UNE INTRODUCTION À LA MÉCANIQUE SEMI-CLASSIQUE*
(Article paru dans l'Enseignement Mathématique, t. 44 (1998), 23-51.)

Y. Colin de Verdière**

4 juin 1999

* Rédaction d'exposés donnés dans le cadre de rencontres Genève-Grenoble-Lyon (24 et 25 avril 1997)

** Institut Fourier, Unité mixte de recherche CNRS-UJF 5582
BP 74, 38402-Saint Martin d'Hères Cedex (France)
yves.colin-de-verdiere@ujf-grenoble.fr

Abstract

Ce texte est une introduction à la mécanique semi-classique à l'usage des non-spécialistes.

Après avoir rappelé les contextes de la mécanique classique (géométrie symplectique) et de la mécanique quantique, on introduit la mécanique semi-classique à partir d'exemples simples : transformations de Fourier et de Legendre, principe de Huygens.

On décrit ensuite les formules de trace semi-classiques et la problématique du *chaos quantique*.

Mots clés : équation de Schrödinger, approximation semi-classique, formules de trace.

AMS Subject Classification : 35A27, 35P10, 35P20, 58F05, 58F19, 81Q10, 81S10 .

1 Introduction

Le but de ces exposés est de servir de motivation et d'introduction au sujet. Du point de vue de la physique, il s'agit de techniques qui remontent au début de la mécanique quantique : le *principe de correspondance* affirme de façon vague que *la mécanique classique est la limite de la mécanique quantique lorsque la constante de Planck $\hbar$ peut être considérée comme petite*, autrement dit que les actions S en jeu sont grandes devant $\hbar$. Bien sûr, dire qu'une théorie physique est une limite d'une autre théorie physique est un concept important puisqu'une grande partie du savoir faire du physicien est de prévoir ce qui est petit et ce qui est grand. La limite *quantique-classique* est plus complexe que la limite *relativiste-galiléen* qui se réduit essentiellement à des développements limités en $\frac{1}{c}$, où c est la vitesse de la lumière.

Depuis le début de la mécanique quantique, le passage à la limite semi-classique est traité par des règles plus ou moins empiriques : les développements BKW (Brillouin-Kramers-Wentzel) et les conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld font ainsi partie de l'outillage de base du physicien quantique. Ces méthodes ont leurs limitations intrinsèques : difficultés liées aux caustiques, impossibilité de dire quelque chose de précis sur les spectres dans les cas non complètement intégrables (i.e. génériques).

Du point de vue mathématique, les travaux de Maslov, Leray, Hörmander en équations aux dérivées partielles linéaires (analyse *micro-locale*), dans les années 65-70, ont donné une assise naturelle et solide aux calculs des physiciens. En particulier, ces méthodes permettent de décrire de façon précise le passage des caustiques et la nature des déphasages des fonctions d'ondes en ces points (indice de Maslov).

L'application de ces méthodes aux équations de Schrödinger et à la limite géométrique de l'optique ondulatoire a connu un grand développement depuis les années 70. Ces travaux s'appuient sur des résultats de plus en plus fins de mécanique classique des systèmes hamiltoniens (systèmes complètement intégrables, théorie KAM, flots d'Anosov) en même temps que sur des techniques d'analyse variées (intégrales oscillantes, estimations de type elliptique, développements asymptotiques, méthodes de resommation, passage dans le complexe). Un des problèmes clés est l'étude semi-classique des spectres d'opérateurs : asymptotique des grandes valeurs propres des laplaciens riemanniens, asymptotique du spectre d'un opérateur de Schrödinger lorsque $\hbar \to 0^+$.

Après avoir brièvement rappelé le formalisme hamiltonien et le formalisme quantique, je décrirai le problème de la limite semi-classique.

Je parlerai ensuite du spectre : depuis le cas complètement intégrable, en passant par KAM, j'en viendrai à ce que je considère comme l'un des plus jolis résultats de la théorie, la formule des traces dite de Gutzwiller dont je donnerai une preuve heuristique basée sur l'intégrale de Feynman.

Je parlerai enfin de l'analyse fine du spectre semi-classique et du lien avec la théorie des matrices aléatoires.

Je veux profiter de l'occasion pour introduire 2 idées que je trouve stimulantes et que je vous soumets :

1) La mécanique classique est certes une limite de la mécanique quantique, mais la mécanique quantique est aussi un système hamiltonien classique particulier (linéaire) et la dimension infinie n'en est pas le fait le plus important.

2) La limite semi-classique est habituellement présentée comme liée au caractère linéaire de la mécanique quantique et dépendant essentiellement du principe de superposition (phase stationnaire) : elle est aussi liée au phénomène d'oscillations rapides (méthode de moyennisation) qui est un analogue non-linéaire de la phase stationnaire.

2 La mécanique classique

Pour cette section, voir [1], [3], [4], [28], [44], [48], [49], [50], [51].

2.1 Géométrie symplectique

L'espace des phases du système est une variété symplectique (Z, ω). La plupart du temps, c'est un cotangent $T^\star X$ équipé de la structure canonique. Ce peut être aussi une sous-variété algébrique lisse du projectif complexe équipé de la structure symplectique partie imaginaire de la structure kaehlérienne ou une variété obtenue par réduction symplectique à partir des précédentes.

On se donne ensuite une fonction $H : Z \to \mathbb{R}$, l'hamiltonien du système. On lui associe le champ de vecteurs $\mathcal{X}_H$, gradient symplectique de H, qui donne la dynamique. Il est classique que la dynamique du système décrite par le flot ϕ_t de $\mathcal{X}_H$ préserve H et la forme ω.

Les exemples de bases sont

Exemple 2.1 *$Z = T^\star\mathbb{R}^n$ et*

$$H(x, \xi) = \frac{1}{2}\|\xi\|^2 + V(x) \ ,$$

la dynamique étant celle d'une particule dans le potentiel V, et ξ étant l'impulsion.

Exemple 2.2 *$Z = T^\star X$ où X est une variété riemannienne de métrique g et*

$$H(x, \xi) = \frac{1}{2} g^\star(\xi) \ ,$$

où $g^\star$ est la métrique associée à g sur le cotangent donnée en coordonnées locales par l'inverse de $(g_{i,j})$ avec $g = ds^2 = \sum g_{i,j} dx_i dx_j$.

La dynamique est alors celle du flot géodésique.

Exemple 2.3 *$Z = P^n\mathbb{C}$ est muni d'une structure symplectique (à peu près) canonique, associée à une structure hermitienne sur $\mathbb{C}^{n+1}$: on considère la sphère unité de $\mathbb{C}^{n+1}$ pour cette métrique hermitienne. La structure symplectique de $\mathbb{C}^{n+1}$, partie imaginaire* *de la forme hermitienne, induit une 2-forme sur cette sphère dont le noyau est constitué par l'action infinitésimale de $U(1)$. Le quotient de cette action est $P^n\mathbb{C}$ qui est ainsi symplectisé.*

L'objet le plus central en géométrie symplectique est sans doute la *variété lagrangienne.*

Une sous-variété lagrangienne L d'une variété symplectique (Z, ω) de dimension $2n$ est une sous-variété isotrope pour la forme ω et de dimension n. Si $Z = T^\star X$ et si L est le graphe d'une section (et s'identifie donc à la donnée d'une 1-forme sur X), L est lagrangienne si et seulement si la 1-forme correspondante est fermée. Si $L = (x, S'(x))$, on dit que S est une fonction génératrice. Si $p : L \to X$ est la projection, la *caustique* de L est le sous-ensemble de L formé des points où la projection est critique. Il est important pour la suite d'étendre la notion de fonction génératrice au cas des caustiques : cela remonte à Maslov et Hörmander. On peut déjà en trouver l'idée dans Huygens et Feynman.

