LA SURFACE VUE PAR UN MATHÉMATICIEN

par Yves Colin de Verdière,

0. Introduction. —

La vision des surfaces par les mathématiciens a considérablement évolué au cours des temps de façon liée aux progrès dans la compréhension de l'univers physique.

La surface d'Euclide ([Eu]) est le plan muni de la géométrie euclidienne de notre enfance: celle des droites, triangles, cercles.. Tout le monde connait la fameux postulat d'Euclide sur les parallèles.

Gauss (1777-1855) est un des premiers à avoir l'idée d'une géométrie intrinsèque des surfaces (*Disquisitiones circa Superficies Curva.* Voir [Do]). C'est aussi la période de la découverte des géométries non euclidiennes (Bolyai, Lobatchevski).

Ces idées ont été présentées de façon claire par Riemann (1826-1866) dans son exposé: *Sur les principes qui servent de fondements à la géométrie.* Cet exposé contient la définition encore utilisée actuellement en géométrie différentielle des variétés.

Le fondateur de la topologie moderne est Henri Poincaré (1854-1912) avec son *Analysis Situs* qui a juste 100 ans.

Il est certain que les concepts introduits par Riemann servent de support mathématique à la théorie de la relativité générale d'Einstein.

Le développement de la géométrie riemannienne a été considérable au XX ème siècle ainsi que celui des surfaces minimas depuis une vingtaine d'années en particulier grâce à l'utilisation des ordinateurs comme moyen d'exploration.

Enfin la révolution quantique (mécanique des matrices d'Heisenberg) a conduit à une révolution géométrique qui est l'oeuvre du mathématicien contemporain Alain Connes (1947-..): *La géométrie non commutative* dont je ne parlerai sans doute pas.

1. La notion de surface selon Riemann. —

Voilà ce que Riemann propose comme définition d'une variété (topologique) de dimension n; ici on va se restreindre au cas $n = 2$ et on obtient les surfaces.

Si X est un espace topologique, une *carte* de X est un triplet (U, V, ϕ) où U est un domaine ouvert de X, V un ouvert de $\mathbf{R}^2$ et ϕ un homéomorphisme de U sur V. On note (x, y) ou (u, v) un point générique de V et si $m \in U \subset X$, $\phi(m) = (x, y)$ s'appellent coordonnées locales de m. Elles paramètrent continûment les points de U.

Exemples:

1) Si X est un ouvert de $\mathbf{R}^2$, on peut prendre comme $U = V = X$ et $\phi = Id$; mais d'autre choix sont possibles et peuvent être intéressants: les coordonnées polaires, les coordonnées barycentriques, des coordonnées d'une autre base affine du plan, etc...

2) Si X est la sphère de rayon 1 de $\mathbf{R}^3$, on peut prendre les coordonnées sphériques:

$$V_a = \{(\theta, \alpha | a < \theta < a + 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\}\ ,$$

avec

$$\phi^{-1}(\theta, \alpha) = (\sin\alpha\cos\theta, \sin\alpha\sin\theta, \cos\alpha)\ .$$

Dans ce cas, U_a est la sphère privée du méridien de longitude a.

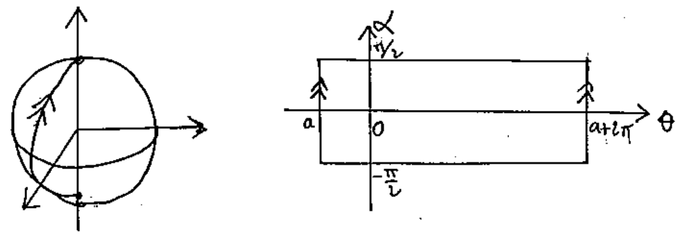

Figure: coordonnées sphériques

Pour le même exemple de la sphère, on peut prendre la projection stéréographique à partir du pôle Nord.

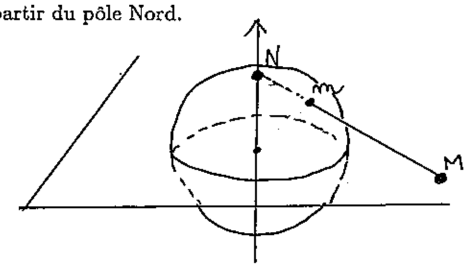

Figure: projection stéréographique

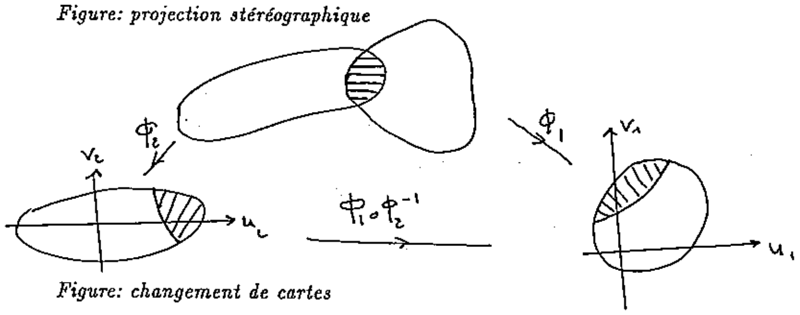

Figure: changement de cartes

Un *atlas* de X est la donnée d'une collection de cartes

$$(U_\alpha, V_\alpha, \phi_\alpha)$$

telle que X soit la réuni
est suffisante si on reste
largement!!

