ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

Y. COLIN DE VERDIÈRE
M. FRISCH

Régularité lipschitzienne et solutions de l'équation des ondes sur une variété riemannienne compacte

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 9, nº 4 (1976), p. 539-565.
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1976_4_9_4_539_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.
4e année, t. 9, 1976, p. 539 à 565

RÉGULARITÉ LIPSCHITZIENNE ET SOLUTIONS DE L'ÉQUATION DES ONDES SUR UNE VARIÉTÉ RIEMANNIENNE COMPACTE

PAR Y. COLIN DE VERDIÈRE ET M. FRISCH

Introduction

Soit M une variété riemannienne compacte de dimension n et Δ le laplacien associé (Δ opérateur négatif). On considère une solution $u(x, t) : \mathrm{M} \times \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ de l'équation des ondes :

$$\Delta u = \partial^2 u / \partial t^2. \tag{0.1}$$

Notre point de départ est le problème suivant, posé par Y. Meyer à la suite de ses travaux sur les vibrations des sphères ([M1] et [M2]) : est-il possible de contrôler la croissance asymptotique de u quand $t \to +\infty$, à partir de son « observation » sur la variété M pendant un intervalle fini de temps [0, T] ? Plus précisément, T et α étant des réels positifs, existe-t-il un poids $\omega(t)$ tel que pour toute solution u de (0.1) lipschitzienne d'ordre α sur $\mathrm{M} \times [0, \mathrm{T}]$, on ait

$$\forall x \in \mathrm{M}, \quad \forall t \in \mathbf{R}, \quad |u(x, t)| \leqq \omega(t) \, \| u \|_{\Lambda^\alpha(\mathrm{M} \times [0, \mathrm{T}])} ?$$

Dans [F1] et [F2] l'un des auteurs de ce travail a résolu ce problème et trouvé des poids $\omega(t)$ explicites par les méthodes de l'analyse harmonique dans le cas où M est un tore plat ou une sphère munie de sa métrique canonique. Nous résumons ces résultats dans deux tableaux qui font apparaître des indices critiques; les réponses oui ou non se rapportent à l'existence du poids ω suivant les valeurs des paramètres T et α :

Tore $\mathbf{T}^n$

T \ α	$(n-1)/2$	
	non	oui

Sphère $\mathrm{S}^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$
(π distance des antipodes)

T \ α	$(n-1)/2$	
π	non / oui	oui

Dans cet article, nous nous proposons de traiter dans un cadre riemannien le problème de l'existence du poids $\omega(t)$. *Via* le théorème du graphe fermé c'est en fait uniquement un problème de régularité : si $u(x, t) \in \mathscr{D}'(M \times \mathbf{R})$ est une solution de (1) telle que $u \in \Lambda^\alpha(M \times [0, T])$, $u(x, t)$ est-elle pour tout $t \in \mathbf{R}$, une fonction continue sur M ?

L'organisation générale de l'article est la suivante : les résultats obtenus sont résumés au paragraphe 1 où l'on expose à ce propos quelques remarques géométriques sur leur application. Ces résultats, annoncés dans [C.F], dépendent de l'existence sur M d'arcs géodésiques sans points conjugués (ou n'ayant que des points conjugués de type assez « simple »). Contrairement aux travaux de Meyer ([M1] et [M2]) et à [F1] et [F2], on n'utilise pas directement la décomposition de $u(., t)$ en série de Fourier, mais le fait que l'opérateur qui fait passer des conditions initiales $u(x, 0)$ et $(\partial u/\partial t)(x, 0)$ à $u(x, t)$ est un opérateur intégral de Fourier de Hörmander associé à une transformation canonique étroitement liée au flot géodésique; en cela, on se rapproche plutôt du point de vue de [H] et de [D.G].

Au paragraphe 2, on rappelle le lien entre flot géodésique et points conjugués; cela permettra de traduire les hypothèses sur les points conjugués en terme de régularité lipschitzienne pour les solutions de l'équation des ondes après une étude générale (§ 4, 6 et 9) de la régularité lipschitzienne des distributions et opérateurs intégraux de Fourier. Cette régularité est liée à la géométrie de la projection canonique sur une variété X, de sous-variétés lagrangiennes coniques contenues dans le fibré cotangent $T^*(X)$. Le cas le plus simple est celui où cette projection est de rang constant et cela suffit pour obtenir tous les résultats du paragraphe 1, sauf le cas (iii) du théorème 1.2 qui est plus délicat : pour tenir compte des singularités-plis de l'application exponentielle, on est amené à étudier (§ 5) des intégrales oscillantes construites à l'aide de la fonction d'Airy, puis à déterminer leur régularité lipschitzienne *via* l'introduction des indices de la phase stationnaire étudiés par Arnold (§ 7).

Donc, les démonstrations des résultats « négatifs » (§ 8, construction de contre-exemples) et « positifs » [§ 9, propriétés de régularités pour toutes les solutions de (0.1)] n'utilisent que les paragraphes 4 et 7, sauf pour le résultat [th. 1.2 (iii)] qui fait intervenir les singularités-plis et nécessite en plus les paragraphes 5 et 6.

On peut faire une théorie L^p analogue. Résultats et démonstrations ont été rassemblés au paragraphe 10.

Enfin, au paragraphe 11, on s'intéresse à une réciproque : supposons que le problème posé ait une réponse positive pour α assez petit, que peut-on dire de la variété M ? On montre que, si de plus M est analytique réelle, alors le flot géodésique sur M est périodique.

PLAN DE L'ARTICLE

1. Résultats sur les solutions de l'équation des ondes et remarques géométriques sur leur application

Des résultats affirmatifs au problème énoncé sont contenus dans le :

THÉORÈME 1.1. — *Toute solution u de l'équation des ondes sur* M *telle que* $u \in \Lambda^\alpha(M \times [0, T])$ *est continue sur* $M \times \mathbf{R}$ *dans les cas suivants :*

(i) $T > 0$ *et* $\alpha > (n-1)/2$;

(ii) $\alpha > 0$ *et* $T > T_0 > 0$, *où* T_0 *est tel qu'il existe une isométrie* σ *sur* M *telle que pour toute géodésique* γ *de* M *et tout* t *réel, on ait*

$$\gamma(t+T_0) = \sigma(\gamma(t)).$$

Des résultats négatifs au problème énoncé sont contenus dans le :

THÉORÈME 1.2. — *Pour tout* ε *positif, il existe une solution u de l'équation des ondes sur* M *avec* $u \in \Lambda^\alpha(M \times [0, T])$ *et* $u(., T+\varepsilon) \notin L^\infty(M)$ *dans les cas suivants :*

(i) *Il existe sur* M *un arc géodésique de longueur* T *sans points conjugués et* $\alpha < (n-1)/2$.

(ii) *Il existe sur* M *un arc géodésique de longueur* T *ayant des points conjugués de multiplicité au plus k et* $\alpha < [n-(k+1)]/2$.

(iii) *Il existe sur* M *un arc géodésique* γ *de longueur* T, $\gamma : [0, T] \to M$ *défini par* $\gamma(t) = \exp_{x_0}(tu)$ *tel que les points conjugués* $\gamma(t_i)$ *de* $\gamma(0) = x_0$ *sur* γ *soient « de type-pli » au sens suivant : l'application* $\exp_{x_0} : T_{x_0}(M) \to M$ *a au point* $t_i u$ *une singularité-pli et* $\alpha < (n-1)/2-(1/6)$.

Remarque 1.3. — Dans le cas où $\alpha > n/2$, l'assertion [th. 1.1 (i)] est immédiate : si u est une solution de la demi-équation des ondes, on a

$$u(x, t) = \exp(-it\sqrt{-\Delta})\, u(x, 0),$$

où $\exp(-it\sqrt{-\Delta})$ est pour tous t et s réels, un opérateur unitaire sur $H^s(M)$. Par suite, il résulte du lemme de Sobolev que u est continue et bornée sur $M \times \mathbf{R}$. On verra au paragraphe 7 qu'il en va alors de même pour toute solution de l'équation des ondes (sans terme linéaire en t).

