Vol. 46, No. 1 DUKE MATHEMATICAL JOURNAL © March 1979

SPECTRE CONJOINT D'OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS QUI COMMUTENT I. LE CAS NON INTEGRABLE

YVES COLIN DE VERDIÈRE

Soit X une variété compacte de dimension d, munie d'une forme volume dx. On se donne sur X k opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 1, $P_1, P_2, \ldots, P_k$ auto-adjoints, tels que $\sum_{i=1}^{k} P_i^2 = Q$ soit elliptique et qui commutent entre eux: $\forall i, j$, $[P_i, P_j] = 0$. On peut alors définir le spectre joint comme le sous-ensemble (avec multiplicité) Λ de $\mathbb{R}^k$ des $\lambda_\alpha = (\lambda_\alpha^1, \ldots, \lambda_\alpha^k)$ où φ_α est une base orthonormée de $L^2(X, dx)$ telle que $P_i\varphi_\alpha = \lambda_\alpha^i\varphi_\alpha$. Le but de cet article est d'étudier quelques propriétés de l'ensemble discret Λ. On désignera par $p = (p_1, \ldots, p_k)$, $p \in C^\infty(\dot{T}^*X, \dot{\mathbb{R}}^k)$, le symbole principal joint des P_i et par Ω la forme volume canonique $\Omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge d\xi_d$ sur T^*X. (Si E est un espace vectoriel (ou un fibré vectoriel) on pose $\dot{E} = E \setminus \{0\}$.)

Remarque 0.1. Si $P_1, \ldots, P_k$ ne sont pas tous du même ordre et d'ordre non nul, on s'y ramène: si m_i sont les ordres des P_i et M le p.p.c.m. des m_i, on pose

$$Q = P_1^{2n_1} + \cdots + P_k^{2n_k} \qquad \text{avec} \quad n_i = M/m_i$$

et

$$Q_i = Q^{-\alpha_i}P_i \qquad \text{avec} \quad \alpha_i = \frac{m_i - 1}{2M}.$$

Exemples. (0.2) Si X est une variété riemannienne compacte, G un groupe de Lie opérant par isométries sur X, chaque élément Y de l'algèbre de Lie de G définit de manière évidente un champ de vecteur sur X qui commute avec le laplacien. Si on peut trouver dans l'algèbre de Lie de G, l vecteurs indépendants commutant 2 à 2, on peut étudier le spectre joint des l champs de vecteurs et du laplacien sur X; dans d'autres cas, on peut aussi introduire l'opérateur de Casimir Γ qui commute avec le laplacien sur X. Cette situation est tout à fait usuelle en mécanique quantique avec $G = SO(3)$ par exemple.

(0.3) $X = K\backslash G/H$ est un espace localement symétrique compact de rang k; on sait que l'algèbre des opérateurs différentiels invariants par G est de rang k, et contient le laplacien; on peut étudier le spectre conjoint de ces opérateurs; dans le cas où la courbure est $\leqslant 0$, on peut obtenir des formules de traces

Received June 12, 1978.

explicites (formule de Selberg); cela est étudié de manière très précise par Kolk ([K]).

(0.4) Soit Δ_0 le laplacien sur un espace symétrique de rang 1 (espace projectif ou sphère), A. Weinstein a introduit dans l'étude du spectre de l'équation de Schrödinger $\Delta_0 + V\,(V \in C^\infty(X;\, \mathbf{R}))$ un opérateur $\hat{V}$ pesudo-différentiel d'ordre 0 tel que le spectre de $\Delta_0 + \hat{V}$ soit très semblable à celui de $\Delta_0 + V$ et que $[\Delta_0, \hat{V}] = 0$ ([W] et aussi [CV]).

(0.5) Soit X une variété riemannienne compacte, on s'intéresse au comportement des valeurs propres de l'équation de Schrödinger $(\hbar^2/2)\Delta + V$ quand $\hbar$ tend vers 0; pour cela on peut introduire sur $X \times \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ les opérateurs:

$$P_1 = \frac{1}{2}\Delta - \frac{V}{T^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad \text{et} \quad P_2 = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}\,;$$

si $\lambda_n(\hbar)$ désigne les valeurs propres de l'opérateur de Schrödinger, le spectre conjoint de P_1 et P_2 est l'ensemble des

$$\left(\left(\frac{p}{T}\right)^2 \lambda_n\left(\frac{T}{p}\right), p\right);$$

faisant varier T, cela permet de recouvrir toutes les valeurs de $\hbar = T/p$. Ceci semble intéressant même dans le cas où $X = S^1$ (équation de Hill).

Dans cet article I, nous démontrerons trois théorèmes généraux relatifs à Λ, puis nous donnerons des applications à certains des exemples précédents. Dans la partie II, nous étudierons le cas intégrable, c'est-à-dire $k = d$.

On note Γ l'image de p et W l'ensemble des valeurs critiques de p.

THEOREME 0.6. *Si* $u = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \varphi_\lambda$ *avec* $a_\lambda = 0$ *pour* $\lambda \notin C$, C *cône de* $\dot{\mathbf{R}}^k$, *on a*: $WF(u) \subset p^{-1}(C)$. *En particulier si* $C \cap \Gamma = \{0\}$, $C \cap \Lambda$ *est fini.*

THEOREME 0.7. *Soit* C *un cône de* $\dot{\mathbf{R}}^k$ *à bord* C^1 *par morceaux tel que* $bC \cap W = \emptyset$ *et* $q \in C^\infty(\dot{\mathbf{R}}^k, \mathbf{R}_*^+)$ *une fonction homogène de degré* 1, *alors on a*:

$$\text{Cardinal}\{\lambda \in C \cap \Lambda \mid q(\lambda) \leqslant \tau\} = (2\pi)^{-d}\text{vol}\{p^{-1}(C \cap \{q \leqslant \tau\})\} + O(\tau^{d-1})$$

où vol *est le volume par rapport à* Ω.

Remarque. Lorsque $k = 1$, on retrouve le résultat de Hörmander ([H]). Lorsque $k = 2$, $X = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$, $P_j = (1/i)(\partial/\partial x_j)$, $C = \mathbf{R}^2$ et $q = \sqrt{x^2 + y^2}$, c'est l'estimation de Gauss sur le nombre de décomposition d'un entier en somme de deux carrés.

THEOREME 0.8. *Supposons que* P_1 *soit tel que* Spectre $(P_1) = \{\lambda_\alpha^1\} \subset \mathbf{Z} + \{\mu_0\}$ *et que le flot du champ de vecteur* H_{p_1} *soit simplement périodique de période* 2π, *alors si* C *est un cône tel que* $C \cap \{x_1 = 1\}$ *soit compact et vérifiant les hypothèses* *du théorème* 0.7, *on a*:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Cardinal}\{\lambda \in C \cap \Lambda \mid \lambda_1 = q + \mu_0\}\\ &\quad = (2\pi)^{-d}\tilde{\mathrm{vol}}\big(p^{-1}(C \cap \{q + \mu_0\} \times \mathsf{R}^{k-1})\big) + O(q^{d-2})\end{aligned}$$

où $\tilde{\mathrm{vol}} = \Omega / dp_1$.