On a maintenant u
1, 2, les points de $U_1 \cap U_2$
est la correspondance ent

Les objets définis e
de compatibilités pour êt

2. La topologie

On dispose d'une
surfaces compactes (un e
une sous-suite convergen

Une telle surface a
de X comme réunion de t
se coupent suivant une a

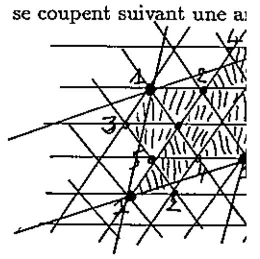

Figure: une triang

On introduit alors

1) *la caractéristiq*

calculée pour une triang
Cette somme ne dépend
sphère, 0 pour le tore, et

2) *L'orientabilité* :
de cartes soient de jacobi
γ admettant une base de

Si X est orientée,
une notion de droite et d

Le théorème de cl

telle que X soit la réunion des U_α: tout point est intérieur à l'un des U_α: cette carte est suffisante si on reste dans un petit voisinage de ce point. Les cartes se recouvrent largement!!

On a maintenant une notion de changement de cartes: si on a 2 cartes (U_i, V_i, ϕ_i), $i = 1, 2$, les points de $U_1 \cap U_2$ ont 2 systèmes de coordonnées locales. Le changement de cartes est la correspondance entre ces systèmes de coordonnées locales.

Les objets définis en termes de coordonnées locales doivent satisfaire des conditions de compatibilités pour être bien définis sur X.

2. La topologie des surfaces. —

On dispose d'une classification toplogique des surfaces. Restreignons-nous aux surfaces compactes (un espace topologique est dit *compact* si toute suite de points admet une sous-suite convergente).

Une telle surface admet une *triangulation* finie: une triangulation de X est l'écriture de X comme réunion de triangles (topologiques, fermés) telle que 2 triangles qui se coupent se coupent suivant une arête ou 1 sommet.

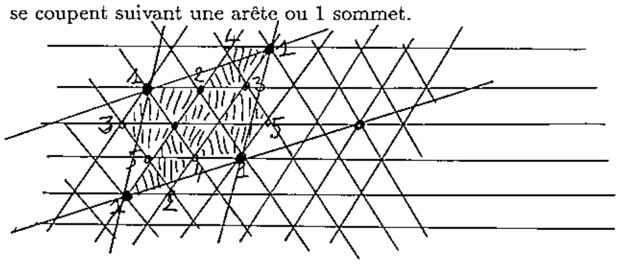

Figure: une triangulation du tore

On introduit alors les 2 invariants topologiques suivants des surfaces compactes:

1) *la caractéristique d'Euler-Poincaré* $\chi(X)$ définie par la somme

$$\chi(X) = S - A + F$$

calculée pour une triangulation (S est le nombre de sommets, A d'arêtes, F de triangles). Cette somme ne dépend pas de la triangulation choisie et vaut par exemple 2 pour la sphère, 0 pour le tore, etc...

2) *L'orientabilité* : la surface est orientable s'il existe un atlas dont les changements de cartes soient de jacobien > 0; si X n'est pas orientable, il existe un chemin fermé simple γ admettant une base de voisinages Ω tels que $\Omega \setminus \gamma$ soit connexe.

Si X est orientée, un observateur (bidimensionnel) qui se promène le long de γ a une notion de droite et de gauche bien définie.

Le théorème de classification des surfaces compactes est le suivant:

la liste des cas orientables X_n est donnée par les caractéristiques d'Euler qui valent $2 - 2n, n = 0, 1, 2, 3, \cdots$.

X_0 est la sphère, X_1 est le tore, X_n est le tore à n trous.

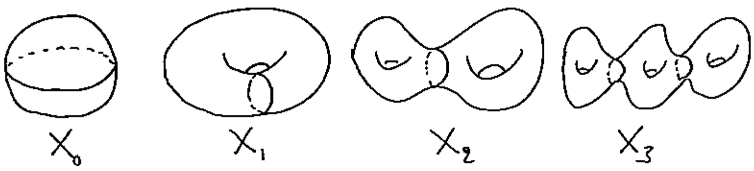

Figure: surfaces orientables

La liste des cas non orientables est donnée par les Y_n dont la caractéristique $\chi(Y_n) = 1 - n,\ n = 0, 1, 2, 3, \cdots$.