Remarque 1.4. — L'énoncé [th. 1.1 (ii)] s'applique au cas où le flot géodésique est périodique, de période T_0, avec $\sigma = \mathrm{Id}$. (d'après [D. G.] on sait caractériser ce cas par une propriété d'accumulation des valeurs propres de $\sqrt{-\Delta}$ au voisinage d'une progression arithmétique); il s'applique donc aux espaces symétriques compacts de rang 1 : sphères et projectifs canoniques. Il s'applique aussi à la sphère canonique avec $\sigma =$ antipodie et $T_0 = \pi$. On pourra comparer ces résultats à ceux de [M1] et [M2] et consulter le livre [BE] pour les propriétés des variétés à flot géodésique périodique.

Remarque 1.5. — L'énoncé [th. 1.2 (i)] s'applique avec T quelconque s'il n'y a pas de points conjugués sur M. Il en est ainsi pour les variétés riemanniennes ayant une métrique à courbure négative ou nulle et en particulier les tores plats. Mais on peut en fait prendre T quelconque chaque fois que le cardinal de $\pi_1(M)$ est infini : en effet, il est connu qu'il existe alors des arcs de géodésiques sur M de longueur arbitrairement longue sans points conjugués [si $x_0 \in M$, on choisit des lacets en x_0 minimisant la longueur dans chaque classe de $\pi_1(M; x_0)$].

Remarque 1.6. — Les remarques 1.4 et 1.5 permettent de déduire les tableaux concernant les tores plats et les sphères canoniques des théorèmes 1.1 et 1.2.

Remarque 1.7. — L'énoncé [th. 1.2 (ii)] s'applique avec T quelconque aux espaces symétriques de rang l avec $k = n-l$; en effet, la multiplicité des points conjugués est au plus $n-l$ ([HG], p. 180).

Remarque 1.8. — L'énoncé [th. 1.2 (iii)] s'applique à une variété analytique réelle M de dimension 2, avec T quelconque et $\alpha < 1/3$, pourvu que le flot géodésique sur M ne soit pas périodique. En effet, M. Berger nous a indiqué le résultat suivant [B] : s'il existe T tel que sur tout arc géodésique γ de longueur T, $\gamma(0)$ admette un point conjugué qui n'est pas de type-pli, alors le flot géodésique sur M est périodique de période $T' \leqq 2T$. D'ailleurs si pour toute géodésique γ, le premier point conjugué de $\gamma(0)$ sur γ n'est pas de type-pli, alors M n'est autre que la sphère S^2 ou le projectif P^2 muni de leur métrique canonique : c'est une conséquence du théorème de Green sur les Wiedersehen-Fläche [BE].

Remarque 1.9. — Dans le cas n quelconque, la géométrie de la situation est bien plus compliquée, mais il est vraisemblable que l'énoncé [th. 1.2 (iii)] avec T quelconque et $\alpha < (n-1)/2-(1/6)$ s'applique génériquement (*cf.* [W] et [A1], p. 9-11).

2. Lien entre points conjugués et flot géodésique

Si M est une variété riemannienne de dimension n, on identifie les espaces tangents et cotangents grâce à la 2-forme riemannienne. On désigne par $T^*(M)\setminus 0$ le fibré cotangent de M privé de sa section nulle. Rappelons la définition du flot géodésique

$\varphi_t : T^*(M)\setminus 0 \to T^*(M)\setminus 0$: si $v \in T^*_x(M)\setminus 0$, on considère la géodésique $t \to \gamma(t)$ sur M définie par

$$\gamma(0) = x, \qquad \frac{d\gamma}{dt}(0) = \frac{v}{\|v\|};$$

on pose alors $\varphi_t(x, v) = (x', v')$, où $x' = \gamma(t)$, $v' = \|v\|(d\gamma/dt)(t)$. Le flot φ_t est donc homogène et de degré 0 en v et si $\pi : T^*(M) \to M$ désigne la projection canonique du fibré cotangent sur sa base, on a par définition de l'application exponentielle :

$$\exp_x t\frac{v}{\|v\|} = \pi\varphi_t(x, v);$$

soit alors p l'ordre de conjuguaison des points x et x' le long de γ et r le rang de l'application $v \to \pi\varphi_t(x, v)$.

PROPOSITION 2.1. — *On a : $p+r = n-1$.*

C'est immédiat, sachant que $p+1$ est la dimension du noyau de la différentielle de l'application $v \to \exp_x t(v/\|v\|)$.

En particulier, si x et x' ne sont pas conjugués, on a $r = n-1$.

3. **Espaces de Lipschitz et opérateurs pseudo-différentiels** (en abrégé : o. p. d.)

Si $0 < \alpha < 1$, on définit classiquement l'espace de Lipschitz (local) $\Lambda^\alpha(\mathbf{R}^n)$: une application $f : \mathbf{R}^n \to C$ appartient à $\Lambda^\alpha(\mathbf{R}^n)$ si et seulement si pour tout compact K de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, il existe une constante $c_K \in \mathbf{R}^+$ telle que

$$|f(x)-f(y)| \leqq c_K \|x-y\|^\alpha \quad \text{pour tout } (x, y) \in K.$$

Si X est une variété on étend cette définition au moyen de cartes locales et on écrit $f \in \Lambda^\alpha_0(X)$ si f est à support compact (plus généralement si $\mathscr{F}$ est un espace de distributions, $\mathscr{F}_0$ désignera l'ensemble des distributions de $\mathscr{F}$ à support compact).

Nous ferons un usage constant du résultat important suivant :

THÉORÈME 3.1 (Giraud, Clerc et Courrèges [C.C]). — *Si* P *est un o. p. d. d'ordre* 0 *et si* $0 < \alpha < 1$, P *opère continûment de* $\Lambda^\alpha_0(X)$ *dans* $\Lambda^\alpha(X)$.

Ce théorème s'étend à toute valeur de α (non entière), si l'on généralise la notion d'espace de Lipschitz de la manière suivante :

Pour $n < \alpha < n+1$, $(n \in \mathbf{Z})$, on écrit $f \in \Lambda^\alpha(X)$ si pour tout $x_0 \in X$, il existe $v \in C^\infty_0(X)$ avec $v(x_0) \neq 0$ et un o. p. d. elliptique P d'ordre n avec $P(vf) \in \Lambda^\alpha(X)$.

Remarque 3.2. — Si Q est un o. p. d. d'ordre n quelconque, on a encore $Q(vf) \in \Lambda^{\alpha-n}(X)$.

En effet, P étant elliptique, on peut trouver un o. p. d. propre P_1 d'ordre $-n$ tel que $P_1 P = I+R$, où I est l'opérateur identité sur X et R un opérateur régularisant. On a donc

$$Q(vf) = (QP_1)(Pvf) - QRvf.$$

L'o. p. d. QP_1 est d'ordre 0 donc $(QP_1)(P\,vf) \in \Lambda^{\alpha-n}(X)$ d'après le théorème 3.1; comme R est régularisant, on a $QR\,vf \in C^\infty(X)$, ce qui prouve bien $Q\,vf \in \Lambda^{\alpha-n}(X)$.

De cette remarque, il résulte que le théorème 3.1 est bien valable en toute généralité (i. e. pour $\alpha \notin \mathbf{Z}$) et que notre définition des espaces de Lipschitz coïncide localement avec celles de [F1], [F2] et [S]; une autre manière d'énoncer cette remarque 3.2 est de dire qu'un o. p. d. d'ordre n opère continûment de $\Lambda_0^\alpha(X)$ dans $\Lambda^{\alpha-n}(X)$. On a plus généralement :

THÉORÈME 3.3. — *Si α et β sont des réels, α et $\alpha-\beta$ non entiers, un o. p. d.* P *opère continûment de*

(i) $\Lambda_0^\alpha(X)$ *dans* $\Lambda^{\alpha-\beta}(X)$ *si* P *est d'ordre* β;

(ii) $L_0^\infty(X)$ *dans* $\Lambda^{-\alpha}(X)$ *si* P *est d'ordre* α.