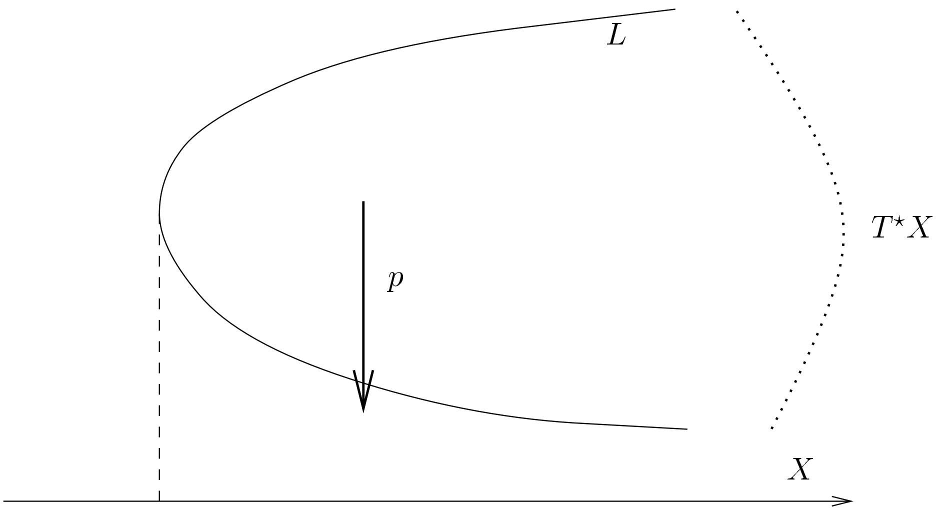

Figure 1: variétés lagrangiennes et caustiques

La notion de variété lagrangienne permet de généraliser la notion de solution d'une EDP non linéaire du type :

$$H(x, S'(x)) = 0 \ .$$

L'équation de Hamilton-Jacobi

$$S'_t + H(x, S'_x) = 0$$

et l'équation eiconale de l'optique

$$\|S'\|^2 = 1$$

en sont des cas particuliers.

Une telle solution généralisée est simplement une variété lagrangienne de $T^\star X$ contenue dans $H = 0$.

On voit facilement que le champ $\mathcal{X}_H$ est tangent à une telle variété. Bien sûr, en général, il y a des caustiques (enveloppe des trajectoires).

Une autre notion importante attachée à une sous-variété lagrangienne L de $T^\star X$ est celle de fronts d'ondes : ce sont les feuilles du feuilletage défini par la restriction à L de la 1-forme de Liouville $\alpha = \xi dx$. Leurs projections sur X sont aussi appellées fronts d'ondes.

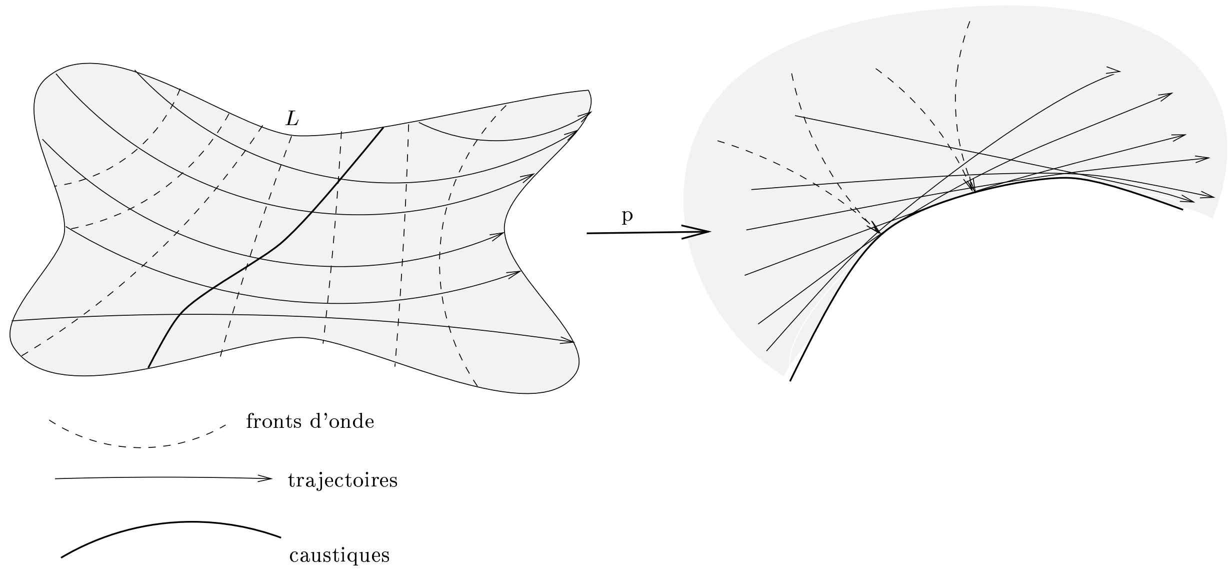

Figure 2: variété lagrangienne et fronts d'ondes

2.2 Variétés lagrangiennes et fonctions génératrices

Une variété lagrangienne a en général des caustiques et ne peut donc pas être représentée par une fonction génératrice naïve. On a recours à une famille de fonctions.

$$\varphi(x, \theta),\ \theta \in \mathbb{R}^N \ .$$

Si on considère les fronts d'ondes $F_{\theta,a} = \{x | \varphi(x, \theta) = a\}$, leur enveloppe est donnée classiquement comme l'ensemble des solutions de $\varphi = a, \partial_\theta \varphi = 0$. A cette enveloppe est associée l'ensemble des

$$(x, \partial_x \varphi)$$

qui se trouve être, sous des hypothèses de non-dégénérescence, une variété lagrangienne. On retrouve une construction d'Huygens : l'enveloppe d'une famille de fronts d'ondes est un nouveau front d'onde.

C'est un théorème que toute variété lagrangienne admet une représentation de ce type. Une telle famille est du reste unique à des opérations élémentaires près : c'est un théorème dû à Hörmander.

La situation géométrique est celle d'une fibration

$$F : E \to X$$

et d'une fonction $\varphi : E \to \mathbb{R}$. Si L_0 est le graphe de $d\varphi$ contenu dans $T^\star E$, on passe de L_0 à L par la réduction symplectique associée au fibré conormal de la fibration.

En particulier, si $\mathcal{L} : TX \to \mathbb{R}$ est un lagrangien régulier et Ω_t l'ensemble des applications de $\gamma : [0,t] \to X$ fibré sur $X \times X$ par $\gamma \to (\gamma(0), \gamma(t))$ et $\Phi(\gamma) = \int_0^t \mathcal{L}(\gamma(s), \gamma'(s))ds$, la variété lagrangienne associée est le graphe du flot hamiltonien φ_t associé au lagrangien $\mathcal{L}$ par la transformée de Legendre. La fonction génératrice Φ est bien sûr reliée à l'intégrale de Feynman.

3 La mécanique quantique

Pour cette section, voir [10], [32], [39], [47], [43].

Ici l'espace des phases est un espace de Hilbert (parfois de dimension finie) ; pour être plus précis, c'est le projectif complexe de cet espace, mais on peut négliger ce détail.

La dynamique est donnée au moyen d'un opérateur auto-adjoint $\hat{H}$ (avec domaine) sur $\mathcal{H}$ grâce à l'équation de Schrödinger :

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{du}{dt} = \hat{H}u \ ,$$

dont le flot est le groupe à un paramètre d'opérateurs unitaires donné par : $U(t) = e^{-it\hat{H}/\hbar}$.

La constante $\hbar$ n'est pas là uniquement pour faire joli, en général $\hat{H}$ est une énergie et donc $\hbar$ a les dimensions d'une action, car on ne peut exponentier que des quantités sans dimension !!

Exemple 3.1 *$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$ et $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta + V$. On a alors l'équation de Schrödinger.*

Exemple 3.2 *$\mathcal{H} = L^2(X)$ et $\hat{H} = \frac{\hbar^2}{2}\Delta_g$, où Δ_g est le laplacien riemannien. On a l'équation de Schrödinger associée au flot géodésique.*

Exemple 3.3 *Si E est le fibré anti-canonique sur $P^n\mathbb{C}$, on considère l'espace de Hilbert des sections holomorphes de $E^{\otimes N}$ qui s'identifie à l'espace des polynômes homogènes de degré N sur $\mathbb{C}^{n+1}$.*

Si $H : P^n\mathbb{C} \to \mathbb{R}$, on considère les opérateurs de Toeplitz

$$\hat{H}_N\varphi = \Pi_N(H\varphi) \ ,$$

où Π_N est la projection orthogonale des sections sur les sections holomorphes. Voir [19].

La ressemblance entre les exemples de ce paragraphe et du précédent n'est pas fortuite, comme on va le voir.

Il faut aussi remarquer que la mécanique quantique est un cas particulier de la mécanique classique, celui où l'hamiltonien est une forme hermitienne sur une espace de Hilbert. De ce point de vue, il n'est pas très excitant : la dynamique est quasi-périodique, les fréquences fondamentales étant liées de façon simple au spectre de $\hat{H}$.

Les correspondances entre espace des phases classiques et quantiques (flèches entre 2 catégories) peuvent être prolongées de façon heuristique, par exemple correspondance entre volume et dimension, entre variétés lagrangiennes et vecteurs, entre produits et produits tensoriels, entre changement de signe de ω et passage au dual.

