THÉORIE SPECTRALE DES SURFACES

DE RIEMANN D'AIRE INFINIE

par Yves COLIN de VERDIÈRE

Soit $H = \{ z = x+iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ le demi-plan de Poincaré muni de la métrique hyperbolique $\dfrac{dx^2+dy^2}{y^2}$ et Γ un sous groupe discret du groupe des isométries de H. Si z_o, z_1 sont deux points de H, on introduit la fonction de dénombrement orbital $N_\Gamma(z_o,z_1;r) = \text{Cardinal}\{\gamma \in \Gamma \mid d(z_o,z_1) \leq r\}$ où d est la distance hyperbolique.

Remarquons que, si Γ opère sans points fixes, H/Γ est lisse et pour chaque couple $m_o = \Gamma.z_o$, $m_1 = \Gamma.z_1$ de H/Γ, on a une bijection naturelle entre Γ et les géodésiques qui joignent m_o à m_1 dans H/Γ; N_Γ dénombre ainsi les géodésiques de longueurs $\leq r$ qui joignent m_o à m_1.

Le problème du comportement asymptotique de N_Γ lorsque $r \to \infty$ a été résolu par H. Huber (H) dans le cas où H/Γ est compacte. La méthode classique, utilisée pour l'analogue euclidien de ce problème, ne marche pas à cause de la croissance exponentielle de l'aire des disques de rayon r dans le $\frac{1}{2}$ plan de Poincaré. On peut ainsi seulement obtenir une estimation du type $N_\Gamma = O(e^r)$.

Pour obtenir le comportement asymptotique plus précis de la fonction N_Γ , on doit faire appel à la théorie spectrale de H/Γ. Dans cet exposé, nous obtenons un résultat, généralisant celui d'Huber, valable pour tout groupe Γ de type fini.

On introduit une série de Poincaré $P_\Gamma(z_o,z_1; s) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \exp(-sd(z_o,\gamma.z_1))$ transformée de Laplace de dN_Γ. Il est facile (§ 1) de relier P_Γ à la résolvante du laplacien sur H/Γ , et cela permet par des arguments de théorie spectrale et d'analyse fonctionnelle, d'obtenir le prolongement méromorphe de la somme P_Γ , convergente pour $\mathrm{Re}(s) > \delta_\Gamma \geqslant 0$ au demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 0$ (§ 2 et 3). L'existence de ce prolongement méromorphe s'obtient en adaptant la méthode utilisée par Faddeev [F, L2] dans le cas des surfaces d'aire finie.

Par application du théorème taubérien d'Ikehara, on obtient un résultat du type $N_\Gamma \sim C\, e^{\delta_\Gamma r}$, généralisant celui d'Huber.

Dans le § 5 , nous étudions la singularité de la série de Poincaré en $s=\delta_\Gamma=1$, pour une classe d'exemple où H/Γ admet une action isométrique de $\mathbb{Z}^d$ avec un quotient compact.

Enfin, dans le § 6 , nous dressons une liste de problèmes. (*)

1. L'EXPOSANT δ_Γ

L'exposant δ_Γ, abscisse de convergence absolue de la série de Poincaré P_Γ , qui mesure la grosseur de Γ, a été étudié notamment par Beardon [BN 1,2] , Patterson [P 4,5] et Sullivan [S 1,2,3,4] .

Voici quelques résultats :

(*) Durant le colloque, A. Unterberger m'a indiqué un article récent de Lax et Phillips : The asymptotic distribution of lattice points in Euclidean and Non-Euclidean Spaces (Journal of Functional Analysis 46, 280-350 (1982)), qui traite le même problème pour un groupe Γ avec un domaine fondamental qui est un polyèdre géodésique fini. Ils utilisent l'équation des ondes et obtiennent le comportement asymptotique avec majoration du reste lorsque $\delta_\Gamma \gg \frac{1}{2}(\dim(H/\Gamma) - 1)$.

a) $0 \leq \delta_\Gamma \leq 1$

b) Si Γ de type fini, $\delta_\Gamma = 1$ si et seulement si $\mathrm{aire}(H/\Gamma) < +\infty$.

c) Si Γ est de type fini, $\delta_\Gamma = 0$ si et seulement si Γ est élémentaire au sens qu'il contient, outre des éléments elliptiques, uniquement un groupe cyclique hyperbolique.

d) Si H/Γ a une pointe et que Γ n'est pas à un groupe fini près un groupe cyclique parabolique, $\delta_\Gamma > \frac{1}{2}$.

Outre les relations avec la théorie spectrale dont nous parlons plus bas, Patterson [P2] et Sullivan [S1], ont pu relier δ_Γ à la dimension de Haussdorff de l'ensemble limite $\mathscr{L}_\Gamma \subset \mathbb{R} \cup \infty$ de Γ ($\mathscr{L}_\Gamma$ est l'ensemble des points d'accumulation d'une orbite quelconque de Γ) : δ_Γ est, lorsque Γ est de type fini, égal à cette dimension de Haussdorff.

Mais ce qui nous intéresse le plus ici est la relation avec la théorie spectrale de H/Γ. Si $L^2(H/\Gamma)$ est l'espace des fonctions Γ-automorphes de carré intégrable sur un domaine fondamental et $\Delta = -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ le laplacien hyperbolique opérant sur $C_o^\infty(H/\Gamma)$, cet opérateur est essentiellement autoadjoint, on note Δ_Γ son extension autoadjointe.