Il est clair qu'il suffit de vérifier ce résultat dans le cas où $X = \mathbf{R}^n$ et même pour un seul o. p. d. elliptique d'ordre β, ce qui ramène le théorème 3.3 aux résultats classiques sur les puissances fractionnaires du laplacien (*cf.* par exemple [S], p. 149, th. 4, ou plutôt sa démonstration pour le cas (ii)).

Le théorème montre que les espaces de fonctions $C^n(X)$, $L^\infty(X)$ et $\Lambda^\alpha(X)$ s'emboîtent de la manière suivante (n entier, ε positif assez petit) :

$$(3.4)\quad C^\infty(X) \subset \Lambda^{n+\varepsilon}(X) \subset C^n(X) \subset \Lambda^{n-\varepsilon}(X) \subset \ldots \subset \Lambda^\varepsilon(X) \subset C(X) \subset L^\infty_{\mathrm{loc}}(X) \subset \Lambda^{-\varepsilon}(X).$$

Comme l'objet de ce travail est de cerner des indices critiques, il n'est pas utile ici de définir les espaces de Lipschitz d'ordre entier; les emboîtements (3.4) permettent de ramener un problème d'indice critique pour les espaces $C^n(X)$ à un problème pour les espaces $\Lambda^\alpha(X)$. Ces derniers ont l'avantage, que nous exploiterons systématiquement, d'être des espaces « microlocaux » au sens suivant :

PROPOSITION 3.5. — *Soit u une distribution sur* X *et* $WF(u)$ *son front d'onde au sens de* [H]. *Si pour tout $\lambda \in T^*(X)\setminus 0$, il existe $v \in \Lambda^\alpha(X)$ avec $\lambda \notin WF(u-v)$, alors $u \in \Lambda^\alpha(X)$.*

Démontrons cette proposition, qui résulte du théorème 3.1 : comme un front d'onde est un fermé conique, si $\lambda \notin WF(u-v)$, il existe un voisinage conique V de λ avec $V \cap WF(u-v) = \emptyset$. Si $x_0 \in X$, grâce à la compacité de l'ensemble

$$S^*_{x_0}(X) = \{\lambda = (x_0, \xi) \in T^*(X);\ \|\xi\|_{x_0} = 1\},$$

on peut choisir $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in T^*_{x_0}(X)\setminus 0$ de manière à ce que leurs voisinages coniques correspondants $V_1, \ldots, V_k$ recouvrent le fibré cotangent d'un voisinage W de x_0 dans X, et trouver des fonctions $v_1, \ldots, v_k \in \Lambda^\alpha(X)$ avec $V_i \cap WF(u-v_i) = \emptyset$. On leur associe une partition de l'unité sur $T^*(W)\setminus 0$ composée de fonctions $a_1, \ldots, a_k$ homogènes de degré 0 vérifiant $\sum_1^k a_i = 1$, $\operatorname{supp} a_i \subset V_i$. Soient alors $P_1, \ldots, P_k$ des o. p. d. sur W

d'ordre 0 de symboles principaux $a_1, \ldots, a_k$ et choisis pour avoir $\sum_1^k P_i = \mathrm{Id}$ sur $\mathscr{E}'(W)$; soit enfin $w \in C_0^\infty(W)$ avec

$$wu = \sum_1^k P_i wu = \sum_1^k P_i w(u-v_i) + \sum_1^k P_i wv_i$$

pour des fonctions $v_i \in \Lambda^\alpha(X)$ vérifiant $WF(u-v_i) \cap V_i = \emptyset$.

De $WF(P_i) \subset V_i$, on déduit $P_i w(u-v_i) \in C^\infty(X)$ ([H], 2.5.9), et comme P_i est d'ordre 0, on a $\sum_1^k P_i wv_i \in \Lambda^\alpha(X)$. Cela montre bien que $wu \in \Lambda^\alpha(X)$, et donc que $u \in \Lambda^\alpha(X)$.

Pour terminer ce paragraphe, rappelons quelques conventions : si $A \subset X$ est un ensemble fermé, $u \in \Lambda^\alpha(A)$ signifie que u est lipschitzienne d'ordre α sur un voisinage de A. D'autre part, par o. p. d. classique d'ordre $\mu \in \mathbf{R}$ sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$, on entend un opérateur dont le symbole $P(x, \xi)$ est classique, i. e. admet un développement asymptotique $P \sim \sum_{i=0}^\infty P_{\mu-i}$, où $P_{\mu-i}(x, \xi) : \mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^n \setminus 0) \to \mathbf{C}$ est une fonction positivement homogène en ξ et de degré $\mu - i$. Ces notions s'étendent aux variétés. Ces symboles suffiront pour nos besoins et dans la suite, tous les symboles et tous les o. p. d. qui interviendront seront supposés classiques.

4. Régularité lipschitzienne des distributions de Fourier

a) Rappel de la définition de la classe $I^m(X, \Lambda_0)$ de Hörmander. — Si X est une variété de dimension n, on attache à tout réel m et à toute sous-variété lagrangienne conique fermée $\Lambda_0 \subset T^*(X) \setminus 0$ une classe $I^m(X; \Lambda_0)$ de distributions sur X appelées distributions de Fourier. Rappelons-en la définition [H] sous une forme qui suffira à nos besoins. On considère :

— un ouvert $X_0 \subset X$ assez petit pour être identifié moyennant une carte à un ouvert de $\mathbf{R}^n$;

— un entier N et une fonction phase $\varphi(x, \theta)$ non dégénérée définie dans un ouvert conique $U \subset X \times (\mathbf{R}^N \setminus 0)$, telle que l'application $i_\varphi : (x, \theta) \to (x, \varphi'_x)$ restreinte à l'ensemble C_φ des couples $(x, \theta) \in U$ tels que $\varphi'_\theta(x, \theta) = 0$ définisse un difféomorphisme sur un ouvert Λ_φ de Λ_0;

— un symbole (classique) $a(x, \theta) \in S^{m+n/4-N/2}(X, \mathbf{R}^N)$, ayant un support conique inclus dans un cône à base compacte de U.

A ces données on, associe la distribution A sur X définie au sens des intégrales oscillantes par

$$\langle A, v \rangle = \int \exp(i\varphi(x, \theta))\, a(x, \theta)\, v(x)\, dx\, d\theta \qquad \text{pour} \quad v \in C^\infty(X)$$

et on écrit $A(x) = \int \exp(i\varphi(x, \theta))\, a(x, \theta)\, d\theta$.

DÉFINITION 4.1. — Par $I^m(X; \Lambda_0)$, on désigne l'ensemble des distributions sur X qui sont des sommes localement finies de telles intégrales.

Remarque 4.2. — Le résultat fondamental est que si $\lambda_0 \in \Lambda_0$ et si φ est une fonction phase telle que $\lambda_0 \in \Lambda_\varphi \subset \Lambda_0$, pour toute distribution $u \in I^m(X; \Lambda_0)$ on peut trouver un symbole $a \in S^{m+n/4-N/2}$ tel que

$$\lambda_0 \notin \mathrm{WF}\left(u(x) - \int \exp(i\varphi(x, \theta))\, a(x, \theta)\, d\theta\right).$$

Convenons de dire que $u \in I^m(X; \Lambda_0)$ est elliptique d'ordre m en λ_0, s'il existe un tel choix de φ et a avec de plus $a_\mu(x_0, \xi_0) \neq 0$, où a_μ est le symbole principal de a, homogène d'ordre $\mu + n/4 - N/2$, et où $i_\varphi(x_0, \xi_0) = \lambda_0$.

Rappelons enfin comment opèrent les opérateurs pseudo-différentiels :

PROPOSITION 4.3. — *Si* P *est un o. p. d. sur* X *d'ordre* m', P *opère continûment de* $I_0^m(X; \Lambda_0)$ *dans* $I^{m+m'}(X; \Lambda_0)$.