Pour être plus pédant, on pourrait parler de la catégorie *symplectique* dont les objets sont les variétés symplectiques et les flèches de Z à Z' les sous-variétés lagrangiennes de $(Z \times Z', \omega' - \omega)$ et de la catégorie hilbertienne dont les objets sont les espaces de Hilbert et les flèches les opérateurs unitaires.

On obtient ainsi le tableau de correspondance suivant qu'il est intéressant d'essayer de prolonger !!

Classique	**Quantique**
(Z, ω)	$\mathcal{H}$
$(T^\star X, \omega)$	$L^2(X)$
L lagrangienne	$\varphi \in \mathcal{H},\ \|\varphi\| = 1$
$L \subset (Z_1 \times Z_2, \omega_2 - \omega_1)$	$U : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$
$\frac{1}{n!} \int_Z \omega^{\wedge n}$	$\dim \mathcal{H}$
$H : Z \to \mathbb{R}$	$\hat{H}$ autoadjoint
$\frac{1}{2}\|\xi\|^2 + V(x)$	$-\frac{\hbar^2}{2}\Delta + V$
$\frac{1}{2}\sum g^{i,j}\xi_i\xi_j$	Δ_g
φ_t	$e^{-it\frac{\hat{H}}{\hbar}}$
Legendre	Fourier
Trajectoires périodiques	Fonctions propres
Périodes	Spectre

4 La mécanique semi-classique—

Pour cette section, voir [2], [25], [29], [32], [42], [44], [51].

4.1 Introduction

Du point de vue physique, la mécanique quantique est apparue comme nécessaire pour remplacer la mécanique classique dans certaines situations (atomes et molécules, physique des étoiles).

De même, l'optique géométrique doit être remplacée par une optique ondulatoire (Maxwell).

Le point commun est l'étude d'EDP linéaires dépendant d'un petit (ou grand) paramètre : équation de Schrödinger avec h petit, grandes valeurs propres du laplacien riemannien, solutions à grandes fréquences des équations de Maxwell.

On peut aussi considérer de façon plus générale la dégénérescence de systèmes hamiltoniens (en dimension finie ou infinie) dépendant d'un *petit* paramètre vers d'autres systèmes hamiltoniens de dimension plus petite. La méthode de moyennisation est un peu le prototype de ces limites : les oscillations rapides du système (penser à un gyroscope) donnent lieu à un découplage entre une dynamique rapide et une dynamique lente qui est à nouveau hamiltonienne sur un espace des phases réduit.

Si on considère un hamiltonien

$$H_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} H_0 + H_1 \ ,$$

sur une variété symplectique de dimension $2n$ et qu'on suppose que les trajectoires de H_0 contenues dans la couche d'énergie E_0 sont périodiques de période T_0, on peut introduire la variété symplectique Z_{E_0} de dimension $2(n-1)$ des trajectoires de H_0 contenues dans la couche d'énergie E_0 et la munir de l'hamiltonien moyenné $K = \frac{1}{T_0}\int_\gamma H_1 dt$ décrivant une dynamique sur les trajectoires de H_0. Cette dynamique décrit bien le comportement des trajectoires de H_ε dans un intervalle de temps de l'ordre de 1.

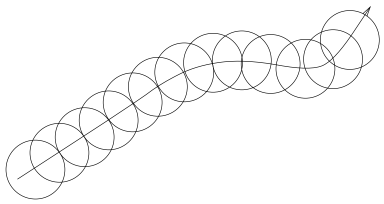

Figure 3: méthode de moyennisation

4.2 La phase stationnaire

Voir [36].

Dans le cas qui nous préoccupe dans la suite (linéaire), ce découplage est une conséquence de la phase stationnaire : si on considère une intégrale oscillante du type :

$$I(h) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{iS(x)/h} a(x) |dx| \ ,$$

où $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est C^∞ et $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, le comportement asymptotique de $I(h)$ quand h tend vers 0 est contrôlé par les points critiques de S situés dans le support de

a. Lorsque ceux-ci sont non dégénérés, on a une formule explicite pour le développement asymptotique. Les faits remarquables sont les suivants: le comportement est en $h^{n/2}$, il y a une phase liée à l'indice de la hessienne de S aux points critiques.

Plus précisément, si S n'a qu'un point critique supposé non dégénéré x_0 dans le support de a de signature σ, on a :

$$I(h) \sim (2\pi h)^{n/2} e^{iS(x_0)/h} e^{i\sigma\pi/4} \frac{a(x_0)}{|\det(S"(x_0))|^{1/2}} \ .$$

Le coefficient principal (amplitude) admet une interprétation géométrique comme densité relative de 2 mesures en x_o : la mesure $a(x)dx$ et la mesure associée canoniquement à $S"$ (comme en riemannien). Cette remarque est à l'origine de la géométrisation du calcul des intégrales oscillantes.

Donnons 3 applications semi-classiques simples de la phase stationnaire :

Exemple 4.1 : Fourier et Legendre.

Soit $S : U \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞ définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ et supposons que $x \to S'(x)$ est un difféomorphisme C^∞ de U sur un ouvert V du dual de $\mathbb{R}^n$. Soit alors $\hat{S}(\xi) : V \to \mathbb{R}$ la transformée de Legendre de S caractérisée par

$$\{(x, S'(x)) | x \in U\} = \{(\hat{S}'(\xi), \xi) | \xi \in V\} \ ,$$

normalisée par $\hat{S}(\xi_0) + S(x_0) = x_0\xi_0$ pour un point $\xi_0 = S'(x_0)$.

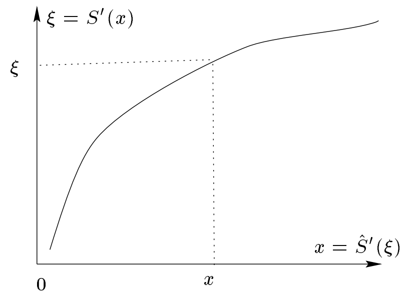

Figure 4: transformation de Legendre

Soit $a \in C_0^\infty(U)$ et

$$\mathcal{F}_h \phi(\xi) = \int e^{-ix\xi/h} \phi(x) |d_h x| \ ,$$

où $|d_h x|$ est une mesure de Haar sur $\mathbb{R}^n$ normalisée pour que $\mathcal{F}_h$ soit unitaire de $L^2(\mathbb{R}^n, |d_h x|)$ sur $L^2(\mathbb{R}^n, |d_h \xi|)$.

Alors

$$\mathcal{F}_h(a(x) e^{iS(x)/h})(\xi) \sim A(\xi) e^{-i\hat{S}(\xi)/h} \ ,$$

où $\hat{S}$ est la transformée de Legendre de S.

On peut donc dire que la transformée de Legendre est la *limite semi-classique* de la transformée de Fourier.

Exemple 4.2 : vitesse de phase et vitesse de groupe.

Soit $a(k)e^{i(kx-\omega(k)t)}$ *une onde plane monochromatique de fréquence* $\omega(k)$ *dans* $\mathbb{R}^n$*. Sa vitesse de propagation est* $v = \frac{k\omega(k)}{\|k\|^2}$*. C'est la vitesse de déplacement des hyperplans d'égale phase*

$$kx - \omega(k)t = \alpha_o \ ,$$

souvent appellée vitesse de phase.

Si on prend une superposition de telles ondes de la forme

$$F(x,t) = \int a(k)e^{ikx-\omega(k)t}|dk| \ ,$$

avec k *grand, la fonction* F *est négligeable en dehors des point* (x,t) *tels que* $x = \omega'(k)t$ *qui se propagent à la vitesse* $\omega'(k)$ *appellée* vitesse de groupe *du paquet d'onde.*

Exemple 4.3 : principe de Huyghens.

