions pour f quelconque ?

3.b) Ramener $(\mathcal{E})$ à un système différentiel d'ordre 1 en posant $Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ et donner une base du système homogène associé. En déduire sous forme intégrale l'unique solution de l'équation $(\mathcal{E})$ telle que $y(0) = y'(0) = 0$.

3.c) Résoudre pour $u \in]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$(\widetilde{\mathcal{E}}) \qquad u^2 \frac{d^2z}{du^2} + u\frac{dz}{du} + z(u) = g(u)$$

où $u \mapsto z(u)$ est la fonction inconnue. On effectuera pour cela le changement de variable $u = e^t$, $t \in \mathbb{R}$, et on posera $y(t) = z(e^t)$. Exprimer sous forme intégrale la solution générale de $(\widetilde{\mathcal{E}})$ telle que $z(1) = z'(1) = 0$.

Calcul différentiel

Licence 3 (parcours B) Université Joseph Fourier, Juin 2013

Pas de document autorisé

On portera une attention particulière à la rédaction.

Examen, 4 heures

Exercice 1

Soit une application de classe $\mathcal{C}^2$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ identifié à $\mathbb{R}^2$. On dit que f est **harmonique** si $\dfrac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(x,y) = 0$ pour tout x, y.

1. Montrer que les fonctions suivantes sont harmoniques.

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{C} \\ (x,y) & \mapsto & e^{x+iy} \end{array} \right. \qquad g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{C} \\ (x,y) & \mapsto & (x+iy)^n \end{array} \right. \quad (n \in \mathbb{N})$$

2. Soit $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, et $h : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,y) = v\left(\dfrac{y}{x}\right)$.
   (a) Montrer que h est harmonique si et seulement si v vérifie l'équation différentielle
   $$v'' + \frac{2t}{1+t^2} v' = 0.$$
   (b) Trouver les fonctions v rendant h harmonique.
3. Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, et D_R le disque **fermé** de $\mathbb{R}^2$ de centre $(0,0)$ et de rayon $R > 0$; $D_R = \{(x,y), x^2 + y^2 \leq R^2\}$.
   Soit $p \in \mathbb{N}^*$, et $\phi_p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\phi_p(x,y) = \phi(x,y) + \dfrac{x^2+y^2}{p}$.
   (a) Justifier que ϕ_p admet un maximum sur D_R, c'est à dire que :
   $$\exists (a_p, b_p) \in D_R, \qquad \phi_p(a_p, b_p) = \max_{(x,y)\in D_R} \phi_p(x,y)$$
   (b) Montrer que si le point (a_p, b_p) appartient à $\overset{\circ}{D}_R$, l'interieur du disque, alors, en ce point, on a : $\dfrac{\partial^2 \phi_p}{(\partial x)^2}(a_p, b_p) \leq 0$ et $\dfrac{\partial^2 \phi_p}{(\partial y)^2}(a_p, b_p) \leq 0$. (On pourra utiliser un DL à l'ordre 2, et donner les caracterisiques de $d^2\phi_p$ que la situation impose).
4. Dans cette question, on suppose ϕ **harmonique**.
   (a) Montrer que le point (a_p, b_p) est sur le cercle $C_R = \{(x,y), x^2 + y^2 = R^2\}$.
   (b) Montrer que $\sup\limits_{(x,y)\in D_R} \phi(x,y)$ est atteint en un point du cercle C_R.
5. En déduire que si deux fonctions harmoniques définies sur le plan sont égales le long d'un cercle C du plan, alors elles sont égales sur le disque bordé par ce cercle.

Tournez S.V.P

Exercice 2

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & \displaystyle\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \times x_2 \cdots \times x_n \end{array} \right.$

1. Soit $s > 0$. On pose $\Gamma = \left\{ X = (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n, \ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = s \right\}$
   Trouver le maximum de f en restriction à Γ, c'est à dire $\sup\{f(X), X \in \Gamma\}$.
2. En déduire l'inégalité arithmético-géométrique ci dessous (qui dit que la "moyenne géométrique" est toujours inférieure à la moyenne arithmetique)

$$\forall x_1, \dots, x_n, \qquad \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Exercice 3

On considère la partie $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\mathcal{C} = \{(x, y), \ y^2(x^2 + 1) + x^2(y^2 + 1) = 1\}.$$

1. Montrer qu'il existe un unique $b > 0$ tel que le point $(\frac{1}{2}, b)$ soit dans $\mathcal{C}$. Déterminer b.
2. Justifier qu'au voisinage de $(\frac{1}{2}, b)$, $\mathcal{C}$ est une courbe, et déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en ce point.
3. Trouver l'unique fonction $\varphi :]-1, 1[\to \mathbb{R}^+$ telle que $(x, \varphi(x)) \in \mathcal{C}$ pour tout $x \in]-1, 1[$.
4. Montrer que $\varphi(x) = \varphi(-x)$ et que φ est décroissante sur $[0, 1[$.
5. Tracer $\mathcal{C}$.
6. Enoncer le théorème des fonctions implicites, et montrer qu'il existe exactement deux points de $\mathcal{C}$ en lesquels ce théorème ne s'applique pas.