Remarque 0.9. Le théorème 0.8 s'applique notamment aux exemples (0.4) et (0.5). Dans le cas de (0.4), il permet d'améliorer un peu les résultats de Weinstein ([W]).

Remarque 0.10. Dans II, on améliorera ces théorèmes dans le cas $k = d$; notamment lorsque $d = 2$, on pourra voir ce qui se passe près de certains points de W correspondants à des singularités ayant des propriétés de non dégénérescence du type point de Morse.

Remarque 0.11. On peut étendre dans une certaine mesure ces résultats au cas où X est non compacte, par exemple dans le cadre de l'exemple (0.5), cela permet d'obtenir des estimations pour la partie discrète du spectre de l'équation de Schrödinger: si $V_\infty = \underline{\lim}_{x\to\infty} V(x)$, et si $E < V_\infty$. Si on suppose que l'opérateur de Schrödinger est autoadjoint au sens de la théorie spectrale et que le spectre est discret en dessous de V_∞, on peut obtenir des estimations analogues à celles qu'on a dans le cas compact pour $\mathrm{Cardinal}\{\lambda_n(\hbar) \leqslant E\}$ lorsque $\hbar \to 0$.

L'article s'organise ainsi; dans le §1, nous prouvons un théorème taubérien généralisant à plusieurs dimensions ceux utilisés par Hörmander ([H1]) et Duistermaat-Guillemin ([D.G.]); dans le §2, nous faisons une étude microlocale de la trace de $U(t) = \exp(-i(t_1P_1 + \cdots + t_kP_k))$ au voisinage de $t = 0$; dans le §3, nous prouvons les théorèmes 0.6, 0.7 et 0.8; dans le §4, nous appliquons les résultats obtenus à l'équation de Schrödinger.

1. Un theoreme tauberien. Soit τ un paramètre réel tendant vers l'infini; pour chaque valeur de τ, on se donne une partie discrète Λ_τ de R^k et on suppose qu'il existe un $N \in \mathsf{N}$ tel que

$$\mathrm{Cardinal}\{\lambda \in \Lambda_\tau \mid \|\lambda\| \leqslant \nu\} = O\big((|\nu| + |\tau|)^N\big). \tag{1.1}$$

On se donne aussi pour $\lambda \in \Lambda_\tau$ des nombres $a_{\tau,\lambda} \in [0, 1]$. On définit alors des distributions $Z_\tau \in \mathcal{S}'(\mathsf{R}^k)$ par la formule:

$$Z_\tau(t) = \sum_{\lambda \in \Lambda_\tau} a_{\tau,\lambda} e^{-i\langle t \mid \lambda\rangle}; \tag{1.2}$$

on veut étudier le comportement asymptotique de Λ_τ et le relier à la singularité de Z_τ à l'origine, pour cela, soit $\rho \in \mathcal{S}(\mathsf{R}^k; \mathsf{R}^+)$ une fonction paire telle que

$\hat{\rho} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^k; \mathbb{R}^+)$ et $\hat{\rho}(0) = 1$, on suppose que:

$$\hat{\rho} Z_\tau(t) = \int_{\mathbb{R}^k} e^{-i\langle t \mid \xi \rangle} a(\xi, \tau) d\xi \qquad \text{avec} \quad a(\xi, \tau) = a_m(\xi, \tau) + O\big((\|\xi\| + |\tau|)^{m-1}\big), \tag{1.3}$$

où a_m est une fonction continue homogène de degré m sur $\mathbb{R}^{k+1} \setminus O$.

THEOREME 1.4. *Soit D un domaine compact à frontière C^1 par morceaux de $\mathbb{R}^k$, alors:*

$$\sum \{ a_{\tau,\lambda} \mid \lambda \in \Lambda_\tau \cap \tau D \} = \int_{\tau D} a_m(\xi, \tau) d\xi + O(\tau^{m+k-1}).$$

Calculant la transformée de Fourier de $\hat{\rho} Z_\tau$, il vient:

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_\tau} a_{\tau,\lambda} \rho(\xi - \lambda) = a_m(\xi, \tau) + O\big((\|\xi\| + |\tau|)^{m-1}\big).$$

On a:

$$\sum \{ a_{\tau,\lambda} \mid \lambda \in \Lambda_\tau \cap \tau D \} = \sum \left\{ a_{\tau,\lambda} \int_{\mathbb{R}^k} \rho(\xi - \lambda) d\xi \mid \lambda \in \Lambda_\tau \cap \tau D \right\}.$$

On introduit donc: $(\mathrm{I}) = \sum \{ a_{\tau,\lambda} \int_{\mathbb{R}^k} \rho(\xi - \lambda) d\xi \mid \lambda \in \Lambda_\tau \cap \tau D \}$ et $(\mathrm{II}) = \sum \{ a_{\tau,\lambda} \int_{\tau D} \rho(\xi - \lambda) d\xi \mid \lambda \in \Lambda_\tau \}$. Par hypothèse, on a: $(\mathrm{II}) = \int_{\tau D} a_m(\xi, \tau) + O(\tau^{m+k-1})$. On est donc amené à majorer (I)–(II):

$$\begin{aligned}(\mathrm{I}) - (\mathrm{II}) = \sum & \left\{ a_{\tau,\lambda} \int_{\mathbb{R}^k \setminus \tau D} \rho(\xi - \lambda) d\xi \mid \lambda \in \Lambda_\tau \cap \tau D \right\} \\ & - \sum \left\{ a_{\tau,\lambda} \int_{\tau D} \rho(\xi - \lambda) d\xi \mid \lambda \in \Lambda_\tau \setminus \tau D \right\}.\end{aligned}$$

Soit U un voisinage compact de D à frontière C^1 par morceaux, on a:

$$\begin{aligned}\sum \left\{ a_{\tau,\lambda} \int_{\mathbb{R}^k \setminus \tau D} \rho(\xi - \lambda) d\xi \mid \lambda \in \Lambda_t \cap \tau D \right\} = & \sum \left\{ a_{\tau,\lambda} \int_{\mathbb{R}^k \setminus \tau U} \cdots \right\} \\ & + \sum \left\{ a_{\tau,\lambda} \int_{\tau(U \setminus D)} \cdots \right\}.\end{aligned}$$

De même:

$$\begin{aligned}\sum \left\{ a_{\tau,\lambda} \int_{\tau D} \rho(\xi - \lambda) d\xi \mid \lambda \in \Lambda_\tau \setminus \tau D \right\} = & \sum \left\{ a_{\tau,\lambda} \int_{\tau D} \cdots \mid \lambda \in \Lambda_\tau \setminus \tau U \right\} \\ & + \sum \left\{ a_{\tau,\lambda} \int_{\tau D} \cdots \mid \lambda \in \Lambda_\tau \cap \tau(U \setminus D) \right\}.\end{aligned}$$