Considérons une onde sphérique de la forme

$$a(x)e^{ikr}$$

issue de l'origine. Soit maintenant Σ *une surface et considérons une superposition d'ondes sphériques émises par les points de* Σ *de la forme*

$$F(M) = \int_{\Sigma} e^{ikd(P,M)}a(P)|dP| \ .$$

Le comportement asymptotique lorsque k *est grand est négligeable sauf si* M *est sur une normale à* Σ*. La phase est alors donnée à une constante près par*

$$kd(A,M) - n(M)\frac{\pi}{2} \ ,$$

à condition que M *ne soit pas un point focal, et où* $n(M)$ *est l'indice de Morse de la fonction distance.*

On voit donc qu'aux grandes fréquences le front d'onde (phases constantes) est l'enveloppe des fronts sphériques issus de Σ*, ce qui est le principe de Huygens en optique géométrique.*

4.3 EDP linéaires avec un petit paramètre

En général, on étudiera une équation du type :

$$P(h,x,\frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial x}) = \sum_{|\alpha|\leq N} a_\alpha(x,h)(\frac{h}{i}\partial_x)^\alpha \ ,$$

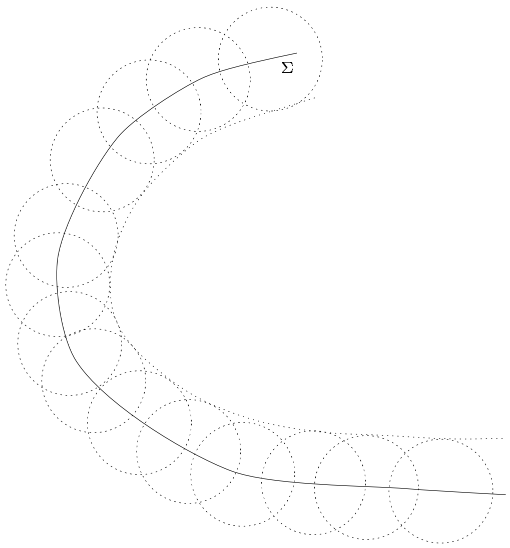

Figure 5: principe de Huygens

où les $a_\alpha(x,h)$ sont de la forme :

$$a_\alpha(x,h) = \sum_{j\geq 0} b_{\alpha,j}(x)h^j \ .$$

On définit alors

$$P_0(x,\xi) = \sum b_{\alpha,0}\xi^\alpha \ ,$$

qui est appellé symbole principal de P. On supposera dans ce qui suit que P_0 ne prend que des valeurs réelles.

Le but est de décrire les (des) solutions de

$$P_h u_h = O(h^\infty) \ .$$

Exemple 4.4

$$P = -\frac{h^2}{2}\Delta + V - E \ , P_0 = \frac{1}{2}\|\xi\|^2 + V(x) - E \ ,$$

(valeurs propres de Schrödinger).

$$\frac{h}{i}\frac{du}{dt} = -\frac{h^2}{2}\Delta u + Vu \ , P_0 = \tau - H(x,\xi) \ ,$$

(Schrödinger dépendant du temps).

$$\lambda^{-2}\Delta_g - 1 \ , P_o = g^\star(x,\xi) - 1 \ ,$$

(grandes valeurs propres du laplacien).

Les solutions BKW :
on considère l'action de P sur une fonction oscillante et on développe en puissances de h :

$$P(a(x)e^{iS(x)/h}) = e^{iS(x)/h}\Big(P_o(x,S'(x))a(x) + \frac{h}{i}\big(\mathcal{X}a(x) + P_1(x,S'(x))a(x)\big) + O(h^2)\Big) ,$$

où $\mathcal{X} = \sum \partial_{\xi_i} P_o(x,S'(x))\partial_{x_i}$ et $P_1(x,\xi)$, le *symbole sous-principal* de P, est une fonction sur $T^\star X$.

Résoudre $P(ae^{iS/h}) = O(h^2)$ équivaut donc à de résoudre l'équation eiconale $P_o(x,S'(x)) = 0$, puis une équation différentielle le long des trajectoires de $\mathcal{X}$. Ces deux opérations gardent un sens pour les solutions généralisées, en particulier, $\mathcal{X}$ est la projection sur X de $\mathcal{X}_{P_o}$ et donc on peut lire les équations de transport sur la variété lagrangienne.

Dans le cas de Schrödinger, l'équation de transport s'écrit :

$$\mathcal{X}a + \frac{1}{2}\Delta S a = 0 .$$

Elle s'interprète géométriquement comme l'invariance par le flot hamiltonien de la demi-densité $a(x)|dx|^{1/2}$. Le carré $a(x)^2|dx|$ s'interprète bien en mécanique quantique comme une mesure : la probabilité de présence de la particule.

Pour mettre tout cela en place, on associe, à la représentation de L à partir d'une famille de fonctions, des superpositions de fonctions oscillantes

$$f(x) = \int e^{i\varphi(x,\theta)/h} a(x,\theta)d\theta .$$

Exemple 4.5 : la fonction de Airy. *On définit*

$$Ai_h(x) = (2\pi h)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(x\xi - \frac{\xi^3}{3}))/h} d\xi = h^{-1/6} Ai(xh^{-2/3}) .$$

Cette fonction est associée à la variété lagrangienne

$$x = \xi^2$$

qui admet une caustique en $(0,0)$.

La fonction de Airy décrit en fait le comportement universel des intégrales oscillantes associées aux singularités plis.

Le résultat net est la possibilité d'associer à toute variété lagrangienne L vérifiant $(P_0)_{|L} = 0$ des solutions locales de $Pu = O(h^2)$ et même $O(h^\infty)$ si on réfléchit un peu.

Ces solutions ne se globalisent pas toujours : ce sont les conditions de quantification.

Dans les cas les plus simples, par exemple dans les exemples 4.6 et 4.7, il s'agit d'une condition portant uniquement sur L : la classe de cohomologie de de Rham de la forme de Liouville $\alpha = \xi dx$ satisfait des conditions d'intégralité du type

$$[\alpha] \in 2\pi h(\mathbb{Z}^n + \mu) ,$$

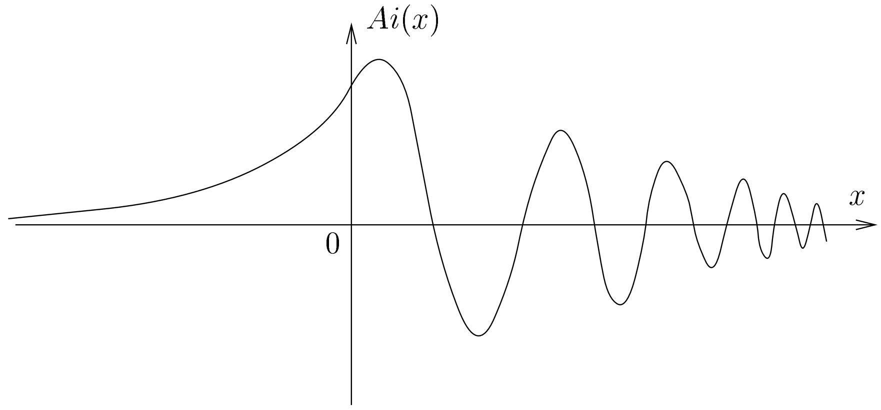

Figure 6: la fonction de Airy

où $\mu \in \frac{1}{4}\mathbb{Z}^n$ est l'*indice de Maslov.*

En effet, une fois l'existence d'une densité invariante assurée, il reste le problème des phases qui sont données localement par S dont la différentielle est la restriction à L de α (on retrouve la définition des fronts d'ondes comme feuilles de phases constantes). La contribution des caustiques est donnée par l'indice de Maslov qui a son origine technique dans la phase stationnaire.

Exemple 4.6 : les séries de Fourier.

On considère l'opérateur $\frac{h}{i}\partial_x$ sur $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Son symbole principal est ξ et la condition de quantification sur la variété $\xi = a$ est

$$2\pi a = 2\pi h n \ ,$$

soit $a = hn$. On retrouve comme spectre les hn, $n \in \mathbb{Z}$ et les séries de Fourier.

Exemple 4.7 : l'oscillateur harmonique.

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(-\partial_x^2 + x^2) \ .$$

Le symbole principal est

$$\frac{1}{2}(x^2 + \xi^2)$$

et les conditions de quantification s'écrivent pour la variété $H = E$:

$$2\pi E = 2\pi h(n + \frac{1}{2}) \ .$$

Elles donnent le spectre exact :

$$E_n = h(n + \frac{1}{2}) \ .$$

Cela n'est pas surprenant, car le changement $x = \sqrt{h}x_1$ transforme $\hat{H}_h$ en $h\hat{H}_1$.