Pour $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$ et $s(1-s) \notin$ spectre (Δ_Γ), désignons par $R_\Gamma(z_o, z_1, s)$ le noyau de la résolvante $(\Delta_\Gamma - s(1-s))^{-1}$, on a alors le :

<u>Théorème</u> : $P_\Gamma(z_o, z_1; s) - 2^{2(1-s)} \cdot \pi \frac{\Gamma(2s)}{(\Gamma(s))^2} \tilde{R}_\Gamma(z_o, z_1, s)$ <u>se prolonge en une fonction holomorphe sur</u> $\mathrm{Re}(s) > 0$. <u>Ici</u> $\tilde{R}_\Gamma = R_\Gamma + \frac{1}{2\pi} \mathrm{Log}\, d(z_o, z_1)$ <u>désigne la résolvante d'où l'on a ôté la singularité logarithmique.</u>

<u>Preuve</u> : Le noyau R_{Id} de la résolvante du laplacien sur H est donné (E,L2,LV) en terme de fonctions hypergéométriques par :

$$R_{Id}(z_o, z_1; s) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\Gamma(s)^2}{\Gamma(2s)} \sigma^{-s} F(s, s, 2s; \sigma^{-1}) \text{ où } \sigma = \frac{1}{2}(\mathrm{ch}\, d(z_o, z_1) - 1) .$$

La fonction hypergéométrique admet le développement limité quand $u \quad 0^+$:

$$F(\alpha,\beta,\gamma;u) = 1 + O(u) \ .$$

Donc, pour $\mathrm{Re}(s) >> 0$, on a :

$$R_\Gamma(z_o,z_1;s) = C(s) . \sum_{\gamma\in\Gamma} \left[e^{-sd(z_o,\gamma z_1)} + O(e^{-(s+1)d(z_o,\gamma z_1)}) \right] .$$

On en déduit le résultat annoncé car la série de Poincaré converge toujours pour $\mathrm{Re}(s) > 1$.

En particulier, on en déduit le :

<u>Théorème</u> : <u>Si</u> $\delta_\Gamma > \frac{1}{2}$, $\inf(\text{spectre } (\Delta_\Gamma)) = \delta_\Gamma(1-\delta_\Gamma)$, <u>alors que si</u> $\delta_\Gamma \leqslant \frac{1}{2}$, $\inf(\text{spectre } (\Delta_\Gamma)) = \frac{1}{4}$.

<u>Preuve</u> : La série de Poincaré qui est une série de Dirichlet à termes positifs admet nécessairement une singularité en $s = \delta_\Gamma$. Donc si $\delta_\Gamma > \frac{1}{2}$, la résolvante est holomorphe sur $\mathrm{Re}(s) > \delta_\Gamma$ et a une singularité en $s = \delta_\Gamma$: $\delta_\Gamma(1-\delta_\Gamma)$ est donc bien la borne inférieure du spectre. Si, au contraire $\delta_\Gamma \leqslant \frac{1}{2}$, la résolvante n'admet pas de singularité pour $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$, donc le spectre est minoré par $\frac{1}{4}$; il est facile de voir que le spectre commence effectivement à $\frac{1}{4}$. Bien remarquer que, lorsque $\delta_\Gamma < \frac{1}{2}$, la série $\sum_{\gamma\in\Gamma} R_{Id}(z_o,\gamma z_1;s)$ ne définit la résolvante de Δ_Γ que pour $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$. Pour $\mathrm{Re}(s) \leqslant \frac{1}{2}$, ce n'est pas le noyau d'un opérateur continu sur $L^2(H/\Gamma)$ (même pour $\Gamma = \{Id\}$).

<u>Remarque 1</u> : Le résultat précédent montre aussi que si $\delta_\Gamma < \frac{1}{2}$, Δ_Γ ne peut pas avoir de valeurs propres, ni de spectre singulier : en effet le noyau de la résolvante admet alors un prolongement <u>holomorphe</u> sur $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$. C'est en particulier le cas pour les groupes élémentaires.

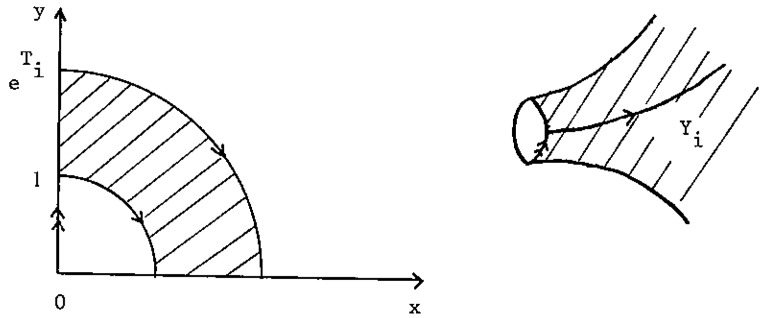
<u>Remarque 2</u> : Lorsque $\delta_\Gamma < 1$, la série de Poincaré converge en $s = 1$. Lorsque $\delta_\Gamma = 1$, la divergence de la série de Poincaré en $s = 1$, équivaut à la non existence

d'une fonction de Green sur H/Γ , qui est elle-même équivalente à l'ergodicité du flot géodésique sur H/Γ [S 2,3,4] . Voir § 5 pour des exemples où $\delta_\Gamma = 1$ et la série de Poincaré converge en $s = 1$.