Exercice 4

On fixe une fonction $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, qui est *paire* et (2π)-periodique.
On considère l'équation différentielle

$$\mathcal{E} : \qquad y'' - q \times y = 0$$

1. En introduisant $z = y'$ donner une equation différentielle linéaire matricielle d'ordre 1 dont la résolution équivaut à celle de $\mathcal{E}$.
2. Verifier que si y est solution, alors $w(t) = -y(-t)$ est aussi solution.
3. En utilisant le théorème de Cauchy-Lipschitz, montrer qu'une solution y est une fonction impaire si et seulement si $y(0) = 0$.
4. Prouver que l'espace des solutions de $\mathcal{E}$ ne peut pas admettre une base de solutions constituée de fonctions impaires.
5. Prouver que l'espace des solutions de $\mathcal{E}$ ne peut pas admettre une base de solutions constituée de fonctions paires.
6. Montrer que le Wronskien du système est constant.

Fin du sujet.

Université Joseph Fourier
Licence 3

2012-2013
Parcours B

Géométrie

Examen du 20/06/2013, 14h-17h

Les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction. Documents et calculatrices interdits.

Exercice 1. Soient $\mathcal{E}$ un espace affine dirigé par $\overrightarrow{\mathcal{E}}$. On rappelle que $GA(\mathcal{E})$ est le groupe des bijections affines de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}$. On définit

$$Z := \{f \in GA(\mathcal{E});\ f \circ g = g \circ f \text{ pour toute } g \in GA(\mathcal{E})\}.$$

1. Soient $f \in GA(\mathcal{E})$ et $x \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$.
   (a) Justifier le fait que $f \circ t_x \circ f^{-1}$ est une application affine.
   (b) Montrer que $f \circ t_x \circ f^{-1}$ est une translation dont on précisera le vecteur.
2. Montrer que Z est un sous-groupe distingué de $GA(E)$.
3. En utilisant la première question, donner tous les éléments de $GA(\mathcal{E})$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}(3x + 2y + z - 1), \frac{1}{2}(x + 4y + z - 1), \frac{1}{2}(-x - 2y + z + 1)\right).$$

1. Vérifier que f est affine et déterminer sa partie linéaire.
2. Quels sont les points fixes de f ?
3. Déterminer la nature de f.

Exercice 3. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3. Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ des droites affines de $\mathcal{E}$. On veut montrer qu'il existe une droite affine $\mathcal{D}$ de $\mathcal{E}$ telle que $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ soit orthogonale à $\overrightarrow{\mathcal{D}_1}$ et à $\overrightarrow{\mathcal{D}_2}$, et de plus $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$ et $\mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$.

1. On suppose d'abord que $\overrightarrow{\mathcal{D}_1} = \overrightarrow{\mathcal{D}_2}$. Montrer l'existence de $\mathcal{D}$ dans ce cas.
2. On suppose maintenant $\overrightarrow{\mathcal{D}_1} \neq \overrightarrow{\mathcal{D}_2}$. Soit P le sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ engendré par $\overrightarrow{\mathcal{D}_1}$ et $\overrightarrow{\mathcal{D}_2}$
   (a) Montrer que P est un plan.
   (b) Montrer que, si $\mathcal{D}$ a les propriétés demandées, alors $\overrightarrow{\mathcal{D}} = P^\perp$.
   (c) En déduire que $\mathcal{D}$ existe et est unique. On pourra introduire le plan affine contenant $\mathcal{D}_1$ et de direction $\overrightarrow{\mathcal{D}_1} + P^\perp$, ainsi que le plan affine contenant $\mathcal{D}_2$ et de direction $\overrightarrow{\mathcal{D}_2} + P^\perp$, en justifiant leur existence.
3. On suppose dans cette question que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne sont pas parallèles. Soit s_1 la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{D}_1$ et s_2 la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{D}_2$. En utilisant la question précédente, montrer que $s_1 \circ s_2$ est un vissage et le décrire.

Exercice 4. On considère dans $\mathbb{R}^3$ les ensembles

$$P_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x + y - 1 = 0\right\},\ P_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ y + z - 1 = 0\right\},$$
$$P_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x + z - 1 = 0\right\}.$$

1. Justifier que P_1, P_2 et P_3 sont des plans affines.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer les projections orthogonales du point $(1, 1, \lambda)$ sur P_1, P_2 et P_3.
3. Déterminer les $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que ces projections soient alignées.
4. Quand ces projections ne sont pas alignées, déterminer une équation du plan affine passant par ces projections orthogonales.