Dans chacune des deux expressions, la lère somme est $O(1)$, en effet, pour $\lambda \in \tau D$, on a $\int_{\mathbf{R}^k \setminus \tau U} \rho(\xi - \lambda) d\xi = O(\tau^{-\infty})$ et de même pour $\lambda \notin \tau U$, $\int_{\tau D} \rho(\xi - \lambda) d\xi = O(|\tau| + \|\lambda\|)^{-\infty})$; car $\rho \in \mathbb{S}$, on conclut grâce à (1.1). On est donc amené à estimer:

$$(A) = \sum \left\{ a_{\tau,\lambda} \int_{\tau(U \setminus D)} \rho(\xi - \lambda) d\xi \mid \lambda \in \Lambda_\tau \cap \tau D \right\}$$

et

$$(B) = \sum \left\{ a_{\tau,\lambda} \int_{\tau D} \rho(\xi - \lambda) d\xi \mid \lambda \in \Lambda_\tau \cap \tau(U \setminus D) \right\}.$$

On passe d'une somme à l'autre a permutation de $U \setminus D$ et D qui ont des propriétés analogues. On va donc se contenter d'estimer (A):

Lemme 1.5. *Soit $R > 0$ fixé, alors*:

$$\sum \{ a_{\tau,\lambda} \mid \lambda \in \Lambda_t \cap \tau U, \|\xi - \lambda\| \leqslant R \} = O(\tau^m).$$

Il suffit évidemment de le prouver pour un seul $R_0 > 0$. Soit R_0 tel que $|t| \leqslant R_0$ implique $\rho(t) \geqslant 1/2$, on a:

$$\sum \{ a_{\tau,\lambda} \mid \lambda \in \Lambda_\tau \cap \tau U, \|\xi - \lambda\| \leqslant R_0 \} \leqslant 2 \cdot \sum \{ a_{\tau,\lambda} \rho(\xi - \lambda) \mid \lambda \in \Lambda_\tau \cap \tau U \}.$$

Cette dernière somme est majorée par $a_m(\xi, \tau) + O((|\tau| + \|\xi\|)^{m-1})$ et comme dans τU, on a $\|\xi\| = O(|\tau|)$, on conclut aisément.

On a: $\int_{\tau(U \setminus d)} \rho(\xi - \lambda) d\xi = O([2 + \text{distance}(\lambda, \tau(U \setminus D))]^{-N})$, en regroupant les λ de $\Lambda_\tau \cap \tau D$ par paquets dans des boules de rayon 1; et en utilisant la majoration

$$|\text{distance}(\lambda, \tau(U \setminus D)) - \text{distance}(\lambda', \tau(U \setminus D))| \leqslant \text{distance}(\lambda, \lambda')$$

et le lemme 1.5, on obtient:

$$(A) = O(\tau^m) \int_{\tau D} [1 + \text{distance}(\lambda, \tau(U \setminus D))]^{-N} d\lambda.$$

Il reste à majorer: $\int_{\tau D} [1 + \text{dist.}(\lambda, \tau(U \setminus D))]^{-N} d\lambda = \tau^k \int_D [1 + \tau \text{ dist.} (\mu, U \setminus D)]^{-N} d\mu$. En utilisant une partition de l'unité et des cartes locales, on se ramène à majorer: $\int_{x_1 \geqslant 0} (1 + \tau x_1)^{-N} \psi(x) dx$, où ψ est bornée à support compact dans $\mathbf{R}^k$. On voit qu'une telle intégrale est $O(\tau^{-1})$, ce qui prouve 1.4.

2. Etude microlocale. On désigne par Ω_p l'ouvert de T^*X où $dp_1, \ldots, dp_k$ sont indépendants et on adapte à cette situation la proposition 6.1.4 de [D.H.] qui en est un cas particulier obtenu en faisant $k = 1$.

THEOREME 2.1. *Soit $P_1, \ldots, P_k$ des opérateurs pseudo-différentiels auto-adjoints sur X qui commutent entre eux et soit $\lambda_0 \in T^*X$ tel que $\sum_{j=1}^k p_j^2(\lambda_0) > 0$ et $dp_1(\lambda_0), \ldots, dp_k(\lambda_0)$ sont indépendants. Alors il existe un voisinage conique U de λ_0, une transformation canonique homogène $\chi : U \to T^*\mathrm{R}^d$ où $\chi(U) = V$ voisinage conique de $\mu_0 = \chi(\lambda_0)$, des opérateurs intégraux de Fourier A et B, $A \in I^0(\mathrm{R}^d, X; \chi)$, $B \in I^0(X; \mathrm{R}^d, \chi^{-1})$ tels que, si $P_j^0 = (1/i)(\partial/\partial x_j)$, on a: $\lambda_0 \notin WF'(BA - Id)$, $\mu_0 \notin WF'(AB - Id)$, et $\forall j = 1, \ldots, k$, $\lambda_0 \notin WF'(BP_j^0A - P_j)$.*

Preuve. Des conditions sur les p_i résultent par application de la proposition 6.1.3 de [D.H.] l'existence d'une transformation canonique χ d'un voisinage conique U de λ_0 dans $T^*\mathrm{R}^d$ telle que $\xi_j \circ \chi = p_j$; en effet, il suffit de vérifier que les vecteurs hamiltoniens H_{p_j} qui commutent entre eux, sont indépendants entre eux et indépendants de l'axe du cône au point λ_0, ce qui résulte des conditions $\{p_j, p_l\} \equiv 0$ et $\sum_{j=1}^k p_j^2(\lambda_0) > 0$.

Choisissons alors $A_0 \in I^0(V, U; \chi)$ elliptique en λ_0 et $B_0 \in I^0(U, V; \chi^{-1})$ un inverse microlocal de A_0. Introduisons les opérateurs pseudo-différentiels Q_j sur R^d, par la formule $Q_j = A_0 P_j B_0$, ces opérateurs commutent modulo régularisant au voisinage de μ_0 et ont même symbole principal que P_j^0; raisonnant par récurrence, on suppose construit A_{n-1}, B_{n-1} ayant les mêmes propriétés que A_0 et B_0 et tels que: $A_{n-1}P_jB_{n-1} = P_j^0 + R_j^{n-1}$ au voisinage de μ_0, où R_j^{n-1} est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $-n$; on cherche alors à construire A_n sous la forme $A_n = (Id + C_n)A_{n-1}$ où C_n est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $-n$; en écrivant que $(Id + C_n)(P_j^0 + R_j^{n-1}) - P_j(I + C_n)$ est d'ordre $-(n+1)$, on obtient les équations: $(1/i)\{\xi_j, c_n\} = r_j^{n-1}$, où c_n, r_j^{n-1} désignent les symboles principaux d'ordre $-n$ de C_n et R_j^{n-1}; ces équations s'écrivent: $(1/i)(\partial c_n/\partial x_j) = r_j^{n-1}$; or on a: $[P_j^0 + R_j^{n-1}, P_l^0 + R_l^{n-1}] =$ opérateur régularisant au voisinage de μ_0 et donc $\partial r_j^{n-1}/\partial x_l = \partial r_l^{n-1}/\partial x_j$, si on suppose qu'on est dans un voisinage contractile de λ_0, on peut résoudre les équations, ce qui prouve la récurrence. Passant à la limite, on définit un opérateur $A = \lim_{n\to\infty}(I + C_n)(I + C_{n-1}) \ldots (I + C_1)A_0$ qui satisfait les conditions du théorème.