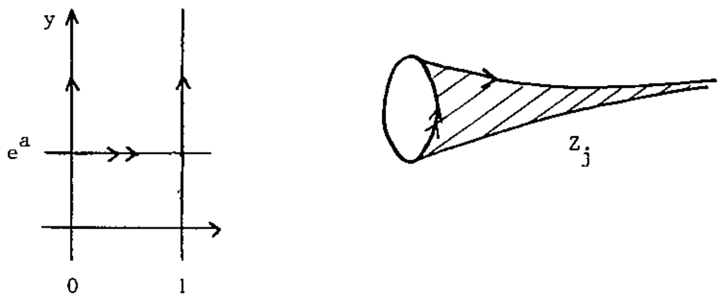
2. SPECTRE DE H/Γ POUR Γ DE TYPE FINI.

Il est classique (GG) (mais non vrai en dimension $\geqslant 3$) que Γ de type fini équivaut à Γ admet un polygone fondamental de Dirichlet avec un nombre fini de côtés : on dit alors que Γ est "géométriquement fini" ; en dimension $\geqslant 3$, c'est surtout cette hypothèse qui remplace Γ de type fini. Plus précisément, on peut montrer [P 2] que H/Γ a la structure suivante :

$H/\Gamma = X_o \bigcup_{i=1}^{k} Y_i \bigcup_{j=1}^{\ell} Z_j$ où X_o est compacte ; Y_i est isométrique à un demi-hyperboloïde $\mathbb{R}/T_i\mathbb{Z} \times [0, +\infty[$ avec la métrique $dr^2 + ch^2 r \cdot d\theta^2$;



Z_j est un cusp $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [a, +\infty[$ avec la métrique $dr^2 + e^{-2r} d\theta^2$.



La théorie de H/Γ est bien connue lorsque aire$(H/\Gamma) < +\infty$ (i.e. $k=0$); rappelons qu'alors Δ_Γ admet un nombre fini ou infini de valeurs propres $\lambda_o = 0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \dots$ ne s'accumulent éventuellement qu'en $+\infty$ et un spectre continu $[\frac{1}{4}, +\infty[$ de multiplicité finie ℓ. (Voir [CV] et les références dans cet article).

Dans le cas $k \geqslant 1$, on a le :

Théorème : Le spectre de H/Γ se compose, lorsque Γ est de type fini et $k \geqslant 1$ (i.e. aire$(H/\Gamma) = +\infty$) d'un spectre absolument continu de multiplicité infinie $[\frac{1}{4}, +\infty[$ et, si $\delta_\Gamma > \frac{1}{2}$, d'un nombre fini de valeurs propres $\lambda_1 = \delta_\Gamma(1-\delta_\Gamma) < \lambda_2 \leqslant \dots \leqslant \lambda_N < \frac{1}{4}$ (si $\delta_\Gamma \leqslant \frac{1}{2}$, il n'y a aucune valeur propre).

Preuve : Si X est une variété riemannienne, on note $H^1(X)$ l'espace de Sobolev des fonctions L^2 dont le gradient est de carré intégrable. On a l'inclusion naturelle évidente

$$H^1(H/\Gamma) \subset H^1(X_o) \bigoplus_{i=1}^{k} H^1(Y_i) \bigoplus_{j=1}^{\ell} H^1(Z_j).$$

Soit q_o(resp. q_i, q_j) les formes quadratiques fermées de domaine $H^1(X_o)$ (resp. $H^1(Y_i)$, $H^1(Z_j)$) définies par $q_o(f) = \int_{X_o} \|df\|^2$ (resp. $q_1(f) = \int_{X_i} \|df\|^2$, $q_j(f) = \int_{Z_j} \|df\|^2$) et $Q = q_o \bigoplus_i q_i \bigoplus_j q_j$; la restriction de Q à $H^1(H/\Gamma)$ est la forme quadratique $q(f) = \int_{H/\Gamma} \|df\|^2$. Le principe du minimax peut donc s'appliquer : le spectre de q_o (resp. q_i, q_j) est le spectre de Δ sur X_o(resp. Y_i, Z_j) avec les conditions aux limites de Neumann ; on en déduit aisément que le spectre de Q est formé de N_1 valeurs propres $< \frac{1}{4}$ et de l'intervalle $[\frac{1}{4}, +\infty[$, avec $N_1 = \ell +$ (Nombre de valeurs propres de $q_o < \frac{1}{4}$). Le minimax permet de conclure que spectre $(\Delta_\Gamma) \cap [0, \frac{1}{4}[$ est constitué uniquement d'un nombre $\leqslant N_1$ de valeurs propres qui sont $\geqslant$ à celles de Q.

Remarque : On aurait des majorations de ces valeurs propres en considérant le problème de Dirichlet sur X_o et l'inclusion $H^1_o(X_o) \subset H^1(H/\Gamma)$.

L'étude précise du spectre continu résultera du paragraphe suivant et des résultats généraux sur la théorie de la diffusion [R - S III, § XI.3 et XIII.6]. L'absence de valeurs propres $\geqslant \frac{1}{4}$ a déjà été remarquée, voir par ex. [P 1].

On déduit aisément du théorème précédent, que, même si $\delta_\Gamma > \frac{1}{2}$, R_Γ (et donc P_Γ) est méromorphe pour $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$ avec des pôles simples aux s_i tels que $s_i(1-s_i) = \lambda_i$ et comme résidus les noyaux de projecteurs sur les espaces propres E_{λ_i}.