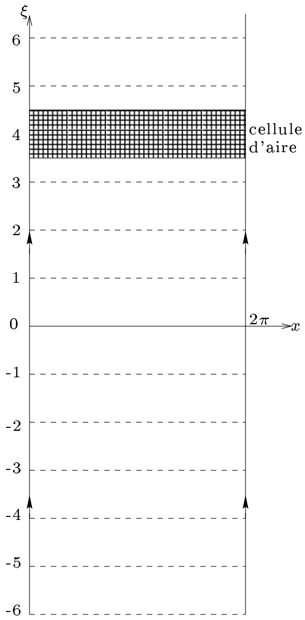

Figure 7: l'espace de phase des séries de Fourier

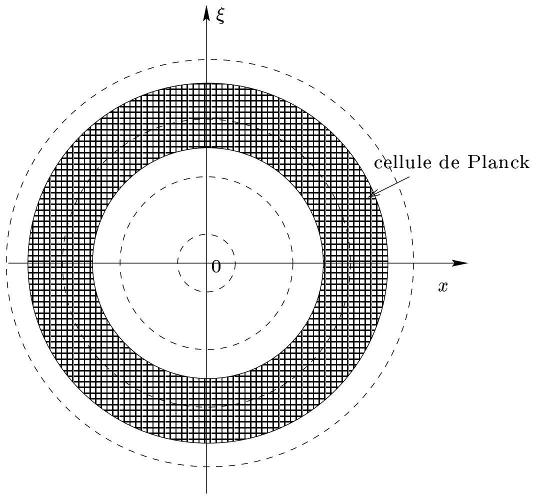

Figure 8: l'espace des phases de l'oscillateur harmonique

4.4 Le cas de Schrödinger et l'intégrale de Feynman

Voir [27], [13].

Dans le cas de Schrödinger dépendant du temps, on obtient une représentation à la Feynman :

$$p(t,x,y) = \int_{\Omega_{t,x,y}} e^{i\int_0^t \mathcal{L}(\gamma(s),\gamma'(s))ds/h} d\gamma \ .$$

Bien sûr, cette intégrale n'a pas de statut mathématique bien solide, contrairement à la mesure de Wiener. On doit comprendre $d\gamma$ comme une mesure de Lebesgue.

5 Le spectre semi-classique

5.1 La formule de Weyl

Voir [8], [32].

On considère le spectre de l'opérateur de Schrödinger dans $\mathbb{R}^n$

$$\hat{H} = -\frac{h^2}{2}\Delta + V - E \ ,$$

où on suppose V C^∞ et $\liminf_{x\to\infty} V \geq 0$. Alors le spectre négatif de $\hat{H}$ est discret ; on l'écrit :

$$E_1(h) < E_2(h) \leq \cdots \ .$$

Si $E < 0$, on considère le comportement asymptotique semi-classique de

$$N_h(E) = \#\{j | E_j(h) \leq E\} \ .$$

Il se trouve que l'asymptotique de $N_h(E)$ est purement classique

$$N_h(E) \sim (\frac{1}{2\pi h})^n \mathrm{vol}(\{P_0(x,\xi) \leq E\}) \ ,$$

ce qui signifie que chaque état propre *occupe* un région de volume $(2\pi h)^{n/2}$ de l'espace des phases. C'est une des versions de la correspondance entre volume et dimension. Cela permet parfois de déterminer le $\hbar$ effectif d'un problème de type semi-classique.

De nombreux auteurs se sont préoccupés d'obtenir des estimations du reste du type

$$N_h(E) = Ch^{-n}(1 + O(h^\alpha)) \ .$$

La meilleure estimation générale ($\alpha = 1$) dans le cas où E n'est pas valeur critique de $H(x,\xi)$ est celle de Hörmander ([35]). Cette estimation a été améliorée par Duistermaat et Guillemin [23] en un $o(h)$ dans le cas (générique) où l'ensemble des trajectoires périodiques est de mesure nulle et Bérard ([7]) a montré que, dans le cas riemannien sans points conjugués, on peut améliorer le reste en $O(h/|\ln h|)$.

Cette asymptotique n'est pas vraie pour un hamiltonien arbitraire, en particulier elle est incorrecte dans le cas des bouteilles magnétiques : la vraie asymptotique est donné par le nombre de pavés d'un pavage par des images de cubes standards par des plongements canoniques (voir [14]).

5.2 Le spectre dans le cas complètement intégrable : coordonnées actions-angles semi-classiques

Voir [16], [17], [18].

Du point de vue classique, un flot hamiltonien est dit complètement intégrable si l'espace des phases admet (presque partout) un feuilletage lagrangien en tores invariants par le flot hamiltonien. Cela correspond donc à un hamiltonien sur le tore $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ de la forme $H(\xi)$.

L'hamiltonien quantique naturellement associé est donc

$$\hat{H} = H(\frac{h}{i}\partial_x)$$

dont le spectre est formé des points

$$H(2\pi hp),\ p \in \mathbb{Z}^n\ .$$

On peut retrouver ce spectre au moyen des conditions de quantification

$$[\alpha] \in 2\pi h\mathbb{Z}^n\ .$$

En fait, il faut introduire les corrections des indices de Maslov, ce qui correspond à remplacer $\mathbb{Z}^n$ par un translaté $\mu + \mathbb{Z}^n$.

Tout ceci peut se justifier rigoureusement.

L'analyse précise des singularités du système complètement intégrable nécessite l'introduction de conditions de quantification modifiées que nous avons traitées avec Bernard Parisse en dimension 1 ([20] et [21]) et que San Ngoc Vu est en train de traiter en toute généralité. Ces travaux permettent de décrire pour un système complètement intégrable avec singularités de Morse l'asymptotique semi-classique de *toutes* les valeurs propres.

En particulier, dans le cas d'un double puits de potentiel pair en dimension 1, nous avons décrit avec Bernard Parisse la transition du spectre près de l'énergie correspondant au maximum local V_0 du potentiel : il s'agit d'une transition (universelle) entre les doublets de parité

$$\lambda_{2k-1} < \lambda_{2k} \leq \lambda_{2k-1} + O(e^{-C/h})\ ,$$

$(\lambda_{2k} << V_0)$ et les valeurs propres régulièrement espacées pour $\lambda_k >> V_0$.

Cette approche est encore valable dans le cadre de la théorie KAM (cf [16]) de 2 façons différentes :

–pour décrire le spectre semi-classique d'un sytème hamiltonien proche d'un système intégrable ;

–en considérant le cas où le système est classiquement complètement intégrable et non quantiquement complètement intégrable comme une *perturbation d'un système complètement intégrable.*

Ce dernier cas se rencontre par exemple pour l'étude des grandes valeurs propres de $\Delta + V$ où Δ est le laplacien plat sur le tore (intégrable quantiquement par les séries de Fourier) et V en est une petite perturbation à la limite des grandes valeurs propres.

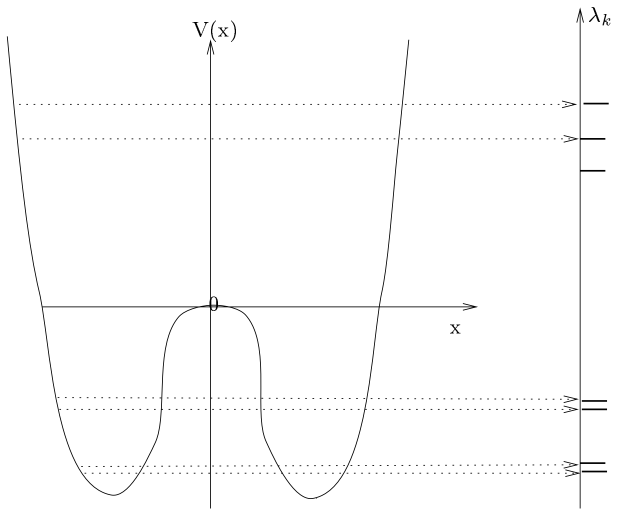

Figure 9: le spectre du double puits symétrique

6 Le cas général : la formule des traces semi-classiques

Dans le cas non complètement intégrable, la calcul approché du spectre est impossible, comme cela a été remarqué par Einstein dans [26]. Dans les années 70 sont apparues de nouvelles méthodes que l'on désignera sous le nom de formules de traces semi-classiques. Il s'agit de formules asymptotiques pour la densité régularisée de valeurs propres. D'abord apparues chez des physiciens (Gutzwiller [30], Balaian et Bloch [5], [6]), ces formules ont été justifiées rigoureusement par les mathématiciens, d'abord dans ma thèse [12], utilisant une approximation de l'intégrale de Feynman, puis dans les travaux qui s'en sont inspirés, ceux de Chazarain [11] et de Duistermaaat-Guillemin [23] en utilisant les OIF.

6.1 Densités régularisées

Pour obtenir des renseignements plus fins sur la fonction (discontinue) $N_h(E)$, il est agréable de la régulariser (au sens de Schwartz), on pose donc pour une fonction ρ lisse, d'intégrale 1 et à décroissance rapide:

$$N_\rho(E) = \sum_n \rho(E - E_n) \ .$$

En fait, on utilise souvent une famille

$$\rho_\varepsilon(u) = \frac{1}{\varepsilon}\rho(\frac{u}{\varepsilon}) \ .$$

Lorsque ε tend vers 0, $N_{\rho_\varepsilon}(\mu)$ décrit une densité régularisée correspondant à un regroupement de paquets de valeurs propres de largeur $\sim \varepsilon$. Autrement dit on observe le spectre avec un grossissement $1/\varepsilon$.