THEOREME 2.2. *Soit Ψ un opérateur pseudo-différentiel sur X, de symbole principal ψ et tel que $WF'(\psi) \subset \Omega_p$. On peut définir la distribution $Z_\Psi \in \mathfrak{D}'(\mathrm{R}^k)$ par $Z_\Psi(t) = \mathrm{Tr}(\exp(-i(t_1P_1 + \cdots + t_kP_k)).\Psi)$; c'est une distribution intégrale de Fourier au voisinage de $t = 0$, de la forme: $Z_\Psi(t) = \int_{\mathrm{R}^k} e^{-i(t_1\xi_1 + \cdots + t_k\xi_k)}a(\xi)d\xi$, où $a(\xi)$ est un symbole classique dont la partie principale a_0 est défini par: $a_0(\xi) = (2\pi)^{-d}\int_{p^{-1}(\xi)} \Psi \circ p \cdot \Omega/dp_1 \wedge \cdots \wedge dp_k$.*

Preuve. Montrons que $Z_\Psi(t)$ est bien définie comme distribution; pour cela, on introduit $U(t) = \exp(-i(t_1P_1 + \cdots + t_kP_k))$ et on pose $A_\varphi = (\int_{\mathrm{R}^k} U(t)\varphi(t)\,dt) \circ \Psi$, où $\varphi \in C_0^\infty(\mathrm{R}^k)$, on montre que A_φ est un opérateur à trace et on pose:

$$\langle Z_\Psi, \varphi \rangle = \mathrm{Tr}(A_\varphi).$$

Soit $\varphi_N = (1-\Delta)^N \varphi$, on a $A_\varphi = \int_{\mathbf{R}^k} (1-\Delta)^{-N} U(t) \varphi_N(t) dt$ et comme $(1/i)(\partial U/\partial t_j) = -P_j U$, on a:

$$A_\varphi = \left[\int_{\mathbf{R}^k} \left(1 + \sum_{j=1}^{k} P_j^2 \right)^{-N} U(t) \varphi_N(t) dt \right] \circ \Psi.$$

Comme U est borné dans L^2, on voit que A_φ est régularisant.

Soit maintenant $\lambda_0 \in \Omega_p$, on fait la construction du théorème 2.1 dans un voisinage U de λ_0 et on suppose $BA - Id$ et $BP_j^0 A - P_j$ sont régularisants dans un voisinage U_1 de λ, on choisit alors un nouveau voisinage conique $W \subset U_1$ de λ_0 et un nombre $\epsilon > 0$ tel que si $\|t\| \leqslant \epsilon$ et $\lambda \in W$, $\varphi_t(\lambda) \in U_1$, où φ_t désigne le flot composé de $H_{p_1}, \ldots, H_{p_k}$ qui commutent. On recouvre $WF'(\Psi)$ par un nombre fini d'ouvert W_α, $\alpha = 1, \ldots, N$ et on pose $\epsilon = \inf\{\epsilon_\alpha \mid \alpha = 1, \ldots, N\}$. Soit $W_0 = \dot{T}^* X \setminus WF'(\Psi)$ et Π_α une partition de l'unité pseudo-différentielle d'ordre 0, c'est-à-dire que Π_α est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0 tel que $WF'(\Pi_\alpha) \subset W_\alpha$, $\alpha = 0, 1, \ldots, N$ et qu'on a: $Id = \sum_{\alpha=0}^N \Pi_\alpha$. On note p_α le symbole principal de Π_α, on a évidemment $\sum_{\alpha=0}^N p_\alpha = 1$. On a:

$$Z_\Psi(t) = \sum_{\alpha=0}^{N} \operatorname{Tr}(U(t)\Psi\Pi_\alpha),$$

or $\Psi^{|\circ} \Pi_0$ est régularisant, donc modulo C^∞, on a:

$$Z_\psi(t) = \sum_{\alpha=1}^{N} \operatorname{Tr}(U(t)\Psi\Pi_\alpha) \text{ (mod. } C^\infty).$$

LEMME 2.3. *Sur* $\operatorname{Im}(\Psi\Pi_\alpha)$ *on a:* $U(t) = B_\alpha U_0(t) A_\alpha$ (mod C^∞) *pour* $\|t\| \leqslant \epsilon$.

En effet, si $WF(\varphi) \subset W_\alpha$, on a d'après le théorème de propagation des singularités ([D.H.] théorème 6.1.1) pour $\|t\| \leqslant \epsilon$, $WF(U(t)\varphi) \subset U_1^\alpha$, et sur U_1^α, on a: $P_j = B_\alpha P_j^0 A_\alpha$ (mod C^∞). On a donc: $\operatorname{Tr}(U(t)\Psi\Pi_\alpha) = \operatorname{Tr}(B_\alpha U_0(t) Q_\alpha A_\alpha)$ (mod C^∞) pour $\|t\| \leqslant \epsilon$, où $Q_\alpha = A_\alpha \Psi \Pi_\alpha B_\alpha$ est un opérateur pseudo-différentiel de symbole principal $(\psi p_\alpha) \circ \chi_\alpha^{-1}$; comme $A_\alpha B_\alpha = Id$(mod C^∞) sur $\operatorname{Im}(U_0(t) Q_\alpha)$, on a, pour $\|t\| \leqslant \epsilon$,

$$\operatorname{Tr}(U(t)\Psi\Pi_\alpha) = \operatorname{Tr}(U_0(t) Q_\alpha) \text{ (mod } C^\infty).$$

Il reste à évaluer cette trace; on a:

$$U_0(t, x, y) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbf{R}^d} \exp(i < x - y - t_1 e_1 - \cdots - t_k e_k, \xi).d\xi$$

où $e_1, \ldots, e_k$ sont les k premiers vecteurs de base de $\mathbf{R}^d$. On en déduit que:

$$[U_0(t) Q_\alpha](x, y) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbf{R}^d} \exp(i < x - y - t_1 e_1 - \cdots - t_k e_k, \xi) \tilde{q}_\alpha(y, \xi) d\xi$$

où $\tilde{q}_\alpha$ est un symbole dont la partie principale est $q_\alpha = (\psi p_\alpha) \circ \chi^{-1}$. Et donc:

$$\mathrm{Tr}(U_0(t)Q_\alpha) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbf{R}^{2d}} \exp(-i(t_1\xi_1 + \cdots + t_k\xi_k)).\tilde{q}_\alpha(x, \xi)dx\, d\xi.$$

Intégrant par rapport à $x_1, \ldots, x_d, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_d$, on obtient:

$$\mathrm{Tr}(U_0(t)Q_\alpha) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbf{R}^k} \exp(-i(t_1\xi_1 + \cdots + t_k\xi_k)).a_\alpha(\xi_1, \ldots, \xi_k)d\xi,$$

où a_α est un symbole de partie principale a_0^α avec:

$$a_0^\alpha(\xi_1, \ldots, \xi_k) = \int_{\mathbf{R}^{2d-k}} (\psi p_\alpha)\chi^{-1}(x_1, \ldots, x_d, \xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots, \xi_d)$$

$$dx_1 \wedge \cdots \wedge d\xi_d / d\xi_1 \wedge \cdots \wedge d\xi_k,$$

utilisant le fait que χ conserve le volume canonique, on peut écrire:

$$a_0^\alpha(\xi_1, \ldots, \xi_k) = \int_{p^{-1}(\xi)} (\psi p_\alpha)(x, \xi)\Omega / dp_1 \wedge \cdots \wedge dp_k .$$

Regroupant les termes, on obtient le théorème 2.2.