3. PROLONGEMENT MÉROMORPHE DE LA RÉSOLVANTE

Nous avons vu au paragraphe précédent que, si Γ est de type fini, la résolvante R_Γ est méromorphe (à valeurs dans $\mathcal{L}(L^2(H/\Gamma), L^2(H/\Gamma))$ pour $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$. Nous allons maintenant prouver le

Théorème : Si Γ est de type fini, le noyau $R_\Gamma(z,z';s)$ (et donc la série de Poincaré P_Γ) admet un prolongement méromorphe à la région $\mathrm{Re}(s) > 0$ avec un pôle simple en $s = \delta_\Gamma$.

Remarque : Il y a, à ma connaissance, au moins deux méthodes générales dans la théorie de la diffusion pour prouver des résultats de prolongement méromorphe de la résolvante.

La méthode de Lax-Philipps (L-P) qui vaut par exemple pour l'opérateur de Schrödinger dans $\mathbb{R}^3$ avec un potentiel à support compact ou pour les surfaces de Riemann d'aire finie ; cette méthode, lorsqu'elle donne des prolongements méromorphes permet de prolonger à $\mathbb{C}$ entier, elle ne peut donc s'appliquer lorsque un tel prolongement n'existe pas !

La méthode, dite de l'espace auxiliaire (R-S III, p.112) qui vaut pour l'opérateur de Schrödinger dans $\mathbb{R}^n$ avec un potentiel à décroissance exponentielle à l'∞ et qui donne seulement un prolongement méromorphe dans une bande au delà du spectre : c'est elle qui a été utilisée par Faddeev [F,L 2] dans le cas des surfaces de Riemann d'aire finie et que nous allons utiliser ici.

Comme Faddeev a traité le cas des cusps qui créent en fait le plus de difficultés, nous nous bornerons ici au cas où $H/\Gamma = X = X_o \cup Y_1$ $(k=1,\ \ell=0)$.

Nous désignerons par R(resp. R_Γ; R_∞) les noyaux des résolvantes sur H(resp. sur H/Γ ; Y_1 avec conditions limites de Dirichlet). Pour $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$ et $s(1-s) \notin$ spectre (Δ_Γ), on a l'équation résolvante :

(1) $$R_\Gamma(s) = R_\Gamma(s_o) + \omega(s)\, R_\Gamma(s_o)\, R_\Gamma(s) \qquad (s_o >> 0)$$

avec $\omega(s) = s(1-s) - s_o(1-s_o)$. On prolonge $R_\infty(z_o,z_1;s)$ par 0 si z_o ou $z_1 \notin Y_1$ et on pose : $R_\Gamma(s_o) = R_\infty(s_o) + V$; on peut alors réécrire (1) sous la forme :

$$(\mathrm{Id} - \omega(s)\, R_\infty(s_o)) \circ R_\Gamma(s) = R_\Gamma(s_o) + \omega(s)\, V \circ R_\Gamma(s).$$

L'équation résolvante de R_∞ peut s'écrire :

$$(\mathrm{Id} + \omega(s)\, R_\infty(s))(\mathrm{Id} - \omega(s)\, R_\infty(s_o)) = \mathrm{Id}.$$

D'où l'on tire

(2) $$(\mathrm{Id} - H(s)) \circ R_\Gamma(s) = W(s) \quad \text{avec}$$

$$\begin{cases} H(s) = \omega(s)(\mathrm{Id} + \omega(s)\, R\ \ (s)) \circ V \\ W(s) = (\mathrm{Id} + \omega(s)\, R_\infty(s)) \circ R_\Gamma(s_o) . \end{cases}$$

Si on fixe $z_o \in H/\Gamma$ et que l'on pose $r_\Gamma(s) = R_\Gamma(.,z_o;s)$ et $w(s) = W(.,z_o;s)$, cette équation s'écrit :

(3) $$(\mathrm{Id} - H(s)\, r_\Gamma(s) = w(s).$$

Cette équation dans $L^2(H/\Gamma)$ détermine $r_\Gamma(s)$ pour $s >> 0$, car elle équivaut à (1).

On introduit alors un <u>espace de Banach</u> $\mathcal{B}$, l' "espace auxiliaire", tel que : (i) $H(s)$ est pour $\mathrm{Re}(s) > 0$ une famille holomorphe d'opérateurs compacts de $\mathcal{B}$, avec $H(s_o) = 0$.

(ii) $w(s)$ est holomorphe sur $\mathrm{Re}(s) > 0$ à valeurs dans $\mathcal{B}$.

Un théorème général [L 2, appendice 3] assure alors que $(\mathrm{Id} - H(s))^{-1}$ est méromorphe à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathcal{B})$, ce qui permet de conclure la preuve.