Pour une variété lagrangienne donnée Λ_0, on va maintenant étudier en fonction de m la régularité lipschitzienne des distributions de $I^m(X; \Lambda_0)$.

b. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS DE L'INDICE CRITIQUE n_Λ. — Soit un ouvert conique $\Lambda \subset \Lambda_0$. On écrira $u \in I^m(X; \Lambda)$ si $u \in I^m(X; \Lambda_0)$ et si $\mathrm{WF}\, u \subset \Lambda$.

DÉFINITION 4.4. — On appelle indice critique n_Λ la borne supérieure de l'ensemble des réels m tels que

$$I^m(X; \Lambda) \subset C(X),$$

où C (X) désigne l'espace des fonctions continues sur X.

La différence $n_\Lambda - m$ mesure alors la régularité lipschitzienne :

THÉORÈME 4.5. — *Soit un réel* $\alpha \notin \mathbf{Z}$.

(i) *Si* $\alpha < n_\Lambda - m$, *on a* $I^m(X; \Lambda) \subset \Lambda^\alpha(X)$;

(ii) *Si* $\alpha > n_\Lambda - m$, *et si* $u \in I^m(X; \Lambda_0)$ *est elliptique sur* Λ, *alors* $u \notin \Lambda^\alpha(X)$.

Remarque 4.6. — Il résulte des emboîtements (3.4) et de ce théorème qu'on définit le même indice critique en remplaçant dans la définition 4.4 l'espace C (X) par $L^\infty_{loc}(X)$.

Démontrons maintenant le théorème, qui est une conséquence facile de la proposition 4.3 :

(i) Si $\alpha < n_\Lambda - m$, soit $\varepsilon > 0$ avec $m + \alpha + \varepsilon < n_\Lambda$ et soit P un o. p. d. propre elliptique d'ordre $\alpha + \varepsilon$. Si $u \in I^m(X; \Lambda)$, on a $P u \in I^{m+\alpha+\varepsilon}(X; \Lambda) \subset C(X) \subset \Lambda^{-\varepsilon}(X)$; donc d'après 3.3, on a $u \in \Lambda^{\alpha+\varepsilon-\varepsilon}(X) = \Lambda^\alpha(X)$.

(ii) Si $\alpha > n_\Lambda - m$, soit $\varepsilon > 0$ avec $m + \alpha - \varepsilon > n_\Lambda$. On a alors les non-inclusions suivantes :

$$(I^{m+\alpha-\varepsilon} \not\subset C(X)) \Rightarrow (I^{m+\alpha-\varepsilon} \not\subset \Lambda^\varepsilon(X)) \Rightarrow (I^m \not\subset \Lambda^\alpha(X)).$$

Donc il existe $v \in I^m(X; \Lambda)$ avec $v \notin \Lambda^\alpha(X)$. Mais si $u \in I^m(X; \Lambda)$ est elliptique sur Λ il est classique qu'il existe un o. p. d. propre P d'ordre 0 et une fonction $f \in C^\infty(X)$ avec $Pu = v+f$. On a alors $u \notin \Lambda^\alpha(X)$ en vertu du théorème 3.1.

On a donc démontré le théorème 4.5. Naturellement, celui-ci n'a d'intérêt que si l'on sait estimer l'indice critique.

c. Calcul de l'indice critique

Théorème 4.7. — (i) *Si la projection* $\pi_\Lambda : \Lambda \to X$ *est de rang constant* $n-k$, *on a* $n_\Lambda = -(n/4+k/2)$.

(ii) *Si pour tout* $\lambda \in \Lambda$ *on a* $n-k_2 \leqq \text{rang}\, \pi_\Lambda(\lambda) \leqq n-k_1$, *alors on a*

$$-\left(\frac{n}{4}+\frac{k_2}{2}\right) \leqq n_\Lambda \leqq -\left(\frac{n}{4}+\frac{k_1}{2}\right).$$

Pour une étude plus fine de cet indice n_Λ, on renvoie au paragraphe 6, où on le compare aux indices qui interviennent dans les développements de la méthode de la phase stationnaire.

Preuve du théorème 4.7. — Il suffit bien sur de démontrer l'assertion (ii). Remarquons d'abord que de l'hypothèse : rang $\pi_\Lambda \geqq n-k_2$, on déduit que toute distribution de $I^m(X; \Lambda)$ est somme localement finie d'intégrales comportant k_2 variables oscillantes ([H], 2.3.5). On peut donc raisonner sur une distribution du type

$$u(x) = \int_{\mathbf{R}^{k_2}} \exp(i\varphi(x, \theta)).a(x, \theta)\, d\theta.$$

avec $a \in S^{m-k_2/2+n/4}(X \times \mathbf{R}^{k_2})$. On a donc pour θ assez grand :

$$|a(x, \theta)| \leqq C|\theta|^{m-k_2/2+n/4}.$$

Si $m-k_2/2+n/4 < -k_2$, donc si $m < -(k_2/2+n/4)$, l'intégrale est absolument convergente, uniformément en x sur tout compact. On a donc $I^m(X; \Lambda) \subset L^\infty_{\text{loc}}$, ce qui prouve $n_\Lambda \geqq -(n/4+k_2/2)$, d'après la remarque 4.6.

Nous allons maintenant chercher à majorer n_Λ. Remarquons que l'ensemble des points de Λ où le rang de π_Λ atteint son maximum $n-k_1$ est un ouvert. Si λ_0 est un tel point, le rang de π_Λ est donc constant dans un voisinage de λ_0.

On sait alors que la sous-variété Λ coïncide au voisinage de λ_0 avec le fibré normal à une sous-variété $Y \subset X$ de dimension k_1. Soient $x' = (x_1, \ldots, x_{k_1})$, $x'' = (x_{k_1+1}, \ldots, x_n)$ des coordonnées locales sur X au voisinage de $\pi(\lambda_0)$, choisies de manière à ce que l'équation de Y soit $x' = 0$, On a alors $\Lambda = \Lambda_\varphi$ au voisinage de λ_0, avec $\varphi(x, \theta) = \sum_1^{k_1} x_j \theta_j$.

Considérons la distribution :

$$u(x) = \int_{\mathbf{R}^{k^1}} \exp\left(i\sum_1^{k_1} x_j\theta_j\right)|\theta|^\mu d\theta.$$

Si le réel μ est choisi de manière à avoir

$$-k_1 < \mu < -k_1 + 1,$$

l'intégrale est définie

– comme intégrale absolument convergente au voisinage de $\theta = 0$;

– comme intégrale oscillante quand $\theta \to \infty$.

Si V est un voisinage convenable de $x' = x'' = 0$, on a $u_{\restriction V} \in I^m(X; \Lambda)$ si $\mu = m + n/4 - k_1/2$. On remarque alors que la restriction de u à l'hypersurface $x'' = 0$ est une distribution homogène et de degré $-m - k_1 < 0$. Cette restriction est donc discontinue, et il en va de même pour u qui est indépendante de x''. Mais

$$(-\mu - k_1 < 0) \quad \Leftrightarrow \quad (m > -(n/4 + k_1/2))$$

et on a bien prouvé que $n_\Lambda \leqq -(n/4 + k_1/2)$.

Remarque 4.8. – Il nous a été loisible de supposer $\mu < -k_1 + 1$, puisque l'irrégularité de u augmente avec m; dans cette démonstration, on a utilisé un symbole homogène non seulement pour θ grand mais aussi au voisinage de $\theta = 0$. Grâce à l'hypothèse $\mu < -k_1 + 1$, l'intégrale était absolument convergente au voisinage de $\theta = 0$. On rencontrera dans la suite des raisonnements analogues où il ne sera pas possible de faire une telle hypothèse : il suffira alors de remplacer un symbole a_μ homogène de degré μ par son régularisé canonique $R(a_\mu)$ au sens de [G. C.] homogène et de même degré (ce régularisé n'existe pas toujours si μ est entier négatif, mais cette restriction n'a pas d'importance pour cerner les indices critiques). On n'aura ainsi modifié les intégrales qui interviendront que d'une contribution indéfiniment dérivable (transformée de Fourier d'une distribution à support compact).