3. Preuve des theoremes 0.6, 0.7 *et* 0.8.

Preuve de 0.6. Soit $\lambda_0 \in \dot{T}^*X$ tel que $\tau_0 = p(\lambda_0) \notin C$ et soit $\psi \in \mathcal{H}_k$, où $\mathcal{H}_k$ est l'ensemble des fonctions C^∞ homogène de degré 0 sur $\dot{\mathbf{R}}^k$, telle que $\psi(\tau_0) \neq 0$ et $\psi \upharpoonright_C \equiv 0$. On peut définir par la théorie spectrale l'opérateur $\psi(P_1, \ldots, P_k)$ dont Strichartz ([S]) a prouvé que c'est un opérateur pseudo-différentiel de symbole principal $\psi(p_1, \ldots, p_k)$. Si $\lambda \in C$, $\psi(P_1, \ldots, P_k)\varphi_\lambda = \psi(\lambda)\varphi_\lambda = 0$ et donc, si $u = \sum_{\lambda \in C} a_\lambda \varphi_\lambda$, on a $\psi(P_1, \ldots, P_k)u = 0$ et comme $\psi(P_1, \ldots, P_k)$ est elliptique en λ_0, on voit que $\lambda_0 \notin WF(u)$.

En particulier, si $C \cap \Gamma = \{0\}$, soit E_C le sous-espace vectoriel fermé de $L^2(X)$ engendré par les $(\varphi_\lambda)_{\lambda \in C}$, on voit que $E_C \subset C^\infty(X)$ et donc l'identité est compacte dans E_C; E_C est de dimension finie.

Preuve de 0.7. Soit $\varphi \in \mathcal{H}_k$ telle que support$(\varphi) \subset C$ et $\varphi \equiv 1$ dans un voisinage de $W \cap C$ (φ existe car W ne rencontre pas le bord de C), soit $\tilde{\varphi} \in \mathcal{H}_k$ telle que $\tilde{\varphi} = 1 - \varphi$ sur C et support$(\tilde{\varphi}) \cap W = \emptyset$. On décompose la fonction à étudier en deux sommes:

$$\mathrm{Card}\{\lambda \in C \cap \Lambda \mid q(\lambda) \leqslant \tau\} = \textstyle\sum_1\{\tilde{\varphi}(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda \cap \tau D\}$$

$$+ \textstyle\sum_2\{\varphi(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda, q(\lambda) \leqslant \tau\}$$

où $D = C \cap \{q \leqslant 1\}$, la deuxième somme $\sum_2$ peut s'écrire aussi $\sum_{\mu \leqslant \tau} b_\mu$ où $b_\mu = \sum\{\varphi(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda, q(\lambda) = \mu\}$.

Ces deux sommes vont s'évaluer grâce au théorème taubérien et à la réduction microlocale.

Etude de $\sum_1$: pour étudier $\sum_1$, on est amené à introduire:

$$Z_1(t) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \tilde{\varphi}(\lambda) e^{-i\langle t \mid \lambda \rangle} = \operatorname{Tr}(\tilde{\varphi}(P_1, \ldots, P_k)) \exp(-i(t_1 P_1 + \cdots + t_k P_k)).$$

Comme $\tilde{\varphi}(P_1, \ldots, P_k)$ est un pseudo-différentiel qui commute avec $U(t)$ et que $WF'(\tilde{\varphi}(P)) \subset \Omega_p$, on peut évaluer la singularité à l'origine de $Z_1(t)$ par le théorème (2.2). On a donc, au voisinage de 0:

$$Z_1(t) = (2\pi)^{-d} \int e^{-i\langle t \mid \xi \rangle} a(\xi) d\xi,$$

avec $a_0(\xi) = \int_{p^{-1}(\xi)} (\tilde{\varphi} \circ p) \Omega / dp_1 \wedge \cdots \wedge dp_k$. Par application du théorème taubérien 1.4 il vient immédiatement:

$$\sum\nolimits_1(\tau) = (2\pi)^{-d} \int_{\tau D} \left(\int_{p^{-1}(\xi)} (\tilde{\varphi} \circ p) \Omega / dp_1 \wedge \cdots \wedge dp_k \right) d\xi_1 \wedge \cdots \wedge d\xi_k$$
$$+ O(\tau^{d-1});$$

c'est-à-dire:

$$\sum\nolimits_1(\tau) = (2\pi)^{-d} \int_{p^{-1}(\tau D)} (\tilde{\varphi} \circ p) \Omega + O(\tau^{d-1}).$$

Etude de $\sum_2(\tau)$: pour étudier $\sum_2(\tau)$, on est amené à introduire $Z_2(t)$ définie par:

$$Z_2(t) = \sum \{ b_\mu e^{-it\mu} \mid \mu = q(\lambda), \lambda \in \Lambda \}, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Si $Q = q(P_1, \ldots, P_k)$ et $\Psi = \varphi(P_1, \ldots, P_k)$, il est clair que:

$$Z_2(t) = \operatorname{Tr}(\Psi e^{-itQ})$$

où Q est un opérateur elliptique autoadjoint. On a donc au voisinage de $t = 0$, d'après le théorème 2.2 appliqué avec $k = 1$:

$$Z_2(t) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbf{R}} e^{-it\xi} a(\xi) d\xi$$

avec $a_0(\xi) = \int_{q^{-1}(\xi)} (\varphi \circ p)(\lambda) \Omega / d(q \circ p)$. On en déduit, par une nouvelle application du théorème taubérien 1.4:

$$\sum\nolimits_2(\tau) = (2\pi)^{-d} \int_{\xi < \tau} a_0(\xi) d\xi + O(\tau^{d-1})$$

et donc:

$$\sum\nolimits_2(\tau) = (2\pi)^{-d} \int_{q \circ p < \tau} (\varphi \circ p) \Omega + O(\tau^{d-1}).$$

Utilisant le fait que support(φ) $\subset C$, on obtient finalement:

$$\sum(\tau) = \sum_1(\tau) + \sum_2(\tau) = (2\pi)^{-d}\mathrm{vol}\big(p^{-1}(\{q \leqslant \tau\} \cap C)\big) + O(\tau^{d-1}),$$

ce qui est le théorème annoncé.