Exercice 5. On pose

$$\mathcal{E} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + 4y^2 - 8y = 0\right\}.$$

On note $O = (0, 0)$.

1. Justifier que $\mathcal{E}$ est une ellipse, déterminer son centre ω.
2. Soit $P \in \mathbb{R}^2$ n'appartenant pas à $\mathcal{E}$. Soient M et M' des points qui varient sur $\mathcal{E}$, symétriques par rapport à ω et distincts de O. On note (a, b) les coordonnées de P.
   (a) Si M a pour coordonnées (x, y), quelles sont les coordonnées de M' ?
   (b) Déterminer les coordonnées des projections orthogonales de P sur les droites OM et OM'.
   (c) En déduire que ces projections orthogonales sont toujours alignées avec un point fixe (indépendant de M et M') qu'on déterminera.

Université Joseph Fourier – Grenoble I

L3 : Licence Sciences et Technologies

UE Fonctions Holomorphes : examen, 21 juin 2012, 9–12 h.

Durée 3h. Tout document est interdit. Les calculatrices et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont également interdits.

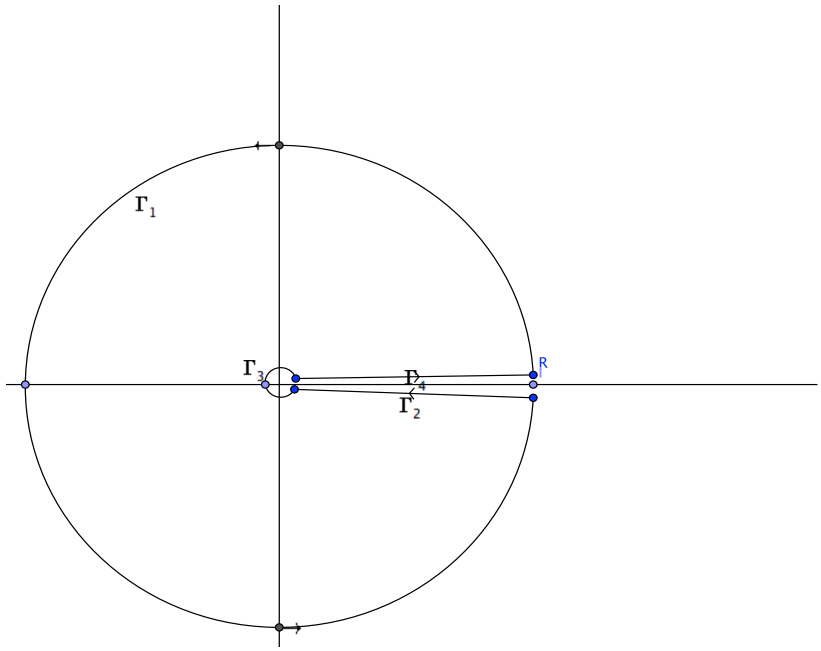
Autour du cours

1. Vrai ou faux ? Justifiez vos réponses :
   (a) $z \mapsto \sqrt{z}$ est holomorphe sur le demi-plan $\text{Re}(z) > 0$.
   (b) Une fonction holomorphe est conforme.
   (c) Une fonction entière est entièrement déterminée par ses zéros (avec leurs multiplicités.)
   (d) La partie réelle d'une fonction holomorphe est une fonction harmonique.
2. Énoncer le principe du maximum.
3. Montrer : chaque fonction holomorphe a une primitive dans un voisinage de chaque point de son domaine de définition. Est-ce que cela reste vrai globalement ?

Exercices

1. Soit f une fonction holomorphe sur un domaine D. On suppose que f est non-constante et que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in D$. Montrer : $|f(z)|$ n'atteint pas son minimum dans D.
2. Montrer que la fonction $\dfrac{1}{\sin(z)}$ est méromorphe. Déterminer ses singularités (sa nature, et si c'est un pôle, son ordre).

3. Par la suite on utilise la détermination de $\sqrt{z}$ dans le domaine $\mathbb{C} - \mathbb{R}^+$. telle que $\sqrt{-1} = \mathrm{i}$. On considère le contour Γ suivant :



Le chemin Γ_1 est un cercle incomplet de rayon R ; et Γ_3 est un cercle incomplet de rayon ϵ ; les chemins Γ_2 et Γ_4 sont les deux segments manquants puis sur les demi-droites d'angles $2\pi - \eta$ et η. On pose

$$I_k := \int_{\Gamma_k} \frac{\sqrt{z}}{1+z^2} dz.$$

(a) Montrer que $\lim_{R\to\infty} I_1 = 0$ et que $\lim_{\epsilon\to 0} I_3 = 0$.

(b) Déterminer la constante $C \in \mathbb{C}$ telle que $I_2 + I_4 \to C \int_\epsilon^R \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$ lorsque l'angle η tend vers zéro. Attention : il faut justifier l'interversion de limite.