<u>L'espace de Banach</u> $\mathcal{B}$: les fonctions de $\mathcal{B}$ sont les fonctions continues sur $H/\Gamma - \{z_o\}$, admettant en z_o une singularité logarithmique, et bornées au voisinage de l'infini. Si on pose $L_{z_o}(z) = |\mathrm{Log}(d(z_o,z))| \cdot \varphi(d(z_o,z))$ avec $\varphi \in C_o^\infty([0,+],[0,1])$, $\varphi \equiv 1$ au voisinage de 0, on définit

$$\|f\|_{\mathcal{B}} = \sup_{z \in H/\Gamma - \{z_o\}} \left| \frac{f(z)}{L_{z_o}(z) + 1} \right| .$$

La preuve de (i) et (ii) résulte alors de quelques majorations regroupées dans le :

<u>Lemme</u> : a) $\forall\, \sigma_o, \sigma_1 > 0$, $\exists\, C$ <u>telle que,</u> $\forall\, s$ <u>avec</u> $\sigma_o \leqslant \mathrm{Re}(s) = \sigma \leqslant \sigma_1$, <u>on ait</u> :

$$|R_\infty(z,z';s)| \leqslant C(\exp(-\tfrac{\sigma}{2}\, d(z,z')) + L_z(z')) .$$

b) <u>Pour</u> $s_o >> 0$, <u>il existe</u> C <u>telle que</u> :

$$|R_\Gamma(z,z';s_o)| \leqslant C(\exp(-\tfrac{s_o}{2}\, d(z,z')) + L_z(z')) .$$

c) <u>Pour</u> $s_o >> 0$, <u>on a</u> :

$$|V(z,z')| \leqslant C\left[\exp(-\tfrac{s_o}{4}(d(z,X_o) + d(z',X_o)) + L_z(z')\chi(z)\chi(z')\right],$$

<u>où</u> $\chi \in C_o^\infty(X)$ <u>est égale à</u> 1 <u>sur</u> X_o.

(dans ce lemme, d est la distance dans H/Γ).

<u>Preuve</u> :

a) Identifiant Y_1 à $H/\hat{\Gamma}_\infty$ où $\Gamma_\infty = \{z \longmapsto \mu^n . z \mid n \in \mathbb{Z}\}$ $(\mu = e^{T_1})$ et $\hat{\Gamma}_\infty = \Gamma_\infty \cup \{j \circ \sigma \mid \sigma \in \Gamma_\infty\}$ avec $j(z) = \bar{z}$, on peut poser $\tilde{R}_\infty(z,z';s) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty} R(z,\gamma z';s)$

et alors

$R_\infty(z,z';s) = \widetilde{R}_\infty(z,z';s) - \widetilde{R}_\infty(z,jz';s)$. Il nous suffit donc de majorer $\widetilde{R}_\infty$, ce que l'on fait à partir de la majoration

$$|R(z,z';s)| \leqslant C(\exp(-\sigma\hat{d}(z,z')) + L_z(z')) \quad , \quad (\hat{d} = \text{distance sur } H)$$

obtenue à partir de l'expression explicite de R à l'aide de fonctions hypergéométriques.

En effet, pour $\mathrm{Re}(s) \geqslant \sigma_o > 0$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \exp(-\frac{\sigma}{2}d(z,\mu^n z')) = O(1)$ et donc

$$|\widetilde{R}_\infty(z,z';s)| \leqslant C(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp(-\frac{\sigma}{2}\hat{d}(z,\mu^n z'))) \,.\sup_n[(\exp(-\frac{\sigma}{2}\hat{d}(z,\mu^n z')) + L_{z'}(\mu^n z)] \ .$$

D'où l'on déduit la majoration, car $d(z,z') = \inf \hat{d}_H(z,\mu^n z')$.

b) La majoration s'obtient par un procédé analogue au a). On peut aussi l'obtenir à partir de majorations générales du noyau de la chaleur sur H/Γ , du type $e_\Gamma(t,z,z') \leqslant C_1/t.e^{C_2 t}.\exp(-C_3 d^2(z,z')/t)$ (D,C-L-Y) et de l'écriture

$$R_\Gamma(s_o) = \int_o^{+\infty} e^{+s_o(1-s_o)t}\, e^{-t\Delta_\Gamma}\, dt \qquad (s_o >> 0) \ .$$

c) Pour obtenir cette dernière majoration, on part de l'écriture, valable lorsque z et $z' \in X_o$ (auquel cas la majoration b) convient),

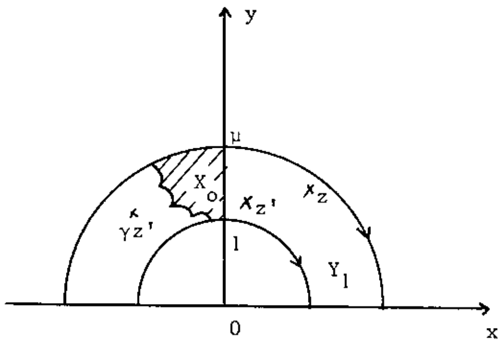
$$V(z,z') = \Big[\sum_{\gamma\in\Gamma/\Gamma_\infty - \{Id\}} \widetilde{R}_\infty(z,z';s_o)\Big] + \widetilde{R}_\infty(z,jz';s_o) \ .$$

On obtient ainsi, grâce à a) ,

$$|V(z,z')| \leqslant C\Big[\sum_{\gamma\in\Gamma/\Gamma_\infty - \{Id\}} \exp(-\frac{\sigma_o}{2}\hat{d}(z,\gamma z') + \exp(-\frac{\sigma_o}{2}\hat{d}(z,jz'))\Big]$$

On utilise alors l'inégalité évidente

$$\hat{d}(z,\gamma z') \geqslant d(z,X_o) + d(z',\gamma^{-1}X_o)$$



et on est ramené à majorer des sommes du type $\sum_{\gamma\in\Gamma/\Gamma_\infty-\{Id\}} \exp(-\frac{s_o}{2}\hat{d}(z',\gamma X_o))$

que l'on traite comme en a).