Preuve de 0.8. On choisit φ et $\tilde{\varphi}$ comme dans la preuve de 0.7 et on décompose $N(q) = \mathrm{Cardinal}\{\lambda' \mid (q + \mu_0, \lambda') \in \Lambda \cap C\}$ en deux sommes; pour cela, on introduit $\Lambda_q = \{\lambda' \in \mathsf{R}^{k-1} \mid (q + \mu_0, \lambda') \in \Lambda\}$ et on écrit:

$$N(q) = \sum\nolimits_1\{\tilde{\varphi}(q + \mu_0, \lambda') \mid \lambda' \in \Lambda_q \cap (q + \mu_0)D\} + \sum\nolimits_2\{\varphi(q + \mu_0, \lambda') \mid \lambda' \in \Lambda_q\}$$

où D est défini par $\{1\} \times D = C \cap \{x_1 = 1\}$. Pour évaluer $\sum_1$ et $\sum_2$, on procède un peu comme dans la preuve de 0.7.

Etude de $\sum_1(q)$: pour appliquer 1.4, on est amené à introduire la distribution $Z_q \in \mathcal{D}'(\mathsf{R}^{k-1})$ définie par: $Z_q(t') = \sum_{\lambda' \in \Lambda_q} \tilde{\varphi}(q + \mu_0, \lambda')e^{-i\langle t' \mid \lambda' \rangle}$; pour étudier la singularité à l'origine de Z_q quand q tend vers l'infini, on introduit $Z \in \mathcal{D}'(\mathsf{R}^k)$ défini par:

$$Z(t_1, t') = \sum_{p \in \mathbf{Z}} Z_q(t')e^{-i(q+\mu_0)t_1} = \mathrm{Tr}\big(e^{-i\langle t \mid P \rangle}\tilde{\varphi}(P_1, \ldots, P_k)\big).$$

L'étude microlocale du §2 permet de préciser la singularité de Z à l'origine; pour conclure, il faudrait connaître les singularités pour $t_1 \in \mathsf{R}$, $\|t'\| \leqslant \epsilon$ $(\epsilon > 0)$, ce qui est possible grâce à l'hypothèse faite sur le flot de H_{p_1}. Pour cela, nous avons besoin de quelques lemmes:

LEMME 3.1. *Soit* $P_1, \ldots, P_k$ *comme dans le théorème* 2.1 *et* Ψ *un opérateur pseudo-différentiel sur* X *tel que* $WF'(\Psi) \subset \Omega_p$; Ω_p *étant l'ouvert de* $\dot{T}^*X$ *où les* dp_i *sont indépendantes. Alors* $WF(\mathrm{Tr}(U(t)\Psi)) \subset \{(t, \tau) \in \dot{T}^*\mathsf{R}^k \mid \exists\lambda \in WF'(\Psi), \varphi_t(\lambda) = \lambda, \tau + p(\lambda) = 0\}$ *où* $\varphi_t = \varphi^1_{t_1} \circ \cdots \circ \varphi^k_{t_k}$ *est le flot composé* $H_{p_1}, \ldots, H_{p_k}$.

[Dans le cas $k = 1$, cela est prouvé dans [C] et [D.G], on trouve les géodésiques périodiques].

En effet, si $K(t, x, y)$ est le noyau de $U(t)\Psi$, d'après le théorème de composition des opérateurs intégraux de Fourier $e^{-it_1P_1}, \ldots, e^{-it_kP_k}$, Ψ, on a: $WF'(K) \subset \{(t, \tau, x, \xi, y, \eta) \mid (x, \xi) = \varphi_t(y, \eta), \tau + p(x, \xi) = 0, (y, \eta) \in WF'(\Psi)\}$. Appliquant les théorèmes sur le comportement du WF par image directe et réciproque ([H2]), on obtient l'inclusion voulue, en particulier:

$$\mathrm{Supp\,Sing}(\mathrm{Tr}(U(t)\Psi)) \subset \big\{(t_1, \ldots, t_k) \in \mathsf{R}^k \mid \varphi^1_{t_1} \circ \cdots \circ \varphi^k_{t_k}(\lambda) = \lambda \quad (3.2)$$
$$\text{pour un } \lambda \in WF'(\Psi)\big\}.$$

LEMME 3.3. *Il existe* $\epsilon > 0$ *tel que, si* $\lambda \in WF'(\Psi)$, $\varphi_t(\lambda) = \lambda$ *avec* $t = (t_1, t')$ *et sous l'hypothèse* H_{p_1} *simplement* 2π*-périodique, alors si* $\|t'\| \leqslant \epsilon$, $t_1 \in 2\pi\mathbf{Z}$.

En effet, l'hypothèse faite sur H_{p_1} implique que H_{p_1} induit une action principale de S^1 sur $\dot{T}^*X$, laquelle action commute avec celle des H_{p_j}, $j \geqslant 2$.

Donc, pour $\lambda \in WF'(\Psi)$, et t' assez petit, cette action conjointe se sépare comme un produit, l'action de φ_t, étant localement libre puisqu'on est dans Ω_p, on en déduit le lemme.

De ces deux lemmes, on déduit que

$$\text{Supp Sing}(Z) \cap \{\|t'\| \leqslant \epsilon\} = 2\pi \mathsf{Z} \times \{0\},$$

on peut donc appliquer le:

LEMME 3.4. *Soit* $Z(t_1, t') \in \mathfrak{D}'(\mathsf{R} \times \mathsf{R}^{k-1})$ $(k \geqslant 1)$ *telle que* $Z(t_1 + 2\pi, t') = e^{-2\pi i \mu_0} Z(t_1, t')$, *que* Supp Sing $Z = 2\pi \mathsf{Z} \times \{0\}$ *et que, au voisinage de* 0, *on ait:* $Z(t_1, t') = \int_{\mathsf{R}^k} e^{-i(t_1\tau_1 + t'\tau')} a(\tau_1, \tau') d\tau_1 d\tau'$, *où a est un symbole classique en* (τ_1, τ'), *alors* $Z(t_1, t') = \sum_{q \in \mathsf{Z}} Z_q(t') e^{-i(q+\mu_0)t_1}$, *avec* $Z_q(t') = \int_{\mathsf{R}^{k-1}} e^{-i\tau' t'} \tilde{a}(q + \mu_0, \tau') d\tau'$, *où* $\tilde{a} - a$ *est un symbole régularisant.*

En effet, on a $Z_q(t') = 1/2\pi \int_{-\pi}^{+\pi} Z(t_1, t') e^{i(q+\mu_0)t_1} dt_1$; soit $\rho \in C_0^\infty(\mathsf{R})$ telle que Supp $\rho \subset]-2\pi, +2\pi[$ et $\sum_{l \in \mathsf{Z}} \rho(t_1 - 2\pi l) \equiv 1$, on a:

$$Z(t_1, t') = \sum_{l \in \mathsf{Z}} (\rho Z)(t_1 - 2\pi l, t') e^{-2\pi i \mu_0 l},$$

et donc:

$$Z_q(t') = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathsf{R}} (\rho Z)(t_1, t') e^{i(q+\mu_0)t_1} dt_1,$$

or

$$\rho Z(t_1, t') = (2\pi)^{-d} \int_{\mathsf{R}^k} e^{-i(t_1\tau_1 + t'\tau')} \tilde{a}(\tau_1, \tau') d\tau_1 d\tau',$$

où $\tilde{a} - a$ est régularisant; en effet ρZ admet la même singularité que Z à l'origine et n'en a pas d'autres. En appliquant deux fois Fourier, on en déduit le lemme.