(c) Calculer les résidus en $\pm\mathrm{i}$ de $\frac{\sqrt{z}}{1+z^2}$.

(d) En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Intégration et théorie de la mesure
Examen

17 juin 2013

Documents, calculatrices et téléphones interdits.

On demande d'énoncer clairement chaque théorème utilisé et de vérifier les hypothèses.

Exercice 1 : Soit $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ mesurable.

(1) Justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^*} f(t - 1/t)dt$.

(2) Montrer par un changement de variables que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{\mathbb{R}^*} f(t - 1/t)dt$.

(3) Montrer que la formule est valide pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sommable.

Exercice 2 : Soit $X = \{1, 2, 3\}$ et $\mathcal{F} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$.

(1) Montrer que $\mathcal{F}$ engendre la σ-algèbre $\mathcal{P}(X)$.

(2) Soient μ et ν deux mesures de probabilité sur $\mathcal{P}(X)$, égales sur $\mathcal{F}$. Montrer que

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = 1 \\ a_1 + a_2 = b_1 + b_2 \\ a_2 + a_3 = b_2 + b_3, \end{cases}$$

où on a posé $a_i = \mu(\{i\})$ et $b_i = \nu(\{i\})$.

(3) Montrer que $\mu = \nu$.

(4) On pose ici $X = \{1, 2, 3, 4\}$ et $\mathcal{F} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$. Montrer que $\mathcal{F}$ engendre X. En s'inspirant de la question (2), trouver deux mesures de probabilité μ et ν égales sur $\mathcal{F}$ mais distinctes.

Exercice 3 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$ on pose $f_n(t) = \dfrac{d^n}{dt^n} \exp(-t^2)$.

(1) Calculer f_0 et f_1. Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(t) f_1(t) dt = 0.$$

On justifiera l'existence de cette intégrale.

(2) Montrer que f_n est de la forme $f_n(t) = p_n(t) \exp(-t^2)$, où p_n est un polynôme de degré n.

(3) Montrer que $f_n \in L^2(\mathbb{R})$.

(4) Montrer que la famille f_n est orthogonale dans $L^2(\mathbb{R})$ i.e. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) f_m(t) dt = 0$ si $n \neq m$.

PROBLÈME

Le but du probème est de montrer qu'une σ-algèbre est finie ou non dénombrable.

Première partie. Soit X un ensemble.

(1) Soit $A \subset X$. Montrer que la famille $\{\emptyset, X, A, X \setminus A\}$ est la σ-algèbre engendrée par A.

(2) Soit $\mathcal{A}$ une σ-algèbre sur X et $B \subset X$. Montrer que la famille

$$\mathcal{B} = \{(A \cap B) \cup (A' \setminus B) \text{ avec } A, A' \in \mathcal{A}\}$$

est une σ-algèbre.

(3) Montrer que $\mathcal{B}$ est la σ-algèbre engendrée par $\mathcal{A} \cup \{B\}$.

(4) Montrer par récurrence que la σ-algèbre engendrée par une famille finie, est finie.

Seconde partie. Soint X un ensemble et $\mathcal{A}$ une σ-algèbre **dénombrable** sur X.

(1) Pour tout $x \in X$ on pose $A(x) =$ l'intersection de tous les $A \in \mathcal{A}$ tels que $x \in A$. Montrer que $A(x)$ et bien défini et que $A(x) \in \mathcal{A}$.

(2) Soient $x, y \in X$. Si $x \in E(x) \cap E(y)$, montrer que $E(x) \subset E(y)$.

(3) Si $x \in E(x) \setminus E(y)$, montrer que $E(x) \cap E(y) = \emptyset$.

(4) Montrer que $E(x)$ et $E(y)$ sont disjoints ou confondus.

Conclusion. Montrer que l'ensemble des $x \in X$ tels que $E(x) \neq \emptyset$ est fini. Conclure.

EXAMEN SESSION 2

CALCUL INTEGRAL B
JUIN 2013

Question de cours

Soit $[a, b] \subset \mathbf{R}$ un intervalle fermé et borné.

- Donner la définition de "*f est intégrable au sens de Riemann*" pour une fonction $f : [a, b] \to \mathbf{R}$.
- Montrer que toute fonction reglée $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$.
  [On admet qu'une fonction reglée f sur $[a, b]$ est la limite d'une suite f_n de fonctions en escaliers pour la distance de convergence uniforme δ.]
- Donner un exemple d'une fonction reglée $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ qui n'est pas continue par morceaux.

Exercice 1. *Soit $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = x^2$*

(1) *Montrer que pour tout entier n*

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} .$$

(2) *On considère la subdivision*

$$x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{n} < x_2 = \frac{2}{n} < \cdots < x_k = \frac{k}{n} < \ldots < x_n = 1 .$$

Que valent les sommes de Darboux inférieures et supérieures de f relativement a cette subdivision ?