Y_0 est le plan projectif, Y_1 la bouteille de Klein, les autre sont obtenues en ajoutant des anses à Y_0 ou Y_1.

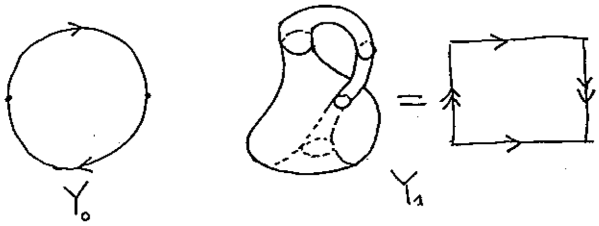

Figure: surfaces non orientables

On peut retrouver la caractéristique d'Euler à partir des *champs de vecteurs sur la surface.*

Un champ de vecteurs V sur X est la donnée pour chaque point m de X d'un vecteur tangent $V(m)$ à X en m dépendant continûment de m; en coordonnées locales, on a:

$$V(u,v) = a(u,v)\frac{\partial}{\partial u} + b(u,v)\frac{\partial}{\partial v}\ ,$$

cette écriture rejoint l'intuition qu'on a une notion de dérivée d'une fonction dans une direction tangente à X.

Si $V(m_0) = 0$, on dit que m_0 est un zéro de V.

A tout zéro isolé on associe un nombre entier appellé l'indice du zéro:

si on parcourt un petit cercle (topologique) autour de m_0 on regarde le nombre de tours que fait $V(m)$; ce nombre est indépendant des choix d'orientation; si le champ linéarisé en m_0 est non singulier; cet indice est donné par le signe du déterminant de la matrice.

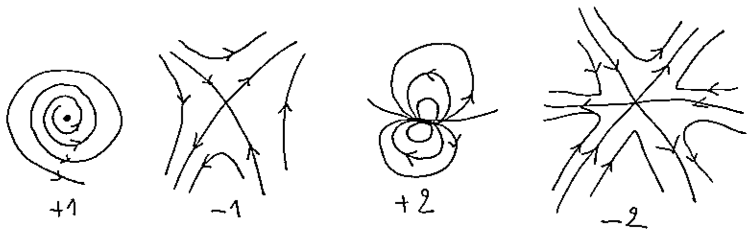

Figure: indices des zéros

Ces indices sont ont une propriété d'invariance topologique intéressante: si X est une surface compacte et V un champ de vecteurs n'ayant que des zéros isolés, la somme des indices de tous les zéros est égale à $\chi(X)$.

En particulier, on retrouve qu'il n'y a de champs de vecteurs sans zéros que sur le tore et la bouteille de Klein (cas compact).

Dans le cas d'un champ dans le plan, on peut définir un indice à l'infini et la somme totale vaut 2:

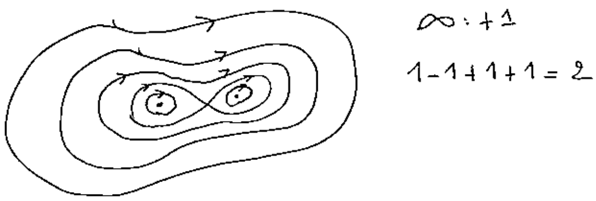

Figure: somme des indices $= 2$

Théorie de Morse:

on retrouve la caractéristique d'Euler d'une autre façon; si $f : X \to \mathbf{R}$ est une fonction différentiable sur X, on peut classer les points critiques (ceux où $df = 0$) supposés non dégénérés suivant leur indice qui vaut 0 pour un minimum local, 1 pour un col et 2 pour un maximum local. Alors la théorie de Morse donne l'égalité:

$$\chi(X) = n_0 - n_1 + n_2 \ ,$$

où n_i est le nombre de points critiques d'indice i.

Par exemple, il n'y a pas de fonctions sur le tore ayant seulement un ma ximum et un minimum; il y a forcément 2 points cols s'ils sont non dégénérés.

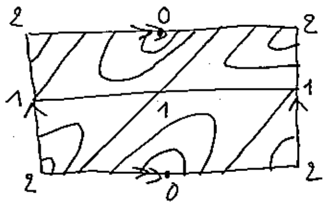

Figure: une fonction de Morse sur le tore

3. La géométrie des surfaces. —

Une structure géométrique est souvent donné comme une structure infinitésimale (*microscopique*) à partir de laquelle on aimerait connaitre des propriétés globales de la surface.

L'exemple de base est celui de métrique, mais on peut regarder des structures moins riches (aire: géométrie isochore, angles: géométrie conforme).