On a donc obtenu que si $\hat{\rho} \in C_0^\infty(\mathsf{R}^{k-1})$ est à support dans $\|t'\| \leqslant \epsilon$, on a: $\hat{\rho} Z_q(t') = (2\pi)^{-d} \int_{\mathsf{R}^{k-1}} e^{-i\langle t' | \tau' \rangle} a(q + \mu_0, \tau') d\tau'$, où a est un symbole classique dont la partie principale a_0 est définie par:

$$a_0(q + \mu_0, \tau') = \int_{p^{-1}(q+\mu_0, \tau')} \tilde{\varphi}(q + \mu_0, p_2, \ldots, p_k) \Omega / dp_1 \wedge \cdots \wedge dp_k.$$

On est donc dans les conditions d'applications de 1.4, avec $\tau = q + \mu_0$, $\Lambda_\tau = \Lambda_q$. On obtient ainsi:

$$\sum\nolimits_1(q) = (2\pi)^{-d} \int_{(q+\mu_0)D} a_0(q + \mu_0, \tau') d\tau' + 0(q^{d-2}),$$

soit:

$$\sum\nolimits_1(q) = (2\pi)^{-d} \int_{p^{-1}((q+\mu_0)\times(q+\mu_0)D)} \tilde{\varphi}(q + \mu_0, p_2, \ldots, p_k) \Omega / dp_1.$$

Etude de $\sum_2(q)$: soit $a_q = \sum_2(q)$, on introduit la distribution $Z \in \mathfrak{D}'(\mathbf{R})$ définie par $Z(t_1) = \sum_q a_q e^{-i(q+\mu_0)t_1}$, on a: $Z(t_1) = \mathrm{Tr}(\varphi(P_1, \ldots, P_k)e^{-it_1P_1})$; le fait que P_1 n'est pas elliptique sur X n'est pas grave, car P_1 est elliptique dans $WF'(\varphi(P_1, \ldots, P_k))$. On peut donc appliquer l'étude microlocale du §2 et le fait que H_{p_1} est simplement périodique pour prouver que Supp Sing $z = 2\pi\mathbf{Z}$ et on a au voisinage de 0, $Z(t_1) = (2\pi)^{-d}\int_{\mathbf{R}} e^{-it_1\tau}b(\tau)d\tau$, où $b(\tau)$ est un symbole classique de partie principale $b_0(\tau) = \int_{p_1=\tau}\varphi(\tau, p_2, \ldots, p_k)\Omega/dp_1$, on refait alors les mêmes raisonnements que dans l'étude de $\sum_1(q)$ et on obtient ainsi $a_q = (2\pi)^{-d}b_0(q+\mu_0) + O(q^{d-2})$ et donc:

$$\sum_2(q) = (2\pi)^{-d}\int_{p_1^{-1}(q+\mu_0)}\varphi(q+\mu_0, p_2, \ldots, p_k)\Omega/dp_1 + O(q^{d-2}).$$

Regroupant les termes, on obtient le théorème 0.8.

4. Applications a l'equation de Schrödinger.

Exemple 0.4. Plaçons-nous dans les hypothèses de l'article de A. Weinstein dont nous reprenons les notations: A est un opérateur pseudo-différentiel autoadjoint positif elliptique sur une variété X de dimension d tel que $e^{2\pi iA} = cId$. Soit $H = A^2 + V$ où V est une fonction C^∞ réelle; on introduit l'opérateur $\overline{V} = 1/2\pi\int_0^{2\pi} e^{-itA}Ve^{itA}dt$, alors $[A, \overline{V}] = 0$ et si $\Lambda = \{(k+\lambda_0, \mu_j^k) \mid k \in \mathbf{N}, 1 \leqslant j \leqslant d_k\}$ est le spectre conjoint de A et $\overline{V}$, on a:

PROPOSITION 4.1. ([W]) *Si* $n(j,k) = d_1 + \cdots + d_{k-1} + j$, *on a: si* $\nu_1 \leqslant \nu_2 \leqslant \cdots \leqslant \nu_k \leqslant \cdots$ *est le spectre de* H, $\nu_{n(j,k)} = (k+\lambda_0)^2 + \mu_j^k + O(k^{-1})$.

Cette proposition s'applique par exemple aux espaces symétriques de rang 1 avec $A = \sqrt{\Delta_0 + a}$, a est un nombre > 0 bien choisi; $\{\nu_j\}$ est alors le spectre de l'opérateur de Schrödinger $\Delta_0 + a + V$. Appliquant le théorème 0.8 avec $P_1 = A$, $P_2 = A\overline{V}$, on obtient:

THEOREME 4.2. *Soit* $\hat{V} = 1/2\pi\int_0^{2\pi}(V \circ \varphi_t)dt$ *où* φ_t *est le flot hamiltonien du symbole principal de A supposé simplement périodique de période* 2π *alors si b, c sont deux nombres réels non valeurs critiques de* $\hat{V}$, *on a*:

$$\mathrm{Cardinal}\{\mu_j^k \in [b,c] \mid 1 \leqslant j \leqslant d_k\} = (2\pi)^{-d}\mathrm{vol}\{\hat{V}^{-1}([b,c])\}k^{d-1} + O(k^{d-2})$$

où vol *est l'élément de volume* $\Omega/d\sigma_A$ *sur* $\sigma_A^{-1}(1)$.

Ce résultat est conjecturé par Weinstein dans [W] où on montre seulement un résultat plus faible sur le comportement asymptotique de $\sum_{j=1}^{d_k}\rho(\mu - \mu_j^k)$ où $\rho \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ lorsque $k \to +\infty$.

Preuve du théorème 4.2. On a $p_1 = \sigma_A$, $p_2 = \sigma_A \cdot \hat{V}$; il est donc clair, comme p_1 ne s'annule pas que dp_1 et dp_2 sont indépendants hors des points critiques de $\hat{V}$. On a donc $W \subset \mathbf{R}^2$ définie par $W = \{x_2 = \mu x_1 \mid \mu$ valeur critique de $\hat{V}, x_1 > 0\}$.