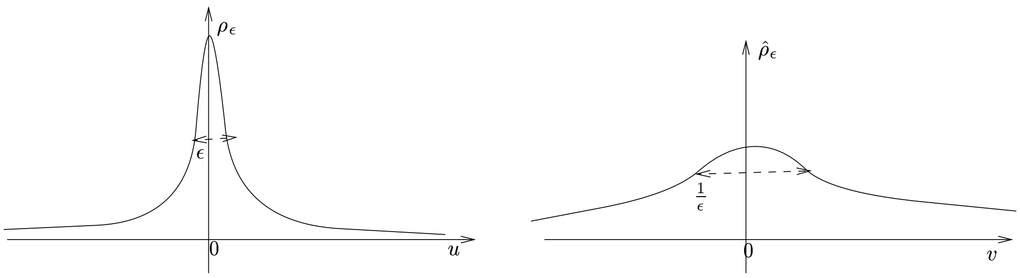

Figure 10: la densité spectrale régularisée

Le lien entre la densité régularisée et l'équation de Schrödinger est donné par la formule d'inversion de Fourier : si $\hat{\rho}(t) = \int e^{-it\mu}\rho(\mu)d\mu$ et $Z(t) = \text{Trace}(e^{-it\hat{H}/h})$, on a :

$$N_\rho(\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} Z(uh)e^{iu\mu}\hat{\rho}(u)du \ .$$

Si on veut une analyse fine ρ doit être très localisée et cela implique que $\hat{\rho}$ est très étalée et donc une connaissance de $Z(t)$ (et donc de $U(t)$) pour t grand. A la limite le spectre exact est lié aux solutions périodiques de l'équation de Schrödinger qui sont donc connues pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Deux échelles sont très importantes, $\varepsilon = h$ qui correspond du point de vue classique à un intervalle de temps borné et qui prend en compte un nombre de valeurs propres dans un intervalle de longueur $\sim h$ qui en compte environ h^{n-1} et l'échelle $\varepsilon = h^n$ qui correspond à la séparation des niveaux (Weyl) (et donc à une analyse fine du spectre analogue à celle donnée par Bohr-Sommerfeld) et à un temps de l'ordre de $1/h^{n-1}$.

La première échelle est une échelle *non universelle* donnée par les formules de traces semi-classique, alors que les échelles plus fines sont (au-delà du semi-classique) le domaine des *classes d'universalités* (GOE, GUE, Poisson) (voir section 7).

L'étude à ces échelles est difficile d'accès par les méthodes semi-classiques qui décrivent mal les asymptotiques simultanées $\hbar \to 0$ et $t \to \infty$; ce phénomème fondamental (et mystérieux) est appellé par certains auteurs *rupture de l'approximation semi-classique.*

La limite semi-classique se décrit bien en termes de l'évolution d'une fonction d'onde localisée de la forme :

$$\Phi_{x_o,p_o}(x) = ce^{-\frac{1}{2\hbar}\|x-x_o\|^2}e^{\frac{i}{\hbar}p_o x} \ ,$$

appellé *état cohérent.* L'évolution semi-classique de Φ, $U(t)\Phi$, est donnée lorsque t reste borné par une fonction d'onde du même type localisée au point $\varphi_t(x_o,p_o)$ où φ_t est le flot classique. Lorsque t augmente, cette fonction gaussienne se délocalise en un temps lié à l'exposant de Liapounov λ :

$$T \sim \frac{1}{\lambda}|\ln\hbar| \ ,$$

qui est le temps nécessaire pour qu'une région initiale de diamètre $\hbar$ ne soit plus localisée près de la trajectoire classique. Au delà de ce temps la non linéarité de la dynamique classique joue pleinement son rôle et $U(t)\Phi$ reste localisé sur la variété instable de (x_o, p_o) qui s'enroule de façon compliquée dans l'espace des phases Z.

6.2 La formule des traces de Selberg

Pour plus de détails sur cette section, voir par exemple l'excellent papier de Hejhal [33]. Le flot géodésique sur les surfaces de Riemann à courbure -1 n'est pas intégrable et on ne peut pas espérer non plus de formules explicites pour le spectre du laplacien. On devra se contenter de formules sommatoires qui généralisent la formule de Poisson.

Prenons l'hamiltonien quantique

$$\hat{H} = \frac{1}{i}\frac{d}{dx}$$

sur le tore de dimension 1, $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Son spectre est formé des nombres $2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$ (séries de Fourier).

On a alors la formule suivante, pour $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \rho(\mu - 2\pi n) = \frac{1}{2\pi}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{\rho}(m)e^{im\mu} \ ,$$

où

$$\hat{\rho}(t) = \int e^{-it\mu}\rho(\mu)d\mu$$

est la transformée de Fourier de ρ (qui est bien une fonction du temps...). C'est la classique formule sommatoire de Poisson.

On s'intéresse donc à la densité régularisée

$$N_\rho(\mu) = \sum_n \rho(\mu - \mu_n) \ ,$$

où les valeurs propres du laplacien sont $\lambda_n = \frac{1}{4} + \mu_n^2$.

Motivé par l'analogie avec la fonction ζ de Riemann, A. Selberg a montré en 1956 que, pour des fonctions ρ convenables, $N_\rho(\mu)$ admet une expression exacte comme somme d'un terme régulier non oscillant $N_{TF}(\mu)$ dont la partie principale est donnée par Weyl :

$$N_{TF}(\mu) \sim \frac{\text{Aire}(X)}{2\pi}\mu$$

et de termes oscillants $N_\gamma(\mu)$ associés aux géodésiques périodiques.

L'expression de N_γ est :

$$N_\gamma(\mu) = \hat{\rho}(L_\gamma)c(\gamma)e^{i\mu L_\gamma} \ ,$$

où L_γ est la longueur de la géodésique périodique γ et $c(\gamma)$ est un nombre complexe non nul calculable en termes de la dynamique linéarisée près de γ (application de Poincaré linéarisée, indice de Morse).

6.3 La formule des traces semi-classiques

Cette formule s'étend en une formule asymptotique (appellée formule de traces de Gutzwiller dans la littérature) valable en toute généralité (en particulier sans aucune hypothèse de type chaos classique, le cas complètement intégrable étant une conséquence de la formule sommatoire de Poisson) à condition de prendre ρ telle que $\hat{\rho}$ soit à support compact, ce qui revient à ne considérer la dynamique de l'équation de Schrödinger que sur un intervalle borné en temps et donc une contribution d'un nombre fini de géodésiques périodiques, en vertu de la formule d'inversion de Fourier :

$$\frac{1}{h}\rho(\frac{E-\hat{H}}{h}) = \frac{1}{2\pi h}\int_{\mathbb{R}} e^{itE/h}e^{-it\hat{H}/h}\hat{\rho}(t)dt \ .$$

Donnons un énoncé assez précis pour l'équation de Schrödinger.

Théorème 1 *Soit E une énergie non critique pour l'hamiltonien classique H, $\chi \in C_o^\infty(\mathbb{R})$ égale à 1 près de E et $\rho(E)$ une fonction dont la transformée de Fourier est à support dans $|t| < T$.*

On suppose que les trajectoires périodiques γ de $\mathcal{X}_H$ contenues dans $\{H = E\}$ sont non dégénérées *au sens que l'application de Poincaré linéaire P_γ n'admet pas 1 comme valeur propre. Soit $T'_\gamma > 0$ la plus petite période de γ et m_γ l'indice de Morse de γ comme courbe fermée et $\epsilon_\gamma = O$ ou 1.*

Alors :

$$\sum_j \chi(E_j)\frac{1}{h}\rho(\frac{E-E_j}{h}) = N_W(E) + \sum_\gamma N_\gamma(E) \ , \tag{1}$$

où

$$N_W(E) = C(E)h^{-(n-1)}(1+O(h)) \tag{2}$$

et

$$N_\gamma(E) = \frac{1}{2\pi h}\frac{T'_\gamma}{(\det(1-P_\gamma))^{1/2}}e^{\frac{i}{h}\int_\gamma \xi dx - i(m_\gamma+\epsilon)\frac{\pi}{2}}(1+O(h)) \ . \tag{3}$$

La justification heuristique la plus simple est liée à l'intégrale de Feynman ; donnons-la : le propagateur quantique

$$p(t,x,y)$$

noyau intégral de l'opérateur $U(t) = e^{-it\hat{H}/\hbar}$ est donné selon Feynman ([F-H]) comme une superposition d'amplitudes associées aux différents chemins $\gamma \in \Omega_{x,y,t}$ qui est l'ensemble de chemins ($\gamma : [0,t] \to X$ tels que $\gamma(0) = x, \ \gamma(t) = y$) :

$$p(t,x,y) = \int_{\Omega_{x,y,t}} e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t \mathcal{L}(\gamma(s),\gamma'(s))ds}|d\gamma| \ ,$$

où $\mathcal{L} : TX \rightarrow \mathbb{R}$ est le lagrangien classique. Dans le cas des géodésiques, le lagrangien est l'énergie cinétique $\frac{1}{2}\|\gamma'\|^2$.