Une métrique riemannienne est la donnée sur chaque espace tangent d'une métrique euclidienne. Si on se donne des coordonnées locales (u,v) et la base correspondante $(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v})$ des espaces tangents, la métrique g s'écrit:

$$g = ds^2 = E(u,v)du^2 + 2F(u,v)dudv + G(u,v)dv^2 \ ,$$

où l'on doit penser du, dv comme les coordonnées microscopiques lorsqu'on fait un grossissement infini au point de coordonnées (u,v).

Bien sûr, cette forme quadratique doit être définie positive:

$$EG - F^2 > 0, E > 0 \ ,$$

en tout point (u,v) de V.

La condition de compatibilité par changement de cartes $u = f(u_1, v_1), v = h(u_1, v_1)$ se trouve en remplaçant u, v, du, dv par leurs expressions en fonctions de u_1, v_1, du_1, dv_1.

Exemples:

1) $X = \mathbf{R}^2$ avec la carte standard et $g = dx^2 + dy^2$; c'est la métrique *euclidienne*.

2) $X = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | y > 0\}$ avec

$$g = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} \ .$$

C'est la métrique de Poincaré (ou hyperbolique) du demi-plan.

3) $X =$ la sphère de $\mathbf{R}^3$ et

$$g = d\alpha^2 + \sin\alpha^2 d\theta^2 \ ,$$

dans les coordonnées sphériques. C'est la métrique induite par celle de $\mathbf{R}^3$.

4) Si X est une surface contenue dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$, l'espace tangent $T_m X$ s'identifie à un sous-espace de $\mathbf{R}^3$ et hérite donc d'une structure euclidienne; X a ainsi une métrique riemannienne dite intrinsèque. Si la surface est donnée localement par

$$(u,v) \to M(u,v) = (X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)) ,$$

on a:

$$E = \|\frac{\partial M}{\partial u}\|^2;\ F = < \frac{\partial M}{\partial u} | \frac{\partial M}{\partial v} >;\ G = \|\frac{\partial M}{\partial v}\|^2 .$$

Il est faux que toute surface riemannienne soit réalisable ainsi; par exemple le demi-plan hyperbolique ne se réalise pas globalement ainsi.

Lorsque X est munie d'une métrique riemannienne, on peut calculer les longueurs des courbes tracées dans X.

Si $\gamma : [a,b] \to X$ est une courbe lisse supposée contenue dans un domaine de coordonnées locales, on définit

$$l(\gamma) = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{E(\gamma(t))(\frac{du}{dt})^2 + \cdots} dt .$$

On a alors une notion de distance globale (distance intrinsèque): la distance $d(p,q)$ est le inf des longueurs des courbes qui joignent p à q, Cette distance fait de X un espace métrique. C'est un invariant macroscopique associé à la métrique riemannienne qui est a priori définie infinitésimalement.

Les géodésiques sont les courbes *extrémales*, ie celles qui satisfont les équations d'Euler-Lagrange. Il est préférable de chercher les géodésiques paramétrées à vitesse constante qui sont les extrémales de l'énergie $E(\gamma) = \int_a^b (E(\gamma(t))\frac{du}{dt}^2 + \cdots)dt$.

On aussi une notion d'aire: l'élément d'aire infinitésimale est donné par

$$|dA| = \sqrt{EG - F^2}|dudv| ,$$

et d'angle: l'angle de 2 courbes qui se coupent en p est l'angle de leurs vecteurs vitesses calculé pour la métrique euclidienne g_p de l'espace tangent en p à X.

Exemples (mêmes exemples que plus haut):

1) La distance est alors la distance euclidienne du plan et l'aire l'aire euclidienne (mesure de Lebesgue); les géodésiques sont les droites. La géométrie euclidienne est un cas particulier de la géométrie riemannienne!!

2) On trouve la distance hyperbolique: les géodésiques sont les demi-cercles centrés sur l'axe $y = 0$ et les demi-droites $x = cte$. Si p, q sont deux points qui déterminent un tel demi-cercle qui coupe l'axe des $y = 0$ en α et ω, la distance est la valeur absolue du log du birapport $[p,q,\alpha,\omega]$. On voit que cette géométrie satisfait tous les axiomes d'Euclide, sauf le postulat des parallèles: étant donné un point p et une géodésique γ, il passe par p une infinité de géodésiques ne coupant pas γ.

3) On trouve la distance intrinsèque sur la sphère; les géodésiques sont les grands cercles et la distance est la longueur du plus petit arc du grand cercle qui passe par p et q.

4) La distance est ici la distance intrinsèque: inf des longueurs euclidiennes des courbes tracées sur X. Les géodésiques paramétrées à vitesse constante sont caractérisées par le fait que l'accélération est normale à X.