5. Points conjugués de type-pli et fonctions phases

DÉFINITION 5.1. – *Si* X *et* Y *sont deux ouverts de* $\mathbf{R}^n$, *on dit qu'une fonction* $f \in C^\infty(X; Y)$ *admet une singularité-pli au point* $x_0 \in X$ *si les conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) $\text{dét}(f'(x_0)) = 0$;

(ii) $d(\text{dét}(f'))(x_0) \neq 0$;

(iii) $\text{Ker}(f'(x_0)) \cap \text{Ker}\, d(\text{dét}(f'))(x_0) = \{0\}$.

Cette définition est invariante par changement de coordonnées locales et s'étend au cas où X et Y sont des variétés. La terminologie s'explique de la manière suivante : pour un choix convenable des coordonnées locales au voisinage de x_0 et $f(x_0)$, f peut s'écrire

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1^2, x_2, \ldots, x_n),$$

on « plie » les parties $\{x_1 \geqq 0\}$ et $\{x_1 \leqq 0\}$ l'une sur l'autre le long de $\{x_1 = 0\}$ (pour plus de détails, consulter par exemple [G. G.], p. 87).

V. Guillemin et D. Schaeffer ont prouvé [G. S.] le :

THÉORÈME 5.2. — *Soit* $\Lambda' \subset T^*(X)\setminus 0$ *une sous-variété lagrangienne telle que la projection canonique* $\pi : \Lambda' \to X$ *admette au point* λ_0 *une singularité-pli, on peut représenter* Λ' *au voisinage de* λ_0 *par une fonction phase non dégénérée* $\Phi(x, \theta) = (\theta^3/3) - x_1\theta + u(x)$, *où* x_1 *est une coordonnée locale convenable au voisinage de* $\pi(\lambda_0)$ *et* $\lambda_0 = (0, du(0))$.

COROLLAIRE 5.3. — *Sous les mêmes hypothèses et supposons en plus que* $\xi\, dx_{\restriction \Lambda'}$ *ne s'annule pas au point* λ_0, *alors on peut prendre* $u(x)$ *comme seconde coordonnée locale au voisinage de* $\pi(\lambda_0)$ *et* Λ' *admet donc la fonction phase non dégénérée*

$$\Phi(x, \theta) = \frac{\theta^3}{3} - x_1\theta + x_2$$

au voisinage de λ_0.

Preuve du corollaire. — On a $i_\Phi^*\left(\sum_1^n \xi_i\, dx_i\right) = -\theta\, dx_1 + \sum_{i=1}^n (\partial u/\partial x_i)\, dx_i$ et $\lambda_0 = i_\Phi(0, 0)$. Les conditions $\theta^2 = x_1$ sur C_Φ et « $\xi\, dx_{\restriction \Lambda'}$ ne s'annule pas en λ_0 » impliquent qu'il existe $i \in \{2, \ldots, n\}$ tel que $(\partial u/\partial x_i)(0) \neq 0$, on conclut alors avec le théorème des fonctions implicites.

Plaçons-nous maintenant dans le cadre d'une variété riemannienne M. Les points conjugués étant liés aux singularités de l'application exponentielle (*cf.* § 2), il est naturel d'introduire la notion suivante :

DÉFINITION 5.4. — *On dira que* $x_0 = \exp_{y_0}(\eta_0)$ *est un point conjugué de type-pli de* y_0 *le long de la géodésique* $\gamma : t \to \exp_{y_0}(t\,\eta_0)$ *si* $\exp_{y_0} : T_{y_0}(M) \to M$ *a au point* η_0 *une singularité-pli.*

Remarque 5.5. — Dans le cas où $n = 2$, le conjugate locus de y_0 dans $T_{y_0}(M)$ [sous-ensemble des points de $T_{y_0}(M)$, où $\exp_{y_0}$ n'est pas un difféomorphisme local] est une sous-variété de dimension 1 admettant localement une équation en coordonnées polaires $r = \varphi(\theta)$. On obtient un point conjugué de type pli sous la condition $\varphi'(\theta_0) \neq 0$; en effet, le noyau de l'exponentielle est normal au vecteur d'angle polaire θ (seuls les champs de Jacobi normaux à une géodésique peuvent s'annuler). En projection sur M cela signifie que x_0 est un point régulier de l'enveloppe des géodésiques voisines de γ issues de y_0.

Notre but est le théorème suivant :

THÉORÈME 5.6. — *Soit* Λ *la sous-variété lagrangienne conique de* $T^*(M \times \mathbf{R})\setminus 0$ *définie par*

$$\Lambda = \{(\varphi_t(y_0, \eta), t, \tau) \in T^*(M \times \mathbf{R})\setminus 0 \mid \tau + \|\eta\|_{y_0} = 0\}$$

et supposons que $x_0 = \exp_{y_0}(t_0\,\eta_0)$ *(avec* $\|\eta_0\|_{y_0} = 1$*) soit un point conjugué de type-pli de* y_0 *le long de la géodésique* $\gamma(t) = \exp_{y_0}(t\,\eta_0)$, *alors* Λ *admet au voisinage de* $\lambda_0 = (\varphi_{t_0}(y_0, \eta_0), t_0, -1)$ *la fonction phase homogène non dégénérée*

$$\varphi(x, \mu, \theta) = \mu\left(\frac{\theta^3}{3} - x_1\theta + x_2\right) \qquad (\mu > 0,\ \theta \in \mathbf{R})$$

pour un choix convenable des coordonnées locales $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ *dans* $M \times \mathbf{R}$ *au voisinage de* (x_0, t_0).

LEMME 5.7. — *Soit* $\Lambda \subset T^*(X) \setminus 0$ *une sous-variété lagrangienne conique et* Λ' *une sous-variété lagrangienne de* $T^*(X) \setminus 0$. *Supposons que* $W = \Lambda \cap \Lambda'$ *soit une sous-variété de codimension* 1 *de* Λ *et de* Λ', *que* Λ' *admette au voisinage de* $\lambda_0 \in W$ *une fonction phase non dégénérée* $\Phi(x, \theta)$ *et que* $\alpha = \xi\, dx_{\restriction \Lambda'}$ *ne s'annule pas au point* λ_0, *alors* Λ *admet dans un voisinage conique de* λ_0 *la fonction phase homogène non dégénérée*

$$\varphi(x, \theta, \mu) = \mu(\Phi(x, \theta) - a),$$

où $W = i_\Phi(\{\Phi = a\} \cap C_\Phi)$ *au voisinage de* λ_0.

Preuve du lemme. — Λ étant conique, $\xi\, dx_{\restriction \Lambda}$ est identiquement nulle et donc W est au voisinage de λ_0 une hypersurface intégrale de α; comme $d(\Phi \circ i_\Phi^{-1}) = \alpha$, W est bien de la forme $i_\Phi(\{\Phi = a\} \cap C_\Phi)$ au voisinage de λ_0. Il reste à vérifier que φ est non dégénérée et que Λ_φ est le cône de base W. Or, on a

$$C_\varphi = \{(x, \theta, \mu) \mid (x, \theta) \in C_\Phi,\ \Phi(x, \theta) = a\}.$$

Pour montrer que φ est non dégénérée, il nous faut montrer que les équations $\partial\Phi/\partial\theta = 0$ et $\Phi = a$ sont indépendantes au point $i_\Phi^{-1}(\lambda_0)$; en effet, les $d(\partial\Phi/\partial\theta_i)$ sont indépendantes du fait que Φ est elle-même non dégénérée et $d\Phi \restriction_{C_\Phi}$ est non nulle car son image par i_Φ est α. Soit $W_a = i_\Phi^{-1}(W)$, on a

$$W_a = \{(x, \theta) \in C_\Phi \mid \Phi(x, \theta) = a\},$$

$$C_\varphi = W_a \times \mathbf{R}_+^* \qquad \text{et} \qquad i_\varphi(x, \theta, \mu) = \mu\, i_\Phi(x, \theta),$$

donc $\Lambda_\varphi = \mathbf{R}_+^*\, i_\varphi(W_a)$ est bien le cône de base W.