Si Ω_t désigne maintenant l'espace des lacets fermés parcouru en le temps t, on obtient la fonction de partition quantique :

$$Z(t) = \sum e^{-itE_j/\hbar} = \int_X p(t,x,x)dx = \int_{\Omega_t} e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t \mathcal{L}(\gamma(s),\gamma'(s))ds} |d\gamma| \ ,$$

comme une intégrale sur les *lacets*. L'application de la phase stationnaire, lorsque $\hbar$ tend vers 0, fait apparaitre les trajectoires fermées comme points critiques de $\Phi(\gamma) = \int_0^t \mathcal{L}(\gamma(s),\gamma'(s))ds$ sur Ω_t.

Dans le cas de Selberg, il se trouve que, bien que la surface X puisse être compliquée, l'espace Ω_t se décompose en composantes connexes simples, une par géodésique périodique et que la décomposition de $Z(t)$ en somme d'intégrales sur ces composantes connexes permet de prévoir une formule sommatoire exacte.

La formule de traces semi-classiques donne certes des informations sur le spectre, mais elle a surtout une application aux problèmes inverses. Par exemple dans le cas riemannien, elle montre que le spectre du laplacien détermine le spectre des longueurs des géodésiques périodiques.

La fonction ζ de Riemann :

la fonction

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \Pi_{p \text{ premier}}(1 - \frac{1}{p^s})^{-1}, \ \Re(s) > 1,$$

s'étend en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ ayant des zéros aux entiers pairs < 0. Riemann a fait l'hypothèse selon laquelle les autres zéros satisfont $\Re(s) = 1/2$. Cette hypothèse centrale en théorie des nombres est restée improuvée depuis environ 150 ans.

Il existe des formules sommatoires ayant une analogie formelle avec celle de Selberg pour ces zéros. A. Connes [22] vient de proposer un hamiltonien quantique dont le spectre serait donné par ces zéros et ainsi une voie d'attaque de l'hypothèse de Riemann.

7 Statistiques spectrales

Pour ceci, voir [9], [25], [41], [45], [46].

Il s'agit d'exprimer des propriétés de nature statistique d'une suite (infinie) de nombres.

Soit $E_1 \leq E_2 \leq \cdots \leq E_N < \cdots$ une suite infinie de nombres réels vérifiant la condition asymptotique suivante :

$$(\star) \ \lim_{n\rightarrow\infty} \frac{E_N}{N} = 1 \ .$$

On peut alors introduire plusieurs invariants statistiques, les plus simples étant :

–la distribution du plus proche voisin $p(s)$,

–l'écart quadratique par rapport à loi uniforme sur un intervalle de test de longueur l, $\Sigma^2(l)$ qui mesure la rigidité du spectre.

Par exemple, on peut poser (en supposant que ces limites existent) :

$$p(s)ds = \lim_{N\to\infty} \frac{\#\{p \leq N \mid s \leq E_{p+1} - E_p \leq s + ds\}}{N} \ .$$

Et de même :

$$\Sigma^2(l) = \lim_{E\to\infty} (\#\{p \mid E \leq E_p \leq E + l\} - l)^2 \ .$$

$p(s)$ mesure donc la statistique des écarts de niveaux, alors que $\Sigma^2(l)$ mesure la rigidité : $\Sigma^2(l)$ petit signifie que la suite est presque une suite arithmétique.

Si on a un vrai spectre, la condition $(\star)$ n'est pas satisfaite en général, mais les asymptotiques de type Weyl permettent un reparamétrage du spectre par une fonction puissance

$$E'_N = cE_N^\alpha$$

de façon à ce que $(\star)$ soit satisfaite.

Des exemples : la distribution de Poisson consiste à prendre N points répartis de façon équiprobable dans un intervalle de longueur N et la limite quand N tend vers l'infini. Il est bien connu qu'on a alors :

$$p(s) = e^{-s} \ .$$

De même, on montre que

$$\Sigma^2(l) = l \ .$$

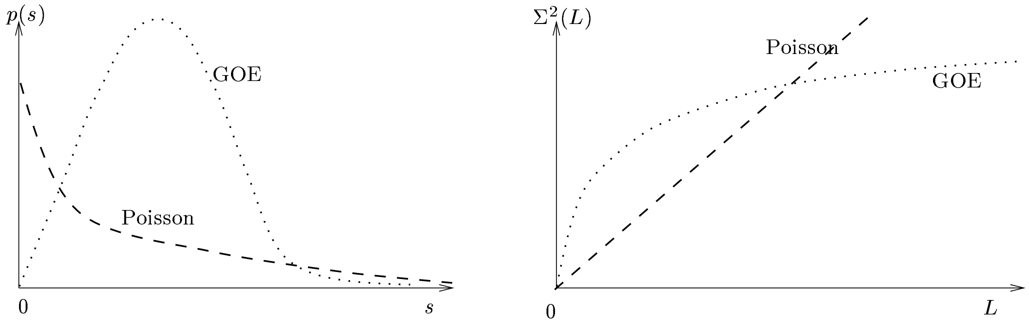

Figure 11: les statistiques spectrales : Poisson et GOE

Les spectres génériques ne sont pas poissonniens, ne serait-ce qu'à cause de la répulsion des niveaux. Il est connu depuis Wigner et Von Neumann ($\sim$ 1930) que la condition $\lambda_p = \lambda_{p+1}$ définit un sous-ensemble de codimension 2 de l'espace des opérateurs symétriques. On s'attend donc à : $p(0) = 0$ pour un hamiltonien quantique générique. Cette répulsion de niveaux n'est pas satisfaite dans les cas complètement intégrables ; par exemple le tore $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ a toutes ses valeurs propres dégénérées ! Mais le cas complètement intégrable est *atypique* comme on le sait depuis Poincaré.

GOE :

Décrivons brièvement la théorie GOE. On considère des ensembles (au sens de la thermodynamique) de matrices symétriques $N \times N$ dont les éléments $a_{i,j},\ i \leq j$ sont des variables aléatoires normales indépendantes de même loi. On s'intéresse alors aux statistiques spectrales lorsque $N \to \infty$. On montre que le spectre se répartit dans un intervalle $(-c\sqrt{N}, c\sqrt{N})$ avec donc un écart moyen $2c/\sqrt{N}$. On renormalise en considérant $\lambda'_n = \frac{\sqrt{n}}{2c}\lambda_n$ et on peut alors calculer les limites thermodynamiques des statistiques spectrales. Le livre de Mehta [41] en donne un exposé détaillé.

$p(s)$ est proche d'une courbe $ase^{-s^2/b}$ suggérée par Wigner.

$$\Sigma^2(l) = \frac{2}{\pi^2}\ln l + o(1),\ l \to \infty \ .$$

GUE : de même si on s'intéresse aux matrices hermitiennes on obtient les statistiques GUE.

Des expériences numériques :

On s'attend donc, et cela a été explicitement proposé par des physiciens d'Orsay ([9]) dès 1984, à ce qu'à un flot géodésique chaotique corresponde une statistique de type GOE pour le spectre.

Les résultats numériques sont curieux : cela marche pour le stade ou le billard de Sinaï (tore de dimension 2 privé d'un disque), mais les expériences menées sur certains triangles géodésiques du disque de Poincaré dont la dynamique classique a les mêmes propriétés que celles décrites plus haut semble montrer une dichotomie entre les triangles qui permettent de paver H, par exemple les angles $(\pi/2, \pi/3, \pi/7)$ et plus généralement l'infinité de possibilités

$$(\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{r})\ ,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1\ ,$$

pour lesquels GOE ne marche pas et ceux qui ne pavent pas, par exemple $(\pi/2, \pi/3, 2\pi/15)$, pour lesquels GOE était vérifiée.

Cette dichotomie n'était pas la bonne comme l'ont vu il y a quelques années E. Bogomolny, B. Georgeot et M.-J. Giannoni.