4. La courbure de Gauss-Riemann. —

Il s'agit de mesurer la déformation de la métrique riemannienne par rapport à la métrique euclidienne. La façon la plus simple de faire est de regarder le développement limité de l'aire d'une boule $B(p,\varepsilon)$ de centre p et de rayon ε lorsque ε tend vers 0:

On a un développement de la forme:

$$A(B(p,\varepsilon)) = \pi\varepsilon^2 - K(p)\frac{\pi}{12}\varepsilon^4 + O(\varepsilon^5) .$$

$K(p)$ s'appelle courbure de Gauss en p. Cette formule ne donne pas un calcul aisé.

Le premier à avoir donné la formule est Gauss ([Do] p 36-37): on pose $\Delta = EG - F^2$ et on a

$$\begin{aligned} 4\Delta^2 K(p) = {} & E(E_vG_v - 2F_uG_v + G_u^2) + F(E_uG_v - E_vG_u - 2E_vF_v + 4E_uF_v - 2F_uG_u) \\ & + G(E_uG_u - 2E_uF_v + E_v^2) - 2\Delta(E_{v,v} - 2F_{u,v} + G_{u,u}) , \end{aligned}$$

où les indices désignent des dérivations partielles.

Une autre caractérisation intéressante de la courbure de Gauss est la relation avec les triangles géodésiques: si (a,b,c) sont les 3 sommets d'un triangle géodésique T (homéomorphe à un triangle euclidien), on a:

$$\int_T K(p)|dA| = \pi - (\alpha + \beta + \gamma) ,$$

où α, β, γ sont les 3 angles de T.

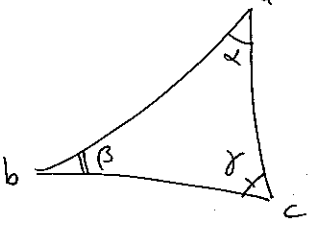

Figure: Gauss-Bonnet

3) On trouve la distance intrinsèque sur la sphère; les géodésiques sont les grands cercles et la distance est la longueur du plus petit arc du grand cercle qui passe par p et q.

4) La distance est ici la distance intrinsèque: inf des longueurs euclidiennes des courbes tracées sur X. Les géodésiques paramétrées à vitesse constante sont caractérisées par le fait que l'accélération est normale à X.

4. La courbure de Gauss-Riemann. —

Il s'agit de mesurer la déformation de la métrique riemannienne par rapport à la métrique euclidienne. La façon la plus simple de faire est de regarder le développement limité de l'aire d'une boule $B(p,\varepsilon)$ de centre p et de rayon ε lorsque ε tend vers 0:

On a un développement de la forme:

$$A(B(p,\varepsilon)) = \pi\varepsilon^2 - K(p)\frac{\pi}{12}\varepsilon^4 + O(\varepsilon^5) .$$

$K(p)$ s'appelle courbure de Gauss en p. Cette formule ne donne pas un calcul aisé.

Le premier à avoir donné la formule est Gauss ([Do] p 36-37): on pose $\Delta = EG - F^2$ et on a

$$4\Delta^2 K(p) = E(E_vG_v - 2F_uG_v + G_u^2) + F(E_uG_v - E_vG_u - 2E_vF_v + 4E_uF_v - 2F_uG_u)$$
$$+G(E_uG_u - 2E_uF_v + E_v^2) - 2\Delta(E_{v,v} - 2F_{u,v} + G_{u,u}) ,$$

où les indices désignent des dérivations partielles.

Une autre caractérisation intéressante de la courbure de Gauss est la relation avec les triangles géodésiques: si (a,b,c) sont les 3 sommets d'un triangle géodésique T (homéomorphe à un triangle euclidien), on a:

$$\int_T K(p)|dA| = \pi - (\alpha+\beta+\gamma) ,$$

où α, β, γ sont les 3 angles de T.

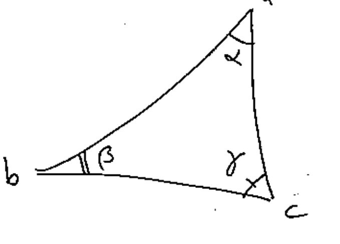

Figure: Gauss-Bonnet

Exemples:

1) La courbure est n
euclidien vaut π.

2) La courbure vaut
par π moins la somme des

3) La courbure vaut
angles diminuée de π.

4) On verra plus b
deuxième forme fondamen

Riemann a générali
tenseur d'ordre 4 assez con

La caractéristique d'
orientable, on a:

Cette formule est co
géodésique et de la définit

5. La représentat

Une carte d'une sur

Cela est équivalent
de la métrique riemannien

Par exemple, l'exp
la sphère, c'est le cas da
sphériques.

C'est un résultat cl
toujours.