Soit maintenant b, c non valeurs critiques de $\hat{V}$ et $C = \{bx_1 \leqslant x_2 \leqslant cx_1, x_1 > 0\}$. Par application du théorème 0.8, on obtient:

$$\text{Cardinal}\{(k+\lambda_0)\mu_j^k \in [(k+\lambda_0)b, (k+\lambda_0)c]\} = \text{Cardinal}\{\mu_j^k \in [b, c]\}$$

$$\text{Cardinal}\{\mu_j^k \in [b, c]\} = (2\pi)^{-d}\widetilde{\text{vol}}\{\sigma_A = k+\lambda_0, \hat{V} \in [b, c]\} + O(k^{d-2}).$$

Avec $\widetilde{\text{vol}} = \Omega/d\sigma_A$, utilisant l'homogénéité, on fait sortir $(k+\lambda_0)^{d-1}$, ce qui donne le résultat.

On peut aussi appliquer à cette situation le théorème 0.6:

THEOREME 4.3. *Soit $\epsilon > 0$ donné et $J_\epsilon = [\inf \hat{V} - \epsilon, \sup \hat{V} + \epsilon]$, alors il n'existe qu'un nombre fini de $\mu_{j,k} \notin J_\epsilon$.*

On applique 0.6 avec $C = \{x_2 = \mu x_1 \mid \mu \notin J_\epsilon\}$. Le résultat a été prouvé autrement par Guillemin ([G]).

Exemple 0.5. Soit X une variété riemannienne compacte de dimension d, Δ le laplacien sur X et $V \in C^\infty(X; \mathbf{R})$ un potentiel, qu'on suppose > 0 partout, ce qui ne restreint en rien les énoncés (ajouter une constante décale toutes les valeurs propres de celle-ci). On introduit l'opérateur de Schrödinger $H_\hbar = (\hbar^2/2)\Delta + V$, où $\hbar > 0$, on note $0 \leqslant \lambda_1(\hbar) \leqslant \lambda_2(\hbar) \leqslant \cdots$ les valeurs propres de $H_\hbar$ répétées un nombre de fois égal à leur multiplicité, on a l'estimation suivant lorsque $\hbar \to 0$:

THEOREME 4.4. *Soit E un nombre réel > 0, tel que E n'est pas une valeur critique de V, alors*: $\text{Cardinal}\{n \mid \lambda_n(\hbar) \leqslant E\} = (2\pi)^{-d}\text{vol}\{\hbar^2/2\|(x,\xi)\|^2 + V(x) \leqslant E\} + O(\hbar^{1-d})$, *où* $\text{vol} = \Omega$.

Cette estimation asymptotique est certainement bien connue, mais nous n'avons pas trouvé de référence donnant cette majoration du reste. On peut étendre ce théorème au cas d'une variété non compacte, par exemple sur $\mathbf{R}^3$, si on suppose $V \in C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$, le spectre négatif de $H_\hbar$ est discret et pour $E < 0$ non valeur critique de V, 4.4 est encore vrai; nous espérons détailler ceci ultérieurement.

Preuve du théorème 4.4. On montre ce théorème pour $\hbar = T/q$, $q \in \mathbf{N}$ et on fait ensuite varier T entre $[1, 2]$, ce qui donne toutes les valeurs de $\hbar$ dans $[0, 2]$. Il est clair que les estimations obtenues sont uniformes en $T \in [1, 2]$, et on en déduit le résultat.

On introduit sur $X \times \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ les opérateurs

$$P_1 = \sqrt{\frac{1}{2}\Delta_x - \frac{V(x)}{T^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}}$$

et $P_2 = (1/i)(\partial/\partial t)$. Le spectre conjoint de P_1 et P_2 est défini par:

$$\Lambda = \left\{ \left[\frac{q}{T}\sqrt{\lambda_n\left(\frac{T}{q}\right)}, q \right] \,\middle|\, q \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N} \right\}.$$

On a $p_1^2 = 1/2\|x, \xi\|^2 + (\tau^2/T^2)V(x)$, $p_2 = \tau$; dp_1 et dp_2 sont donc indépendants en dehors de $\{\xi = 0,\ dV(x) = 0\}$, on a donc $W = \{x_2 = Tx_1/V_0^{1/2} \mid V_0$ valeur critique de $V\}$. Soit $E > 0$, une valeur non critique de V et $C = \{x_1 \leqslant E^{1/2}T^{-1}x_2\}$, on a:

$$N(q) = \mathrm{Cardinal}\left\{\left[\frac{q}{T}\sqrt{\lambda_n\left(\frac{T}{q}\right)}\ , q\right] \in C\right\} = \mathrm{Cardinal}\left\{\lambda_n\left(\frac{T}{q}\right) \leqslant E\right\}.$$

On évalue $N(q)$ par le théorème 0.8, car le flot hamiltonien de p_2 qui est $\partial/\partial t$ est simplement périodique de période 2π:

$$N(q) = (2\pi)^{-(d+1)}\widetilde{\mathrm{vol}}\{p_1 \leqslant E^{1/2}T^{-1}q, p_2 = q\} + O(q^{d-1})$$

avec $\widetilde{\mathrm{vol}} = \Omega_x \times \Omega_t/d\tau = dx_1 \wedge \cdots \wedge d\xi_d \wedge dt$. On en déduit immédiatement:

$$N(q) = (2\pi)^{-d}\mathrm{vol}\left\{\left(\frac{q}{T}\right)^2 p_1^2 \leqslant E\right\} + O(q^{d-1}).$$

Ce qui prouve 4.4 pour $\hbar = T/q$, $q \in \mathbf{N}$.

Bibliographie

[C] J. Chazarain, *Formule de Poisson pour les variétés riemanniennes*, Inv. Math. **24** (1974), 65–82.

[CV] Y. Colin de Verdière, *Sur le spectre des opérateurs elliptiques à bicaracteristiques toutes périodiques*, C. R. Acad. Sci. Paris **286**, série A (1978), 1195–1197.

[D.G.] J. J. Duistermaat and V. Guillemin, *The spectrum of positive elliptic operators and periodic geodesics*, Inv. Math. **29** (1975) 39–79.

[D.H.] J. J. Duistermaat and L. Hörmander, *Fourier integral operators II*, Acta Math. **128** (1972), 184–269.

[G] V. Guillemin, *Some spectral results on rank one symmetric spaces*, Adv. in Math. **28** (1978), 129–137.

[H$_1$] L. Hörmander, *The spectral function of an elliptic operator*, Acta. Math. **121** (1968), 193–218.

[H$_2$] ———, *Fourier integral operators* I, Acta. Math. **127** (1971), 79–183.

[K] J. Kolk, *The Selberg trace formula and asymptotic behaviour of spectra*, thèse, Rijkuniversiteit, Utrecht (1977).

[S] R. Strichartz, *A functional calculus for pseudo differential operators*, Amer. J. of Math. **94** (1972), 711–722.

[W] A. Weinstein, *Asymptotic of eigenvalue clusters for the laplacian plus a potential*, Duke Math. Journal **44** (1977), 883–892.

Laboratoire de Mathématiques Pures—Institut Fourier dépendant de l'Université Scientifique de Médicale de Grenoble associé au C.N.R.S. B.P. 116, 38402 St Martin d'heres (France)