Il se trouve que, parmi les triangles (une infinité) qui pavent H, un certain nombre fini dont la liste est connue correspondent à des sous-groupes dits *arithmétiques* de $SL_2(\mathbb{R})$ et que ce sont ceux-là pour lesquels GOE n'est pas satisfaite. Je ne vais pas me lancer dans une définition précise des groupes arithmétiques, mais disons que l'arithméticité a comme conséquence une grande dégénérescence du spectre des longueurs des géodésiques périodiques. Cette dégénérescence est elle même reliée à une famille de symétries quantiques particulières, appellées correspondances de Hecke. Ces symétries supplémentaires, relativement cachées, font que ces hamiltoniens quantiques ne sont pas génériques ! Luo et Sarnak ([45]) ont démontré que GOE n'est effectivement pas satisfaite dans les cas arithmétiques.

Lorsque $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$, H/Γ est l'espace des réseaux de $\mathbb{R}^2$ euclidien et si on définit, pour tout réseau z, $Y_n(z)$ comme l'ensemble des sous-réseaux d'indice n de z, les opérateurs $T_n\varphi(z) = \sum_{z' \in Y_n(z)} \varphi(z')$ commutent entre eux et avec Δ : ce sont les opérateurs de Hecke !

Les statistiques GUE sont utilisées lorsqu'il n'y a pas symétrie par inversion du temps (champs magnétiques). Montgomery a remarqué en 1973 que ces statistiques s'appliquent parfaitement aux zéros de la fonction ζ de Riemann, ce qui est cohérent avec l'approche proposée par Connes dans [22], voir aussi [37], [38].

References

[1] V. Arnold, A. Avez Problèmes ergodiques de la mécanique classique. *Gauthier-Villars*, 1967.

[2] G. Airy On the intensity of the light in a neighborhood of a caustic. *Trans. Cambr. Phil. Soc.*, 6:379-403, 1838.

[3] R. Abraham, J. Marsden. Foundations of mechanics. *Benjamin*, 1978.

[4] V. Arnold. Méthodes mathématiques de la mécanique classique. *Mir (Moscou)*, 1976.

[5] R. Balian, C. Bloch. Distribution of eigenfrequencies for the wave equation in a finite domain I, II et III. *Ann. Physics*, 60,64,69 (1970, 1971, 1972).

[6] R. Balian, C. Bloch. Solution of the Schrödinger equation in terms of classical paths. *Ann. Phys.*, 85:514- , 1974.

[7] P. Bérard. On the wave equation on a compact Riemannian manifold without conjugate points., *Math. Z.*, 155:249-276, 1977.

[8] M. Berger, P. Gauduchon, E. Mazet. Le spectre d'une variété riemannienne compacte. *Lecture Notes in Maths, Springer*, 1971.

[9] O. Bohigas, M.-J. Giannoni, C. Schmit. Characterization of chaotic quantum spectra and universality of level fluctuation laws. *Phys. Rev. Lett.*, 52:1-4, 1984.

[10] N. Balazs, A. Voros. Chaos on the pseudo-sphere. *Physics reports*, 143:109-240, 1986.

[11] J. Chazarain. Formule de Poisson pour les variétés riemanniennes. *Invent. Math.*, 24:65-82, 1974.

[12] Y. Colin de Verdière. Spectre du Laplacien et longueurs des géodésiques périodiques II. *Compositio Mathematica*, 27, 83-106 (1973)

[13] Y. Colin de Verdière. Paramétrix de l'équation des ondes et intégrales sur l'espace des chemins. *Séminaire Goulaouic–Schwartz*, 1974–1975.

[14] Y. Colin de Verdière. L'asymptotique de Weyl pour les bouteilles magnétiques. *Commun. Math. phys.*, 105:327-335, 1986.

[15] Y. Colin de Verdière. Un exemple de chaos classique et quantique : les surfaces de Riemann. *Journées turbulence et déterminisme à Grenoble*, 1997.

[16] Y. Colin de Verdière. Méthode de moyennisation en mécanique semi-classique. *Colloque EDP de St Jean de Monts*, 1996.

[17] Y. Colin de Verdière. Spectre conjoint d' opérateurs pseudo–différentiels qui commutent I : le cas non intégrable. *Duke Math. J.*, 46:169–182, 1979.

[18] Y. Colin de Verdière. Spectre conjoint d' opérateurs pseudo–différentiels qui commutent II : le cas intégrable. *Math. Zeitschrift*, 171:51–73, 1980.

[19] Y. Colin de Verdière. Une introduction aux opérateurs de Toeplitz. *Séminaire de théorie spectrale et géométrie (Grenoble)*, 13:135-142, 1994–1995.

[20] Y. Colin de Verdière et B. Parisse. Equilibres instables en régime semi-classique I : concentration microlocale. *Commun. PDE*, 19:1535-1564, 1994.

[21] Y. Colin de Verdière et B. Parisse. Equilibres instables en régime semi-classique II : conditions de Bohr-Sommerfeld. *Ann. IHP (physique théorique)*, 61:347-367, 1994.

[22] A. Connes. Formule de trace en géométrie non-commutative et hypothèse de Riemann. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 323:1231-1236, 1996.

[23] J. Duistermaat, V. Guillemin. The spectrum of positive elliptic operators and periodic geodesics. *Inventiones Math.*, 29:39-79, 1975.

[24] J. Duistermaat. Fourier integral operators. *Polycopié Courant Inst.*, 1973.

[25] B. Eckhardt. Quantum mechanics of classically non-integrable systems. *Phys. Report*, 163:205-297, 1987.

[26] A. Einstein. Zum Quantensatz from Sommerfeld and Epstein. *Verh. Deutsch Phys. Ges.*, 19:82-92, 1917.

[27] R. Feynman, A. Hibbs. Quantum Mechanics and path integrals. *Mc Graw-Hill*, 1965.

[28] V. Guillemin, S. Sternberg. Symplectic techniques in physics. *Cambridge University Press*,1984.

[29] V. Guillemin, S. Sternberg. Geometric asymptotics. *AMS*, 1976.

[30] M. Gutzwiller. Periodic orbits and classical quantization conditions. *J. of Math. Phys.*, 12:343-358, 1971.

[31] M.J. Giannoni, A. Voros, J. Zinn-Justin. Chaos and quantum physics (Ecole des Houches 1989). *North-Holland*, 1991.

[32] B. Helffer. Semi-classical analysis for the Schrödinger operator and applications. *Lecture notes in math. 1336 (Springer)*, 1988.

[33] D. Hejhal. The Selberg trace formula and the Riemann ζ function. *Duke Math. J.*, 43:441-482, 1976.

[34] L. Hörmander. The analysis of partial differential operators (4 volumes). *Springer*, 1983-1985.

[35] L. Hörmander. The spectral function of an elliptic operator. *Acta Math.* 121:193-218 (1968).

[36] L. Hörmander. Fourier integral operators I. *Acta Math.*, 127:79-183, 1971.

[37] A. Knauf. On a ferromagnetic spin chain. *Commun. Math. Phys.*, 153:77-115, 1993 .

[38] A. Knauf. On a ferromagnetic spin chain. II: Thermodynamic limit. *J. Math. Phys.* , 35:228-236, 1994.

[39] L. Landau, E. Lifshitz. Mécanique quantique non relativiste. *Mir(Moscou)*, 1974.

[40] V. Maslov. Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques. *Dunod, Gauthiers-Villars, Paris*, 1972.

[41] M.L. Mehta. Random Matrices. *Academic press*, 1990.

[42] V. Maslov, M. Fedoriuk. Semi-classical approximation in quantum mechanics. *Reidel (Pays-Bas)*, 1981.

[43] G. Mackey. The mathematical foundations of quantum mechanics. *Benjamin*, 1963.

[44] A.M. Ozorio de Almeida. Hamiltonian systems, chaos and quantization. *Cambridge*, 1988.

[45] P. Sarnak. Arithmetic Quantum Chaos (Shur Lectures). *Israel math. conf. proc.*, 8:183-236, 1995.

[46] P. Sarnak. Spectra and eigenfunctions of Laplacians. *Preprint*, 1995.

[47] A. Terras. Harmonic analysis on symmetric spaces and applications. *Springer*, 1985.

[48] C. Vitterbo. Une introduction à la topologie symplectique. *Gazette des mathématiciens (Soc. Math. Fr.)*, 54:81-96, 1992.

[49] A. Weinstein. Lectures on symplectic manifolds. *Regional conf. series in math.*, 29, 1977.

[50] A. Weinstein. Symplectic geometry. *Bull. AMS*, 5:1-13, 1981.

[51] A. Weinstein. What is microlocal analysis ? *Math. Intelligencer*, 4:90-92, 1982.