(3) *En déduire que f est intégrable sur $[0, 1]$ et déterminer*

$$\int_0^1 f(t)dt$$

sans utiliser une primitive de f.

Exercice 2. *Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ de classe C^2.*

(1) *Montrer que si n et k sont des entiers avec $0 \leq k < n$*

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) dt$$

(2) *Soit n un entier fixé, k un entier, $0 \leq k < n$ et t réel avec $t \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ justifier :*

(a) $\exists\ c_{n,k,t} \in]\frac{k}{n}, t[$ *tel que :*

$$f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) = (t - \frac{k}{n}) f'(c_{n,k,t})$$

(b) $\exists\ d_{n,k,t} \in]\frac{k}{n}, t[$, *tel que :*

$$f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) - (t - \frac{k}{n}) f'\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{2}\left(t - \frac{k}{n}\right)^2 f''(d_{n,k,t})$$

(3) *En utilisant les égalités de (2) et la continuité de f'', trouver A tel que*

$$\int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{A + \epsilon(n)}{n}$$

où $\epsilon(n) \to 0$ quand $n \to 0$.

Exercice 3. *Soit f la fonction 2π périodique définie par*

$$f(t) = \pi - t,\ t \in [0, \pi],\ f(t) = \pi + t,\ t \in [-\pi, 0].$$

1. Calculer les coefficients de Fourier réels de f.

2. Quelle est la nature de la série de Fourier associée (limite si elle existe et type de convergence).

3. Calculer le valeur des deux séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2},\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$

4. En déduire la valeur des séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Université Joseph Fourier
MAT367

Licence 3
$2^{\text{ème}}$ semestre 2012/2013

Examen Méthodes Numériques (2^{nde} session)

lundi 17 juin 2013
Durée : 3 h

1 Exercice 1

1. Donner la décomposition LU si elle existe des matrices suivantes :

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Que remarquez-vous sur les matrices L et U ?

2. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice tridiagonale de taille $n \times n$, c'est à dire telle que $a_{i,j} = 0$ si $|i - j| > 1$.
   On note :

$$\begin{cases} a_{i,i} = a_i & \text{si } 1 \leq i \leq n \\ a_{i,i+1} = c_i & \text{si } 1 \leq i \leq n-1 \\ a_{i,i-1} = b_i & \text{si } 2 \leq i \leq n \end{cases}$$

   (a) Rappeler à quelle condition une matrice admet une décomposition LU.

   (b) On suppose à partir de maintenant que les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} |a_1| > |c_1| \\ |a_i| > |b_i| + |c_i| \text{ si } 2 \leq i \leq n-1 \\ |a_n| > |b_n| \end{cases}$$

   Montrer que sous ces conditions, A admet une décomposition LU et est inversible.
   Indication : on pourra par exemple utiliser le domaine de Gershgorin pour la matrice A et des sous-matrices de A.

   (c) On vérifie sur les formules donnant les matrices $L = (l_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $U = (u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de la décomposition LU de A que L et U sont aussi tridiagonales.
   On note :

$$\begin{cases} l_{i,i-1} = \alpha_i & \text{si } 2 \leq i \leq n \\ u_{i,i} = \gamma_i & \text{si } 1 \leq i \leq n \\ u_{i,i+1} = \beta_i & \text{si } 1 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

   Montrer que $A = LU$ si et seulement les relations suivantes sont satisfaites :

$$(*) \quad \begin{cases} \gamma_1 = a_1 & \\ \beta_i = c_i & \text{si } 1 \leq i \leq n-1 \\ \alpha_i \gamma_{i-1} = b_i & \text{si } 2 \leq i \leq n \\ \gamma_i = a_i - \alpha_i c_{i-1} & \text{si } 2 \leq i \leq n \end{cases}$$

(d) Calculer le nombre d'opérations (division, addition, soustraction, multiplication) nécessaires pour déterminer L et U en utilisant le système $(*)$.

(e) Soit b un vecteur colonne de taille n.

Montrer que pour trouver un vecteur colonne x de taille n tel que $Ax = b$, il suffit de trouver un vecteur y tel que $Ly = b$ et un vecteur colonne x de taille n tel que $Ux = y$.

(f) Donner les coordonnées de y en fonction des coordonnées de b et des $\alpha_i; 2 \leq i \leq n$.

Donner les coordonnées de x en fonction des $y_i, 1 \leq i \leq n$, $\alpha_i, 1 \leq i \leq n$ et $\beta_i, 1 \leq i \leq n-1$.

Calculer le nombre d'opérations effectuées.

(g) En déduire le nombre d'opérations nécessaires pour inverser une matrice tridiagonale inversible admettant une décomposition LU.

(h) On suppose que $a_i = 2$ si $1 \leq i \leq n$; $c_i = -1$ si $1 \leq i \leq n-1$ et $b_i = -1$ si $2 \leq i \leq n$.