Preuve du théorème 5.6. — Introduisons la variété lagrangienne non conique

$$\Lambda' = \{(\varphi_u(y_0, \eta), t, -1) \in T^*(M \times \mathbf{R}) \setminus 0 \mid \|\eta\|_{y_0} = 1 \text{ et } t, u \in \mathbf{R}\};$$

on a $\lambda_0 \in \Lambda'$ et $\pi_{\Lambda'}$ admet en ce point une singularité-pli; en effet ,soit

$$F : \ (T_{y_0}(M) \setminus 0) \times \mathbf{R} \to \Lambda'$$

le difféomorphisme défini par

$$F(\xi, t) = \left(\varphi_{\|\xi\|}\left(y_0, \frac{\xi}{\|\xi\|}\right), t, -1\right),$$

on a $\pi_{\Lambda'} \circ F = \exp_{y_0} \times \mathrm{Id}_{\mathbf{R}}$ et il est clair que si f admet en x_0 une singularité-pli, $f \times \mathrm{Id}$ admet en tout point (x_0, z_0) une singularité-pli.

Soit $\alpha = \xi\, dx + \tau\, dt \restriction_{\Lambda'}$, α ne s'annule pas car $\tau = -1$ sur Λ', donc Λ' admet au voisinage de λ_0 la fonction phase $\Phi(x, \theta) = (\theta^3/3) - x_1\theta + x_2$.

Il suffit donc pour conclure de montrer que les hypothèses du lemme précédent sont vérifiées [avec $a = 0$, car $\Phi(0, 0) = 0$], c'est-à-dire que W est une sous-variété de dimension n de $T^*(M \times \mathbf{R})$: or

$$W = \{(\varphi_t(y_0, \eta), t, -1) \in T^*(M \times \mathbf{R}) \setminus 0 \mid \|\eta\|_{y_0} = 1\}$$

est l'image de $T_{y_0}(M)$ par le plongement

$$\xi \mapsto \left(\varphi_{\|\xi\|}\left(y_0, \frac{\xi}{\|\xi\|}\right), \|\xi\|, -1\right).$$

6. Lien entre l'indice critique n_Λ et les indices de la phase stationnaire d'Arnold (Exponant of Singularity [A2])

a. Introduction de l'indice M_Φ. — Soit d'abord $\Phi(x, \theta) \in C^\infty(U)$, où U est un ouvert de $X \times \mathbf{R}^k$, on s'intéresse aux intégrales oscillantes de la forme,

$$I(x, \tau) = \int \exp(i\tau\Phi(x, \theta))\, a(x, \theta)\, d\theta$$

quand $\tau \to \infty$, où $a \in C_0^\infty(U)$; si Φ n'a pas de points critiques en θ, $I(x, \tau) = O(\tau^{-\infty})$ uniformément en x; si Φ n'a que des points critiques non dégénérés en θ, $I(x, \tau) = O(\tau^{-k/2})$ uniformément en x.

Définition 6.1. — On pose

$$M_\Phi = \inf\{\alpha \in \mathbf{R} \mid \forall a \in C_0^\infty(U),\ I(x, \tau) = O(\tau^{\alpha - k/2}) \text{ uniformément en } x\}.$$

Remarque 6.2. — Le facteur $-k/2$ permet à M_Φ d'être invariant par l'adjonction à Φ d'une forme quadratique en θ' non dégénérée (et dépendant éventuellement de x).

Proposition 6.3. — *Si* $\Phi(x, \theta) = \theta^3/3 - x_1\theta$, *on a* $M_\Phi = 1/6$.

En effet, notons $Ai(\xi)$ la transformée de Fourier de $e^{i\theta^3/3}$ (fonction de Airy). Il est classique ([WA], p. 124 et suivantes) que $Ai(\xi)$ est une fonction réelle, entière [on a $Ai''(\xi) + \xi Ai(\xi) = 0$] et bornée sur $\mathbf{R}$. L'intégrale

$$I(x, \tau) = \int \exp(i\tau\theta^3/3) \exp(-i\tau x_1\theta)\, a(x, \theta)\, d\theta$$

peut s'écrire à l'aide de la formule de Parseval :

$$I(x, \tau) = C\tau^{-1/3} \int Ai(\tau^{-1/3}\xi)\, \hat{a}(x, \xi + \tau x_1)\, d\xi,$$

où C dépend des normalisations et $\hat{a}$ désigne la transformée de Fourier de a par rapport à θ. Par suite

$$\left|\int \mathrm{A}\, i(\tau^{-1/3}\xi)\hat{a}(x, \xi+\tau x_1)\, d\xi\right| \leqq \mathrm{C}\int |\hat{a}(x, \xi)|\, d\xi = \mathrm{O}(1),$$

car $\hat{a}$ est à décroissance rapide en ξ, uniformément en x.

On en déduit $\mathrm{M}_\Phi \leqq 1/6$. Mais d'autre part on a $\mathrm{M}_\Phi \geqq 1/6$ car l'intégrale

$$\mathrm{I}(0, \tau) = \int \exp\left(i\tau\frac{\theta^3}{3}\right) a(0, \theta)\, d\theta$$

est de l'ordre de $\tau^{-1/3}$ quand τ tend vers l'infini si $a(0, 0) \neq 0$ [pour le voir, appliquer la formule de Parseval et observer que $\mathrm{A}\, i(0) \neq 0$].

b. Introduction de l'indice m_Φ. — Si $f(\theta)$ est une fonction analytique en θ, les intégrales oscillantes

$$\mathrm{J}(\tau) = \int \exp(i\tau f(\theta))\, a(\theta)\, d\theta,$$

où $a \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbf{R}^k)$ admettent un développement asymptotique de la forme

$$\mathrm{J}(\tau) = \sum_{\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots} \tau^{\alpha_i} \mathrm{P}_i(\log(|\tau|)),$$

où les P_i sont des polynômes et les α_i des nombres rationnels, ce développement ayant lieu au sens des symboles en τ; pour le montrer, on utilise le théorème de résolution des singularités d'Hironaka qui permet de se ramener à $f(\theta_1, \ldots, \theta_k) = \theta_1^{a_1} \ldots \theta_k^{a_k}$ où les a_i sont entiers.

Il est alors naturel pour une fonction $\Phi(x, \theta)$ analytique en θ pour chaque valeur de x, d'introduire un indice m_Φ :

Définition 6.4. — On pose

$$m_\Phi = \sup\Big\{\alpha_1 \in \mathbf{R} \,\Big|\, \exists\, a \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbf{R}^k) \text{ et } x_0' \in \mathrm{X} \text{ tels que } \tau^{k/2}\int \exp(i\tau\Phi(x_0', \theta))\, a(\theta)\, d\theta$$

$$\text{admette un développement asymptotique de la forme } \sum_{\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots} \tau^{\alpha_i} \mathrm{P}_i(\log(|\tau|) \text{ avec } \mathrm{P}_1 \neq 0\Big\}.$$

Remarque 6.5. — Naturellement si Φ n'est défini que sur un ouvert de $\mathrm{X} \times \mathbf{R}^k$, on donne une définition analogue pour m_Φ et M_Φ en localisant le support des fonctions $a(x, \theta)$ et $a(\theta)$.

c. Lien entre les indices. — Il est clair d'après ces définitions que l'on a toujours $m_\Phi \leqq \mathrm{M}_\Phi$. Dans le cas où $\Phi(x, \theta) = \theta^3/3 - x_1\theta$, on voit en prenant $x_0' = 0$ que $m_\Phi = 1/6 = \mathrm{M}_\Phi$. On peut d'ailleurs montrer ([D], p. 266) que ces deux indices sont égaux