Si on se donne un
préservent les angles eucli
alors d'atlas conforme et

Le miracle est qu'
variable complexe: un hor
à **C** qui préserve les angl

holomorphe s'il pré

antiholomorphe sin

Exemples:

1) La courbure est nulle et on retrouve ainsi que la somme des angles d'un triangle euclidien vaut π.

2) La courbure vaut -1 et on obtient que l'aire d'un triangle hyperbolique est donnée par π moins la somme des angles (qui est donc $< \pi$).

3) La courbure vaut $+1$ et l'aire d'un triangle sphérique vaut donc la somme des angles diminuée de π.

4) On verra plus bas comment la courbure de Gauss est calculée à partir de la deuxième forme fondamentale (theorema egregium).

Riemann a généralisé la courbure de Gauss en dimension n: on obtient alors un tenseur d'ordre 4 assez compliqué!!

La caractéristique d'Euler se calcule par intégrale de la courbure: si X est compacte orientable, on a:

$$\int_X K dA = 2\pi\chi(X) .$$

Cette formule est conséquence de la formule de Gauss-Bonnet pour un petit triangle géodésique et de la définition de $\chi(X)$ à partir d'une triangulation de X.

5. La représentation conforme. —

Une carte d'une surface riemannienne est dite *isotherme* si la métrique s'écrit:

$$ds^2 = e^{2\phi(u,v)}(du^2 + dv^2) .$$

Cela est équivalent au fait que les angles euclidiens vus dans les cartes sont les angles de la métrique riemannienne.

Par exemple, l'expression de la métrique hyperbolique a cette propriété. Pour la sphère, c'est le cas dans les projections stéréographiques, mais pas en coordonnées sphériques.

C'est un résultat classique, mais non trivial que de telles coordonnées locales existent toujours.

Si on se donne un atlas de coordonnées isothermes, les changments de coordonnées préservent les angles euclidiens: on dit qu'ils sont conformes. Oubliant la métrique, on parle alors d'atlas conforme et de structure conforme sur une surface.

Le miracle est qu'on rejoint ici la belle théorie des fonctions holomorphes d'une variable complexe: un homéorphisme $F : U \to V$ où U, V sont deux ouverts de $\mathbf{R}^2$ identifié à $\mathbf{C}$ qui préserve les angles est

holomorphe s'il préserve l'orientation;

antiholomorphe sinon.

En particulier, dans le 1er cas, il est développable en série entière localement:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_o)^n \ .$$

Les structures conformes (orientables) jouent un grand rôle en physique (invariance d'échelle, transition de phase).

Les structures conformes dépendent en général d'un nombre fini de paramètres:

par exemple, on a le théorème de représentation conforme de Riemann: pour tout ouvert U simplement connexe de $\mathbf{C}$, il existe un homéomorphisme conforme du disque unité sur U.

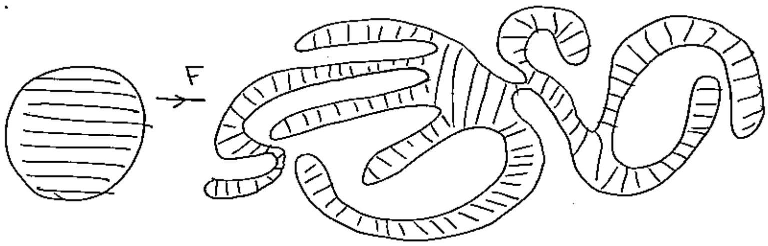

Figure: représentation conforme

Pour tout ouvert homéomorphe à une couronne D, il existe un $R > 1$ et un homéo. conforme de la couronne $1 < |z| < R$ sur U. R est relié à la capacité du condensateur formé des 2 courbes γ_1, γ_2 qui bordent l'anneau D:

$$cap(D) = \inf \int_D |df|^2 \ ,$$

où le inf porte sur les f qui valent 1 sur γ_1 et 0 sur γ_2. On a alors:

$$2\pi \ln R = cap(D) \ .$$

Pour toute métrique riemannienne sur S^2 il existe un homéo. conforme de la métrique standard sur celle-là.

Une riche classe de structures conformes est donnée par les surfaces de Riemann; par exemple, si $P(z)$ est un polynôme sans zéros multiples la surface de Riemann de $\sqrt{P(z)}$ est donnée comme l'ensemble S des $(z, w) \in \mathbf{C}^2$ tels que $w^2 = P(z)$. La projection de S sur $\mathbf{C}$ qui à (z, w) associe z est un revêtement ramifié à 2 feuillets de $\mathbf{C}$ et la fonction w est bien définie sur S: c'est la racine carrée de P qui devient non ambigue.

La structure conforme est donnée par le fait que $w^2 - P(z) = 0$ définit une sous-variété holomorphe de $\mathbf{C}^2$: z est une coordonnée locale en dehors des points de ramification et w près de ceux-ci.