Que donne la décomposition lu de scilab pour $n = 7$?

Donner les formules générales exactes. (On peut essayer de les deviner en calculant pour différentes valeurs de n et ensuite de vérifier que cela marche).

2 Exercice 2

On rappelle que $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

1. On note pour $n \geq 1$, $u_n = \sum_{i=1}^{n} i$. Montrer que si $n \geq 1$, $u_{n+1}^2 - u_n^2 = (n+1)^3$.

   En déduire que $\sum_{i=1}^{n} i^3 = u_n^2$.

2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}; x \mapsto x^3$.

   Calculer $I = \int_0^1 f(x)dx$.

3. On veut utiliser une méthode d'intégration numérique pour trouver une valeur approchée de I.

   Considérons la méthode du point milieu.

   En utilisant les notations du cours, donner la formule d'intégration composée $I^{(n)}(f)$ et calculer la somme.

   On rappelle que $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

   Que vaut l'erreur $E^{(n)}(f)$?

   Comparer avec la formule vue en cours (cas d'un noyau de Peano de signe constant) :

$$\exists \xi \in [0,1] / \quad E^{(n)}(f) = \frac{1}{(m+1)!} \left(\frac{1}{n}\right)^{m+1} f^{(m+1)}(\xi) E(x \mapsto x^{m+1})$$

   où m est l'ordre de la méthode et $E(f)$ est l'erreur de la méthode d'intégration numérique utilisée.

4. A partir de quelle valeur de n a t-on une erreur plus petite que 10^{-6} ?

3 Exercice 3

Soit $g \in C_1(\mathbb{R})$ et $z_0 \in \mathbb{R}$. On considère le problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) & = & y(t) + g(t) \\ y(0) & = & z_0 \end{array} \right. \quad , \quad t \in [0,1] \,. \tag{1}$$

1. Montrer que la solution exacte de (1) est

$$y(t) = e^t \left(\int_0^t e^{-u} g(u)\, du + z_0 \right) \,. \tag{2}$$

2. (a) Donner l'expression de la solution approchée de l'équation (1) au temps $t = 1$, $y_{\text{rect}}(1)$, obtenue en utilisant la méthode d'intégration numérique des rectangles à gauche pour calculer l'intégrale apparaissant dans (2). Vous utiliserez une subdivision de $[0,1]$ en N intervalles de même longueur.

   (b) Donner une majoration de l'erreur $|y_{\text{rect}}(1) - y(1)|$ en fonction de N et de $\|g\|_\infty = \sup\limits_{0 \le t \le 1} |g(t)|$ et $\|g'\|_\infty = \sup\limits_{0 \le t \le 1} |g'(t)|$.

   (c) Trouver une fonction $g(t)$ telle que l'erreur soit nulle, c'est-à-dire, $y_{\text{rect}}(1) = y(1)$.

3. On veut déterminer une solution approchée $y_{\text{Euler}}(1)$ de l'équation (1) au temps $t = 1$ par la méthode d'Euler avec un pas constant $h = 1/N$. On note z_n, $n = 1, \cdots, N$, les solutions approchées de $y(nh)$ par cette méthode, de sorte que $y_{\text{Euler}}(1) = z_N$.

   (a) Donner l'expression de z_{n+1} en fonction de z_n

   (b) Montrer par récurrence que, pour tout $n = 1, \cdots, N$,

$$z_n = (1+h)^n z_0 + h \sum_{i=0}^{n-1} g(hi)(1+h)^{n-1-i} \,.$$

   En déduire l'expression de $y_{\text{Euler}}(1)$.

   (c) Donner une majoration de l'erreur $|y_{\text{Euler}}(1) - y(1)|$ en fonction de N, $\|g\|_\infty$, $\|g'\|_\infty$ et $|z_0|$.

   (d) La méthode d'Euler donne-t-elle la solution exacte pour la fonction $g(t)$ proposée à la question 1 ?

4. Déterminer numériquement, par les deux méthodes des questions 2 et 3, des solutions approchées à 10^{-3} près de l'équation (1) au temps $t = 1$ pour $z_0 = 1$ et $g(t) = \sqrt{t}$ (vous pourrez utiliser vos programmes Scilab écrits en TP).

Université Joseph Fourier — **Topologie L3A**
Licence Sciences et Technologies — **Année 2012–2013**

Examen du 18 juin 2013

Documents, calculatrices, et téléphones portables sont interdits. Les quatre exercices peuvent être traités dans un ordre quelconque, mais le dernier utilise la conclusion du premier. Durée de l'épreuve : 4 heures.

Exercice 1. (*Espaces métriques séparables*)
On dit qu'un espace métrique (E, d) est séparable s'il admet un sous-ensemble dénombrable dense. Montrer que tout espace métrique compact est séparable, et que tout sous-ensemble d'un espace métrique séparable est encore (un espace métrique) séparable.