On peut sans doute ainsi obtenir cette majoration à partir de l'interprêtation probabiliste du noyau de $e^{-t\Delta_\Gamma} - e^{-t\Delta_\infty}$ en termes du mouvement brownien sur H/Γ et des majorations a priori au noyau de la chaleur (cf. b)).

Il reste à vérifier à l'aide du lemme que $w(s) \in \mathcal{B}$ et que $H(s)$ est un opérateur compact de $\mathcal{B}(\mathrm{Re}(s) > 0)$.

Pour cela, on utilise une estimée générale sur les produits de convolution:

$$\int_{H/\Gamma} \exp(-Ad(z,z'') - Bd(z'',z')) \,.\, d\mu(z'') = O(\exp(-Ad(z,z')))$$

où $A > 0$ et $B > 1 + A$.

Le théorème d'Ascoli permet alors de prouver qu'un opérateur ayant un noyau continu majoré par $C\exp(-Ad(z,X_o)-Bd(z',X_o))$ avec $B > 1$ et $A > 0$ est compact dans B. Les singularités logarithmiques ne causent pas d'ennui particulier.

On peut en fait préciser le résidu de R_Γ en $s = \delta_\Gamma$; il est de la forme $\Phi(z)\Phi(z')$ où Φ est l'unique (à scalaire près) solution > 0 de $(\Delta_\Gamma - \delta_\Gamma(1-\delta_\Gamma))\Phi = 0$ (voir [S 4] à ce sujet) : en fait via une représentation intégrale des solutions, la preuve utilise l'ergodicité de l'action de Γ sur $\mathbb{R}\cup\infty$ pour la δ_Γ-mesure de Haussdorff canonique.

4. APPLICATION A LA FONCTION DE DÉNOMBREMENT ORBITAL

En appliquant le théorème taubérien d'Ikehara [L 1] à la série de Poincaré, on obtient le résultat suivant :

Théorème : Si la série de Poincaré n'a pas d'autres pôles sur la droite $\mathrm{Re}(s)=\delta_\Gamma$ (c'est toujours le cas si $\delta_\Gamma \geqslant \frac{1}{2}$) que le point δ_Γ, on a $N_\Gamma(z_o,z_1;r) \sim \Phi(z_o)\Phi(z_1)e^{\delta_\Gamma r}$, où $\Phi(z)$ est l'unique (à scalaire près) solution positive Γ-automorphe de $(\Delta - \delta_\Gamma(1-\delta_\Gamma)\Phi) = 0$.

Lorsque $\delta_\Gamma > \frac{1}{2}$, $\Phi \in L^2(H/\Gamma)$ et si on pose $\Phi = \sqrt{C}.\Phi_o$ avec $\|\Phi_o\|_{L^2(H/\Gamma)} = 1$, on a $C = \frac{2^{2(1-s)}\pi}{s(2s-1)} \Gamma(2s)/(\Gamma/s))^2$,

(donc $C(1) = 2\pi$, ce qui redonne le résultat de Huber).

Lorsque $\delta_\Gamma < \frac{1}{2}$, il peut y avoir d'autres pôles sur la droite $\mathrm{Re}(s) = \delta_\Gamma$ que le point δ_Γ, on a seulement une densité "analytique"

$$\int_o^{+\infty} e^{-st}\, dN_\Gamma(z_o,z_1;t) \sim \frac{\Phi(z)\Phi(z')}{s-\delta_\Gamma} \quad (s \to \delta_\Gamma^+),$$

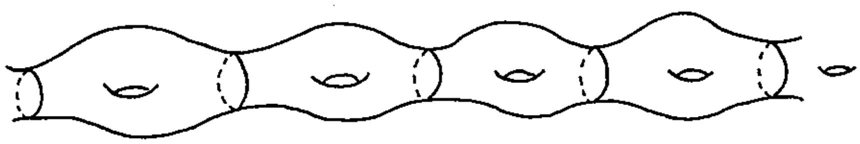
mais on peut prévoir un équivalent du type $N_\Gamma(r) \sim C\, e^{\delta_\Gamma r}(1 + \Sigma a_j \cos \mu_j(r-r_j))$ où $\delta_\Gamma \pm i\mu_j$ sont les autres pôles.

Il serait intéressant de comprendre si cela peut effectivement avoir lieu.

5. UN EXEMPLE OÙ Γ N'EST PAS DE TYPE FINI.

Nous nous intéressons à la situation où Γ est un sous-groupe distingué d'un groupe Γ_o discret tel que Γ_o/Γ soit isomorphe à $\mathbb{Z}^d$ et que H/Γ_o soit compact (ou d'aire finie, ou même plus généralement de type fini avec $\delta_{\Gamma_o} > \frac{1}{2}$)

Exemple 1 : tore avec une infinité de trous et une action de $\mathbb{Z}$



Exemple 2 : H/Γ_o est la sphère -3points munie de la métrique d'aire finie ; Γ_o est alors un groupe libre à 2 générateurs et on considère le sous-groupe Γ des commutateurs de Γ_o, on a alors évidemment $\Gamma_o/\Gamma \approx \mathbb{Z}^2$.

On est amené à étudier d'une manière générale la théorie spectrale et la résolvante d'une variété riémannienne complète X munie d'une action isométrique et proprement discontinue de $\mathbb{Z}^d$ telle que le quotient $X_o = X/\mathbb{Z}^d$ est compact.