6. Surfaces plongées et Theorema Egregium de Gauss. —

La seconde forme fondamentale d'une surface plongée dans l'espace euclidien de dimension 3 mesure la déviation de la surface par rapport à son plan tangent.

Si $T_mX \subset \mathbf{R}^3$ est ce plan tangent, on peut écrire près de m la surface come le graphe d'une application de T_mX dans l'espace normal N_mX (qui est une droite). Si on oriente la surface, la normale est canoniquement identifiée à $\mathbf{R}$ et la surface est donc donnée comme graphe d'une fonction numérique F_m de T_mX dans $\mathbf{R}$; cette fonction F_m a des dérivées partielles nulles en m et donc sa dérivée seconde en m est une forme quadratique II_m bien définie sur T_mX.

Si on a $z = f(x,y)$, avec $m = (0,0,0)$ $(f(0,0) = 0)$ et $f'(0,0) = 0$, on a ainsi

$$II_m = rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2 \ ,$$

où r, s, t sont les 3 dérivées secondes de f en $(0,0)$.

Bien sûr, comme on a une forme quadratique sur un espace tangent, il y a 2 nombres intrinsèques: la trace et le déterminant.

On pose:

$$H = Tr(II) = r + t \ ,$$

et

$$\tilde{K} = det(II) = rt - s^2 \ .$$

H s'appelle la *courbure moyenne* en m; $\tilde{K}$ la courbure totale.

C'est le résultat remarquable (theorema egregium) de Gauss que $\tilde{K} = K$ (où K est calculée pour la métrique induite) : ce nombre ne dépend que de la géométrie intrinsèque de la surface.

En particulier si une surface est localement isométrique au plan euclidien sa courbure totale est nulle (la réciproque est vraie). Une telle surface est dite développable. Outre les cônes et cylindres, un exemple plus général est donné par l'ensemble des demi-tangentes à une courbe gauche orinentée. Dans ce cas, on peut montrer directement que la surface s'applique de façon isométrique sur une région du plan limitée par une courbe plane de même courbure que la courbe gauche.

La courbure moyenne intervient dans la variation infinitésimale de l'aire (voir surfaces minimas, §7).

7. Surfaces minimas et bulles de savon. —

Variation de l'aire: soit X_0 une surface plongée dans $\mathbf{R}^3$ et X_ε une variation à un paramètre de X_0 telle que X_ε soit fixée coïncidant avec X_0 hors d'un compact de X_0.

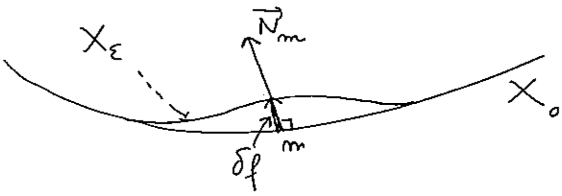

Figure: variations de l'aire

On peut alors calculer la dérivée de la variation de l'aire à l'intérieur de ce compact, si la variation normale infintésimale est donnée par

$$\delta X_\varepsilon = \delta f(m)\vec{N}(m) ,$$

on a:

$$\delta A = -2\int_{X_0} H(m)\delta f dA .$$

En particulier, on appellera surface minimale (ou mieux extrémale) toute surface telle que ces variations soient nulles, c'est-à-dire

$$H = 0 .$$

Si X_o est le bord d'un domaine de $\mathbf{R}^3$ et qu'on regarde uniquement les variations à volume intérieur fixé (problème isopérimétrique), on obtient la condition de constance de H par la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Une famille de surfaces minimas est constituée des hélicoïdes qui ont une équation $z = a\theta$ en coordonnées cylindriques. Par deux droites ne se coupant pas, il passe une infinité d'hélicoïdes dont seuls 1 ou 2 sont réellement minimas par rapport aux surfaces s'appuyant sur ces 2 droites.

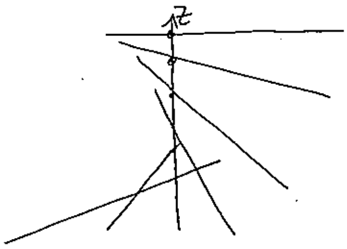

Figure: hélicoïdes

Une autre famille de sur
surfaces de révolution de méridi

Si on fixe 2 cercles de même ax
en passe 2 seul celui qui est plu

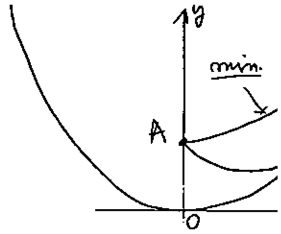

Figure: caténoïdes

Lorsqu'on cherche des en
de plusieurs bulles de savon qui
difficile à formaliser mathémati
auterus ont donné une justifica
Plateau: 2 type de singularités

1) 3 nappes de surfaces q
angles de $2\pi/3$.