Exercice 2. (*Fonctions semi-continues inférieurement*)
Soit (E, d) un espace métrique. On dit qu'une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est semi-continue inférieurement au point $x_0 \in E$ si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage V de x_0 dans E tel que $f(x) \geq f(x_0) - \epsilon$ pour tout $x \in V$. On dit que f est semi-continue inférieurement sur E si f est semi-continue inférieurement en tout point de E.

a) Montrer que $f : E \to \mathbb{R}$ est continue au point $x_0 \in E$ si et seulement si les fonctions f et $-f$ sont toutes deux semi-continues inférieurement en ce point.

b) Montrer que $f : E \to \mathbb{R}$ est semi-continue inférieurement sur E si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in E \,|\, f(x) > t\}$ est un ouvert de E.

c) Soit $A \subset E$ et soit $\chi_A : E \to \mathbb{R}$ la fonction caractéristique de A, telle que $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\chi_A(x) = 0$ si $x \in E \setminus A$. Montrer que χ_A est semi-continue inférieurement sur E si et seulement si A est un ouvert de E.

d) Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de fonctions semi-continues inférieurement sur E. On suppose que

$$g(x) := \sup_{i \in I} f_i(x) < \infty , \qquad \text{pour tout } x \in E .$$

Montrer que $g : E \to \mathbb{R}$ est semi-continue inférieurement.

e) On suppose ici que (E, d) est un espace métrique compact (non vide). Si $f : E \to \mathbb{R}$ est semi-continue inférieurement, montrer que l'image $f(E)$ est bornée inférieurement, et qu'il existe $\bar{x} \in E$ tel que

$$f(\bar{x}) = \min_{x \in E} f(x) .$$

Indication : soit $m = \inf(f(E)) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Si $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle qui décroît vers m, on remarquera que l'ensemble $K_n = \{x \in E \,|\, f(x) \leq t_n\}$ est un compact non vide pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que $K_{n+1} \subset K_n$.

Exercice 3. (*Propriétés topologiques de la somme de deux sous-ensembles*)
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, réel ou complexe. Si A, B sont des sous-ensembles de E, on note $A + B$ la somme de A et B définie par

$$A + B = \Big\{ x + y \in E \,\Big|\, x \in A ,\ y \in B \Big\} \subset E .$$

a) Si A ou B est un ouvert de E, montrer que $A+B$ est un ouvert de E.

b) Si A et B sont connexes, montrer que $A+B$ est connexe. *Indication :* on pourra vérifier que, si $f : A+B \to \{0,1\}$ est une fonction continue, alors f est constante.

c) Si A et B sont compacts, montrer que $A+B$ est compact. *Indication :* dans cette question et la suivante, on pourra utiliser la caractérisation séquentielle de la compacité.

d) Si A est compact et B est fermé, montrer que $A+B$ est fermé.

e) On considère le cas particulier où $E = \mathbb{R}$ (muni de la topologie usuelle), $A = \mathbb{Z}$, et $B = \sqrt{2}\,\mathbb{Z}$. Vérifier que A et B sont fermés, mais que la somme $A+B$ ne l'est pas.

Exercice 4. (*Orbite par translation d'une fonction continue*)
Soit $X = C_b(\mathbb{R},\mathbb{C})$ l'espace des fonctions continues et bornées de $\mathbb{R}$ and $\mathbb{C}$, muni de la norme

$$\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \,, \qquad f \in X \,.$$

Si $f \in X$ et $y \in \mathbb{R}$, on note $T_y f \in X$ la fonction translatée définie par $(T_y f)(x) = f(x-y)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On définit également l'orbite $O(f) = \{T_y f \,|\, y \in \mathbb{R}\} \subset X$.

a) Pour tout $y \in \mathbb{R}$, vérifier que l'application $T_y : X \to X$ est linéaire et isométrique. Remarquer aussi que $T_{y_1}T_{y_2} = T_{y_1+y_2}$ pour tous les $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

b) Soit $f \in X$. Montrer que l'application $y \mapsto T_y f$ est continue de $\mathbb{R}$ dans X si et seulement si f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

c) En déduire que, si $f \in X$ est uniformément continue, alors l'orbite $O(f)$ est séparable.

d) Inversement, soit $f \in X$ telle que l'orbite $O(f)$ soit séparable, et soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la suite $(T_{y_n} f)_{n\in\mathbb{N}}$ soit dense dans $O(f)$. Etant donné $\epsilon > 0$, on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$F_n = \Big\{ y \in \mathbb{R} \,\Big|\, \|T_{y_n} f - T_y f\| \le \epsilon \Big\} \subset \mathbb{R} \,.$$

Vérifier que F_n est un fermé de $\mathbb{R}$, et que $\cup_n F_n = \mathbb{R}$. A l'aide du théorème de Baire, que l'on rappellera, en déduire qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que F_n soit d'intérieur non vide, et en conclure que $f \in X$ est uniformément continue.