On utilise pour cela une décomposition intégrale du laplacien par rapport aux caractères de $\mathbb{Z}^d$. Si on note $\mathbb{T}^d = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^d$ le groupe de caractères de $\mathbb{Z}^d$ définis par $\chi_\alpha(n_1,\ldots,n_d) = \exp(2\pi i(n_1\alpha_1+\ldots+n_d\alpha_d))$, toute fonction $f \in C_o^\infty(X)$ s'écrit $f(x) = \int_{\mathbb{T}^d} \hat{f}_\alpha(x)\, d\alpha$ où

$$\hat{f}_\alpha(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} f(n.x)\,\overline{\chi_\alpha}(n) \quad \text{et donc} \quad \hat{f}_\alpha(n.x) = \chi_\alpha(n)\,\hat{f}_\alpha(x) .$$

Cette décomposition est compatible avec la structure de $L^2(X)$,

$$\| f \|^2_{L^2(x)} = \int_{\mathbb{T}^d}\left[\int_{X_o} | \hat{f}_\alpha(x) |^2 dx\right] d\alpha .$$

Donc si on note Δ_α le laplacien sur $L^2(X_o)$ avec les conditions aux limites

$$f(T_j.x) = \exp(2\pi i\, \alpha_j)\, f(x) \qquad (T_j x = (0,\ldots,\underset{j\text{ème place}}{1},\ldots,0).x) ,$$

on a :

$$\Delta_X = \int_{\mathbb{T}^d} \Delta_\alpha\, d\alpha , \text{ au sens des intégrales hilbertiennes}$$

([R-S IV p. 279 et sv$^{\text{tes}}$]).

En particulier si $(\lambda_n(\alpha), \varphi_n(.,\alpha))$ est la décomposition spectrale de l'opérateur Δ_α (à résolvante compacte), on a :

$$\left[(\lambda - \Delta_X)^{-1}\right](x,y) = \int_{\mathbb{T}^d} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(x,\alpha)\varphi_n(y,\alpha)}{\lambda - \lambda_n(\alpha)}\, d\alpha .$$

On a alors besoin de :

Théorème : Pour $\alpha \in \mathbb{T}^d \setminus \{0\}$, $\Delta_\alpha > 0$ et $\lambda_o(\alpha) = \inf$ (spectre Δ_α) admet en $\alpha = 0$ un minimum absolu non dégénéré. En particulier cela implique que, lorsque $d \geqslant 3$, X admet une fonction de Green $G(x,y) = \lim\limits_{\lambda \to 0^-} [(\lambda-\Delta)^{-1}](x,y)$, alors que, si $d = 1$ (resp. 2), on a :

$$\left[(\lambda-\Delta_X)^{-1}\right](x,y) - \frac{1}{2\pi} \log(d(x,y)) \sim \frac{C}{\sqrt{|\lambda|}} (\text{resp. } C \log|\lambda|) \quad \text{lorsque} \quad \lambda \to 0^-$$

(on a supposé $\dim(X) = 2$ pour simplifier l'écriture).

Corollaire : Dans le cas $X = H/\Gamma$, la série de Poincaré admet, lorsque $s \to 1^+$ une limite finie si $d \geqslant 3$, et un équivalent en $\frac{C}{\sqrt{s-1}}$ (resp. $C \log|s-1|$) lorsque $d = 1$ (resp. 2) .

D'où en particulier l'ergodicité du flot géodésique si $d = 1$ ou 2.

Preuve du Théorème : Soit $f_j \in C^\infty(X)$ telle que $f_j(T_i x) = f_j(x) + \delta_{i,j}$ et $\omega_j^1 = df_j \in \Omega^1(X_o)$ la forme fermée ω_j^1 est cohomologue à une forme harmonique ω_j et on peut modifier f_j de façon que $df_j = \omega_j$.

Soit $j_\alpha : C^\infty(X_o) \to C^\infty_\alpha(X_o)$ défini par :

$j_\alpha(f) = f \exp(-2\pi i(\alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_d f_d))$, l'opérateur Δ_α se transporte sur $L^2(X_o)$ en l'opérateur L_α associé à la forme quadratique fermée de domaine $H^1(X_o)$ définie par $q_\alpha(f) = \int_{X_o} \| df - i\omega_\alpha f \|^2 \, dx$ où $\omega_\alpha = 2\pi \sum_{j=1}^{d} \alpha_j \omega_j$; on a donc, en utilisant le fait que $\omega(\alpha)$ est harmonique $L_\alpha(f) = \Delta_{X_o} f - 2i < df|\omega_\alpha > + \| \omega_\alpha \|^2 f$.

Il est facile de vérifier que $q_\alpha(f) > 0$ si $\alpha \neq 0$ et de calculer le comportement asymptotique quand $\alpha \to 0$ de $\lambda_o(L_\alpha)$

$$\lambda_o(L_\alpha) \sim \frac{4\pi^2}{\mathrm{vol}(X_o)} \int_{X_o} \| \Sigma \alpha_j \omega_j \|^2 \, dx \quad (\alpha \to 0)$$

ce qui achève la preuve du Théorème.

Cette situation a été étudiée très en détail en dimension 3 dans la thèse de C.L. Epstein (New York U. 1983) intitulée : The spectral theory of geometrically periodic hyperbolic 3-manifolds.