(et les calculer) chaque fois que $\Phi(x, \theta)$ est le déploiement universel d'une singularité simple $\Phi(x'_0, \theta)$ de la classification d'Arnold [A2]; en fait, on en connaît pas de cas où $m_\Phi \neq M_\Phi$. Si $\Lambda \subset T^*(X) \setminus 0$ est un ouvert d'une variété lagrangienne conique, le théorème suivant relie l'indice n_Λ et les indices précédents :

THÉORÈME 6.6. — *Supposons que* $\Lambda = \Lambda_\varphi$, *où est une fonction phase non dégénérée s'écrivant* $\varphi(x_1, x', \tau, \theta) = \tau(x_1 - \Phi(x', \theta))$, *où* $(x_1, x') \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1}$ *sont des coordonnées locales sur* X, (τ, θ) *les variables oscillantes,* τ *réel positif étant la variable d'homogénéité et* θ *variant dans un ouvert relativement compact* Ω *de* $\mathbf{R}^k$. *Alors on a*

$$-\left(\frac{1}{2}+\frac{n}{4}+M_\Phi\right) \leqq n_\Lambda \leqq -\left(\frac{1}{2}+\frac{n}{4}+m_\Phi\right).$$

Remarque 6.7. — Toute variété lagrangienne admet localement une fonction phase de ce type : on sait en effet ([H], p. 135) qu'il existe une représentation locale par la fonction phase $\sum_1^n x_i \xi_i - H(\xi)$ pour des coordonnées locales canoniques (x, ξ) bien choisies. Au voisinage de $\xi_i \neq 0$, on pose alors $\tau = \xi_i$ et $\theta_j = \xi_j/\xi_i$.

Conséquence 6.8. — Il est aisé de déduire le théorème 4.7 du théorème 6.8 : en effet, si Φ est linéaire en θ, on a $M_\Phi = m_\Phi = k/2$.

Conséquence 6.9. — Dans la situation décrite au théorème 5.6, on a

$$n_\Lambda = -\left(\frac{n+1}{4}+\frac{2}{3}\right)$$

au voisinage d'un point λ_0 de Λ correspondant à un point conjugué de type-pli.

Preuve du théorème 6.6. — L'inégalité $n_\Lambda \geqq -[(1/2)+(n/4)+M_\Phi]$ se démontre comme l'inégalité correspondante du théorème 4.7 : une distribution u de $I^m(X; \Lambda)$ est la somme d'une fonction C^∞ et d'une intégrale oscillante

$$\int_{\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^k} \exp(i\tau(x_1 - \Phi(x', \theta)))\, a(x_1, x', \tau, \theta)\, d\tau\, d\theta; \tag{6.10}$$

a étant un symbole en τ d'ordre $\mu = m+(n/4)-[(k+1)/2]+k$; cet ordre μ est compatible avec les définitions du paragraphe 4; on a fait un passage en coordonnées polaires dans une intégrale à $k+1$ variables oscillantes. Pour $\alpha > M_\Phi$, l'intégrale 6.10 calculée en θ est un $0(\tau^{\mu+\alpha-k/2})$ et donc l'intégrale en τ est absolument convergente pour $\mu+\alpha-(k/2) < -1$; donc si $m < -[(1/2)+(n/4)+M_\Phi]$, on a $u \in L^\infty_{loc}$, ce qui prouve l'inégalité cherchée.

Pour prouver l'autre, considérons la distribution

$$u(x) = \int \exp(i\tau(x_1 - \Phi(x', \theta)))\, a(\theta)\, R(|\tau|^\mu)\, d\tau\, d\theta, \tag{6.11}$$

où $R(|\tau|^{\mu})$ est le régularisé homogène de la distribution $|\tau|^{\mu}$ (μ non entier négatif); la fonction $a \in C_0^{\infty}$, le réel α_1 et le point x'_0 sont choisis pour avoir

$$\tau^{k/2} \int \exp(i\tau\Phi(x'_0, \theta))\, a(\theta)\, d\theta \sim \sum_{\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots} \tau^{\alpha_i} P_i(\log|\tau|).$$

D'après ([H], p. 127) on peut définir la restriction de la distribution u à la sous-variété $x' = x'_0$, car

$$\{WF\, u \cap N(x' = x'_0)\} \subset \{\Lambda_{\varphi} \cap N(x' = x'_0)\} = \emptyset,$$

où $N(x' = x'_0)$ désigne le fibré normal à $\{x' = x'_0\}$.

On peut montrer facilement que cette restriction $u(x_1, x'_0)$ est obtenue en remplaçant x' par x'_0 dans l'intégrale oscillante (6.11).

Calculant cette intégrale modulo des termes plus réguliers, il vient :

$$u(x_1, x'_0) = \int \exp(i\tau x_1)\, R(|\tau|^{\mu+\alpha_1-k/2})\, P_1(\log|\tau|)\, d\tau.$$

Dérivant les formules donnant la transformée de Fourier de $|\tau|^{\lambda} \log|\tau|$ [G. C.] on montre l'existence de polynômes Q_+ et Q_- tels que

$$u(x_1, x'_0) = \sum_{\pm} (x_1 \pm i0)^{-(\mu+\alpha_1-k/2+1)}\, Q_{\pm}(\log(x_1 \pm i0)).$$

Donc u n'est pas continue si $\mu + \alpha_1 - (k/2) + 1 > 0$, ce qui prouve $n_{\Lambda} \leqq -[(1/2) + (n/4) + m_{\Phi}]$

7. Régularité lipschitzienne des opérateurs intégraux de Fourier

Soient X et Y deux variétés de dimension n et $\chi : T^*(Y)\setminus 0 \to T^*(X)\setminus 0$ un difféomorphisme canonique homogène. On note Λ_{χ} la sous-variété lagrangienne conique de $T^*(X \times Y)$ définie par

$$\Lambda_{\chi} = \{(\chi(y, \eta), y, -\eta) \mid (y, \eta) \in T^*(Y)\setminus 0\}.$$

Soit A un opérateur continu de $C_0^{\infty}(Y)$ dans $\mathscr{D}'(X)$ et K_A son noyau distribution.

DÉFINITION 7.1 [H]. — On écrit $A \in I^m(X, Y; \chi)$ si $K_A \in I^m(X \times Y, \Lambda_{\chi})$ et on dit alors que A est un opérateur intégral de Fourier (en abrégé O.I.F.) d'ordre m. On s'intéresse ici aux couples (α, β) tels que $A(\Lambda_0^{\alpha}(Y)) \subset \Lambda^{\beta}(X)$ et on va introduire l'analogue de la définition 4.4.

DÉFINITION 7.2. — Si Γ est un ouvert conique de Λ_{χ} on pose

$$C_{\Gamma} = \sup\{m \in \mathbf{R} \mid \forall A \in I^m(X, Y; \chi) \text{ tel que } WF'(K_A) \subset \Gamma \text{ et } \forall u \in C_0(Y), A u \in C(X)\}.$$

THÉORÈME 7.3. — *Soient un opérateur* $A \in I^m(X, Y; \chi)$ *et des réels* α *et* β *non entiers tels que* $m + \beta < C_{\Gamma} + \alpha$; *si* $WF'(K_A) \subset \Gamma$ *et si* $u \in \Lambda_0^{\alpha}(Y)$, *alors* $A u \in \Lambda^{\beta}(X)$.

Remarque 7.4. — Dans cet énoncé, on peut remplacer l'hypothèse $WF'(K_A) \subset \Gamma$ par l'hypothèse $WF(u) \subset \pi_Y \Gamma$, où π_Y désigne la projection canonique de $T^*(X \times Y)$ sur $T^*(Y)$.

La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème 4.5, sachant que si P est un o. p. d. propre sur X (resp. Y) d'ordre m', on a $AP \in I^{m+m'}(X, Y; \chi)$ [resp. $PA \in I^{m+m'}(X, Y; \chi)$]. Nous allons calculer l'indice critique sous une hypothèse de rang constant.