e) L'espace de Banach $X = C_b(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est-il séparable ?

f) Si $f \in X$ est une fonction périodique, vérifier que l'orbite $O(f)$ est compacte dans X. *Indication :* si $L > 0$ est une période de f, on remarquera que $O(f) = \{T_y f \,|\, y \in [0,L]\}$ et on utilisera la question b).

g) Inversement, soit $f \in X$ telle que l'orbite $O(f)$ soit compacte dans X. En utilisant l'exercice 1 et la question d), vérifier que f est uniformément continue. Si f n'est pas périodique, montrer que l'application $\tau : \mathbb{R} \to O(f)$ définie par $\tau(y) = T_y f$ pour tout $y \in \mathbb{R}$ est bijective et continue. En remarquant que

$$O(f) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \tau([-n,n]) \,,$$

montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\tau([-n,n])$ contienne un ouvert de $O(f)$ (pour la topologie induite). En utilisant la compacité de $O(f)$ et la bijectivité de τ, en conclure que $\mathbb{R}$ est inclus dans une union finie de translatés de l'intervalle $[-n,n]$, ce qui est absurde. On a ainsi une contradiction, qui montre que f est périodique si l'orbite $O(f)$ est compacte.

EXAMEN GGMAT35c

20 juin 2013

Documents, calculatrices et téléphones portables interdits.
Dans la notation, il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.
Durée : 4h

Exercice 1 (Questions de cours)

1. (a) Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que toute suite convergente est de Cauchy.
   (b) Définir un produit scalaire sur un espace vectoriel ainsi qu'un espace de Hilbert.
2. (a) Citer le théorème de Stone-Weierstrass.
   (b) Montrer en utilisant le théorème de Stone-Weierstrass que toute fonction $f \in C([0,1];\mathbb{R})$ est limite uniforme de fonctions polynomiales.

Exercice 2
On prendra soin de justifier toute affirmation le plus soigneusement possible.

On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne. On considère les ensembles :

$$A_1 := \{(x, x^2);\, x \in \mathbb{R}\}, \quad A_2 := \mathbb{Q} \times \mathbb{R}, \quad A_3 := \{(x,y);\, xy < 1\}.$$

1. Déterminer parmi les ensembles A_1, A_2, A_3 ceux qui sont fermés.
2. Déterminer parmi les ensembles A_1, A_2, A_3 ceux qui sont ouverts.
3. Déterminer parmi les ensembles A_1, A_2, A_3 ceux qui sont connexes par arcs.

Exercice 3
Soit L l'ensemble des fonctions lipschitziennes de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'application

$$N : f \mapsto N(f) = |f(0)| + \sup_{0 \le x < y \le 1} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$$

   est bien définie sur L et qu'elle y définit une norme.

2. Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $f \in L$:

$$\|f\|_\infty \leq cN(f),$$

où $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

3. On considère pour $\varepsilon > 0$ la fonction $f_\varepsilon(x) = \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.

   (a) Montrer que $N(f_\varepsilon) \geq |f'_\varepsilon(0)|$.

   (b) En déduire qu'il n'existe pas de $c' > 0$ tel que pour tout $f \in L$:

$$N(f) \leq c'\|f\|_\infty.$$

Exercice 4

On note

$$\ell^2 = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}};\ \sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^2 < \infty\}.$$

On introduit, pour $x \in \ell^2$:

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^2\right)^{1/2}.$$

On rappelle que $(\ell^2, \|.\|_2)$ est un espace vectoriel normé.

1. Est-ce que ℓ^2 est de dimension finie ? Justifier votre réponse.

2. Est-ce que la boule unité fermée $\overline{B}_{\ell^2}(0,1)$ est compacte ? Justifier votre réponse.

3. On considère :

$$K = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}};\ \forall i \in \mathbb{N} \quad |x_i| \leq 2^{-i}\}.$$

   Montrer que $K \subset \ell^2$.

4. Soit $(x(k))_{k\in\mathbb{N}}$, $x(k) = (x_i(k))_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de K. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et des fonctions strictement croissantes $\varphi_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{N}$ telles que

   (a) Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\varphi_{i+1}(k) = \varphi_i(\psi_i(k))$, où $\psi_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.

   (b)

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad |x_i(\varphi_i(k)) - a_i| \to 0,\ k \to \infty.$$

5. On pose $\varphi(k) := \varphi_k(k)$. Montrer que

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad |x_i(\varphi(k)) - a_i| \to 0,\ k \to \infty.$$

6. Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\quad |a_i| \leq 2^{-i}$. En déduire que $a \in K$.

7. Prouver que

$$\|x(\varphi(k)) - a\|_2 \to 0,\ k \to \infty.$$

   En déduire que K est compact.