2) 6 nappes qui ont un p
centre d'un tétraèdre régulier a

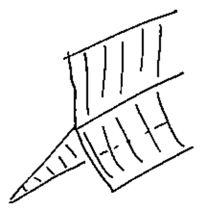

Figure: singularités des b

8. Un aperçu sur des

Le théorème de classific
dimension $\geq$ 3: on ne sait mê
dimension 3 est homéo. à S^3 (c

Une autre famille de surfaces minimas est constitué des *caténoïdes.* Ce sont des surfaces de révolution de méridienne

$$y = a \cosh \frac{x-b}{a} \, .$$

Si on fixe 2 cercles de même axe, il passe par ces 2 cercles 0, 1 ou 2 caténoïdes. Lorsqu'il en passe 2 seul celui qui est plus tendu est minimal.

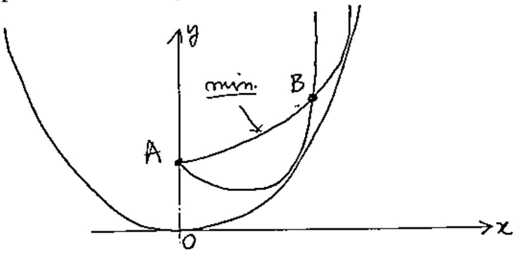

Figure: caténoïdes

Lorsqu'on cherche des ensemble d'aire minimale plus généraux que de surfaces (cas de plusieurs bulles de savon qui ont des surfaces en coommun), on tombe sur un problème difficile à formaliser mathématiquement. C'est cependant ce qui est fait dans [A-T]. Ces auteurs ont donné une justification mathématique aux lois expérimentales dégagées par Plateau: 2 type de singularités possibles

1) 3 nappes de surfaces qui ont une ligne singulière où elles se rencontrent avec des angles de $2\pi/3$.

2) 6 nappes qui ont un point commun avec un cône tangent obtenu en joignant le centre d'un tétraèdre régulier aux points des 6 arêtes.

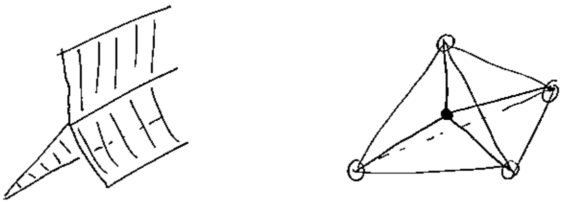

Figure: singularités des bulles de savon

8. Un aperçu sur des développements récents. —

Le théorème de classification topologique des surfaces ne se laisse pas étendre en dimension ≥ 3: on ne sait même pas si toute variété compacte simplement connexe de dimension 3 est homéo. à S^3 (conjecture de Poincaré).

Par contre, on connait l'analogue de cette conjecture en dimension ≥ 4: Smale pour $n \geq 5$ dans les années 60, Freedmann en dimension 4 (1985').

Les développements les plus spectaculaires ont eu lieu récemment en dimension 3 avec les nouveaux invariants *quantiques* des noeuds (Jones, 1985') et des variétés de dimension 3 (Witten, 1990').

La géométrie non commutative est une autre branche récente et importante: on sait depuis Gelfand qu'il y a un dictionnaire entre les espaces compacts et les C^*–algèbres commutatives; on peut dans le cas des variétés définir algébriquement les objets tels que les champs de vecteurs, les formes différentielles, etc..

Le programme de Connes est de faire la même chose dans le cadre non commutatif... qui est le cadre naturel des théories quantiques (Heisenberg).

9. Références. —

[A-T] F. ALMGREN, J. TAYLOR. — *The geometry of soap films and soap bubbles*, Scientific American, **7** (1976), 82-93.

[B-G] M. BERGER, B. GOSTIAUX. — *Géométrie différentielle, variétés, courbes et surfaces*, PUF, Paris, 1987.

[Co] A. CONNES. — *Géométrie non commutative*, Interéditions, Paris, 1990.

[Do] P. DOMBROWSKI. — *150 years after Gauss'disquisitiones generales circa superficies curvas*, Astérisque (SMF), **62** (1979), 1-153.

[Eu] EUCLIDE. — *Les éléments, 2 vol. (commentés par b. Vitrac)*, PUF Paris , 1994.

[Ho] H. HOPF. — *Differential geometry in the large*, Lecture Notes in Math 1000 (Springer), 1983.

[Pl] J. PLATEAU. — *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*, Gauthier-Villars, Paris, 1873.

[Ri] B. RIEMANN. — *Oeuvres mathématiques. Traduites par l. Laugel*, Albert Blanchard, Paris, 1968.

Institut Fourier
BP 74
F-38402-St MARTIN D'HÈRES CEDEX
ycolver@fourier.ujf-grenoble.fr