6. PROBLÈ

1) In
pour obte
On doit p
et Γ non

2) P
Selberg
de Diricl
qui est
obtenir
siques pé

3) P
en suppo

4) P
et théori

BIBIOGRAP

[BN] A. B

[B] P. B

6. PROBLÈMES

1) Inégalités isopérimétriques : Appliquer les inégalités isopérimétriques (B) pour obtenir des estimations sur δ_Γ et sur le nombre de valeurs propres $< 1/4$. On doit pouvoir notamment retrouver des résultats du type : si H/Γ a une pointe et Γ non élémentaire, $\delta_\Gamma > \frac{1}{2}$ (BN 1,2 ; P 4,5).

2) Formule de traces : On peut développer des formules de traces à la Selberg pour calculer $\mathrm{Tr}(f(\Delta_\Gamma) - f(\Delta_\infty))$ où Δ_∞ est le laplacien avec conditions de Dirichlet sur $\cup Y_i$ (lorsqu'il n'y a pas de cups) ; cela est analogue à ce qui est fait dans (G) pour l'opérateur de Schrödinger dans $\mathbb{R}^n$. On doit ainsi obtenir des estimations sur le comportement asymptotique des longueurs de géodésiques périodiques (comme dans le cas compact).

3) Extension aux dimensions $d \geq 3$: La structure géométrique de H/Γ, même en supposant Γ "géométriquement fini" n'est pas aussi simple que pour $d = 2$.

4) Problème des résonnances non réelles sur la droite critique $\mathrm{Re}(s) = \delta_\Gamma < \frac{1}{2}$ et théorèmes taubériens "ad hoc".

*
* *

BIBIOGRAPHIE

[BN] A. BEARDON : 1. The exponent of convergence of Poincaré series. Proc. London Math. Soc. 18, 461-483 (1968).

2. Inequalities for certain Fuchsian groups, Acta Math. 127, 221-258 (1971).

[B] P. BUSER : On Cheeger's inequality $\lambda_1 \geq h^2/4$. Proc. Symp. in Pure Math., 36, 29-77 (1980).

[CV] Y. COLIN de VERDIERE : Pseudo-laplaciens, II. Ann. Inst. Fourier, 33 (1983) p. 87-113.

[C-L-Y] S. CHENG, P. LI et S. YAU : On the upper estimate of the heat kernel of a complete Riemannian manifold. American J. of Math., 103, p. 1021-1063 (1981).

[D] H. DONNELLY : Spectral geometry for certain non compact Riemannian manifolds. Math. Z. 169, p. 63-76 (1979).

[D G] Discrete groups and Automorphic Functions, Proc. Conf. London Math., Soc., edited by W. Harvey. Academic Press (1977).

[E] J. ELSTRODT : Die Resolvente zum Eigunwertproblem der automorphen Formen in der hyperbolischen Ebene I, II, et III .

Math. Annalen 203, 295-330 (1973) ,
Math. Z. 132, 99-134 (1973) ,
Math. Annalen 208, 99-132 (1974).

[F] L. FADDEEV : Expansion in eigenfunctions of the Laplace operator .. A.M.S. Transl.Trudy (1967), 357-386.

[G] L. GUILLOPÉ : Une formule de traces pour l'opérateur de Schrödinger dans $\mathbb{R}^n$. Thèse de 3ème cycle, Grenoble (1981).

[GG] L. GREENBERG : Finitness theorems for Fuchsian and Kleinian groups [DG], 199-255.

[H] H. HUBER : Zur analytischen Theorie hyperbolischen Raumformen und Bewegungsgruppen. Math. Ann. 138, 1-26 (1956).

[L] S. LANG : 1. Algebraic numbers, Addison-Wesley (1964).
2. $SL_2(\mathbb{R})$, Addison-Wesley (1975).

[L-P] P. LAX, R. PHILLIPS : Scattering theory - Academic Press (1967).

[LV] N. LEBEDEV : Special functions and their applications, Dover Publ. (1972).

[LR] LEHNER : 1. Discontinuous groups and automorphic functions. A.M.S. (1964).
2. Dans [DG] p., Automorphic Forms, 73-119.

[P] S. PATTERSON : 1. The Laplacian operator on a Riemann surface. Compositio Math. 31, 83-107, (1975) ; 32, 71-112 (1976) ; 33, 227-259 (1976).

2. The limit set of a Fuchsian group. Acta Math. 136, 241-273 (1976).

3. Spectral theory and Fuchsian groups. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 81, 59-75 (1977).

4. The exponent of convergence of Poincaré series, Monatsh. Math. 82 (1976), 297-315.

5. Some example of Fuchsian groups. Proc. of the London Math. Soc. 39, 276-298 (1979).

[R-S] REED - B. SIMON : Methods of Modern Mathematical Physics, I, II, III et IV. Academic Press.

[S] D. SULLIVAN : 1. The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions. Publ. Math. I.H.E.S. 50, 419-450 (1979).

2. On the ergodic theory at infinity of an arbitrary discrete group of hyperbolic motions. Ann. of Math. Studies, 97, Princeton (1981), p. 465-496.

3. Discrete conformal groups and mesurable dynamics. Bull. AM.S. 6, 57-73 (1982).

4. λ-potential theory, hyperbolic geometry and general Riemannian manifolds. Preprint I.H.E.S. .

*
*   *
*

Université de Grenoble
Institut Fourier
B.P. 74,
38402 SAINT-MARTIN-d'HERES