THÉORÈME 7.5. — *Supposons que le rang de la projection canonique* $\pi : \Gamma \to X \times Y$ *soit constant et égal à* $2n-k$, *alors* $C_\Gamma = -(n-k)/2$.

Remarque 7.6. — En particulier, si $\chi = \mathrm{Id}$, on a $k = n$ et $C_\Gamma = 0$; c'est le cas des pseudo-différentiels; le résultat obtenu ainsi est toutefois moins précis que le théorème 3.1, car il ne donne pas de renseignements sur ce qui se passe pour l'indice critique; de plus, cela ne donnerait pas une autre démonstration de 3.1 (qui est utilisée pour définir l'indice critique).

Démonstration du théorème. — On va d'abord prouver que $C_\Gamma \geqq -(n-k)/2$. Il faut pour cela montrer que si $u \in C_0(Y)$ et si A est d'ordre $m < -(n-k)/2$, on a $A\,u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(X)$ [pourvu que $WF'(A) \subset \Gamma$]. Comme on a

$$A\,u(x) = \int K_A(x, y)\,u(y)\,dy,$$

il suffit de montrer que K_A est intégrable en y uniformément en x sur tout compact de $X \times Y$. Pour cela, remarquons d'abord que si l'on pose $\Lambda_x = \Gamma^{-1}(T^*_x \setminus 0)$, la projection canonique $\pi_Y : \Lambda_x \to Y$ est de rang constant $n-k$ et donc que Λ_x est localement le fibré normal à une sous-variété de Y de dimension $n-k$. Nous noterons $y' = F(x, y'')$ l'équation de celle-ci pour un choix convenable des coordonnées sur $Y : y' = (y_1, \ldots, y_k)$; $y'' = (y_{k+1}, \ldots, y_n)$; choix qui peut rester localement fixe en x. Pour tout x_0 de X, il existe un voisinage de x_0 dans X dans lequel $F(x, y'')$ est une fonction C^∞ de x et y''. D'autre part, d'après l'hypothèse de rang de π, la variété Γ est localement le fibré normal à une sous-variété de $X \times Y$. Cette dernière contient la sous-variété $y' = F(x, y'')$ et coïncide donc avec elle pour des raisons de dimension. On a montré que le noyau K_A est somme localement finie d'intégrales du type :

$$B(x, y) = \int \exp\left(i \sum_{j=1}^{k} \theta_j (y_j - F_j(x, y''))\right) a(x, y, \theta)\,d\theta,$$

où a est un symbole d'ordre $\mu = m + (n/2) - (k/2)$.

Si on pose $z = y' - F(x, y'')$, y'' et z définissent sur Y un système de coordonnées locales dépendant de x et on note $a_\mu(x, z, y'', \theta)$ le symbole principal de a. On sait ([H], p. 116) que modulo des termes plus régularisants, $B(x, y)$ est obtenu en remplaçant a par a_μ et en restreignant a_μ à $z = 0$:

$$B(x, y) = \int \exp(i \sum_j \theta_j z_j)\, a_\mu(x, 0, y'', \theta)\,d\theta \,(\mathrm{mod}.\, I^{m-1}).$$

On remarque que B dépend différentiablement de y'' et est homogène de degré $-(\mu+k)$ en z. Si donc $-\mu-k > -k$, ce qui est équivalent à $m < -(n-k)/2$, $B(x, y)$ et donc *a fortiori* $K_A(x, y)$ est bien localement intégrable en y uniformément en x sur tout compact de $X \times Y$, puisque le changement de variable $(y', y'') \mapsto (z, y'')$ est de jacobien 1.

Réciproquement, soit $\lambda_0 = (x_0, \xi_0) \in \Gamma(T^*(Y) \setminus 0)$ et $\Lambda_0 = \Gamma^{-1}(T^*_{x_0} \setminus 0)$. D'après l'hypothèse sur Γ, le rang de la projection de Λ_0 sur Y est constant et égal à $n-k$. Choisissons $A \in I^m(X, Y; \Gamma)$ elliptique en $(\lambda_0, \chi^{-1}(\lambda_0))$ avec $m > (n-k)/2$ et $u \in I^{m'}(Y, \Lambda_0)$ elliptique en $\chi^{-1}(\lambda_0)$ avec $m' < -(n/4)-(k/2)$ de façon que $m+m' > -3n/4$ ce qui est manifestement possible. D'après les calculs d'indices critiques pour les distributions intégrales de Fourier (4.7), u est continue, $WF'(K_A) \subset \Gamma$ et $A u \in I^{m+m'}(X, T^*_{x_0} \setminus 0)$ n'est pas continue, donc $C_\Gamma \leqq m$ qui peut être choisi aussi proche qu'on veut de $-(n-k)/2$, ce qui montre que $C_\Gamma \leqq -(n-k)/2$.

Nous allons enfin donner une version « microlocale » de ces résultats :

PROPOSITION 7.7. — *Soit* $A \in I^m(X, Y; \chi)$, $\lambda_0 \in T^*(Y) \setminus 0$ *et* Γ *un voisinage conique de* $(\lambda_0, \chi(\lambda_0))$ *dans le graphe de* X, *alors si* $m+\beta < C_\Gamma + \alpha$ *et si* $u \in \Lambda^\alpha$ *au voisinage de* λ_0, *alors* $A u \in \Lambda^\beta$ *au voisinage de* $\chi(\lambda_0)$.

Démonstration. — On a $u = u_0 + u_1$ avec $u_0 \in \Lambda^\alpha(Y)$ et $\lambda_0 \notin WF(u_1)$. Donc d'après 7.3, on a $A u_0 \in \Lambda^\beta(X)$ et comme on a $A u = A u_0 + A u_1$ et que $\chi(\lambda_0) \notin WF(A u_1)$, la proposition est démontrée.

8. Problème de Cauchy pour la demi-équation des ondes et démonstration des résultats négatifs

On pose le problème de Cauchy pour la demi-équation des ondes sur une variété riemannienne compacte M :

$$\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t} + \sqrt{-\Delta}\right) u(x, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = u_0(x).$$

Sa résolution en termes d'O.I.F. est une application classique de [H] et [D. H.] (*cf.* [D. G.] par exemple), posant

$$C = \{(x, \xi, t, \tau, y, \eta) \mid \tau + \|\xi\|_x = 0, (x, \xi) = \varphi_t(y, \eta), (y, \eta) \in T^*(M) \setminus 0\},$$

l'ensemble C′ déduit de C par le changement de η en $-\eta$ est une sous-variété lagrangienne conique de $T^*(M \times \mathbf{R} \times M) \setminus 0$. Si A est un opérateur continu de $C^\infty(M)$ dans $\mathscr{D}'(M \times \mathbf{R})$, on écrit $A \in I^m(M \times \mathbf{R}, M; C)$ si $K_A \in I^m(M \times \mathbf{R} \times M; C')$. Avec ces notations, on a :

THÉORÈME 8.1. — *Il existe un O.I.F. noté* $\exp(-it\sqrt{-\Delta}) \in I^{-1/4}(M \times \mathbf{R}, M; C)$ *tel que la solution du problème précédent soit donnée par*

$$u(x, t) = \exp(-it\sqrt{-\Delta})\, u_0(x).$$

COROLLAIRE 8.2. — *Pour tout t_0 fixé, désignant pour* $\exp(-it_0\sqrt{-\Delta_0})$ *l'opérateur défini par*

$$u(x, t_0) = \exp(-it_0\sqrt{-\Delta})u_0(x),$$

on a $\exp(-it_0\sqrt{-\Delta}) \in I^0(M, M; \varphi_{t_0})$.

COROLLAIRE 8.3. — *Si Λ_0 est une sous-variété lagrangienne conique de* $T^*(M)\setminus 0$ *et* $u_0 \in I^m(M; \Lambda_0)$, *on a* $u(x, t_0) \in I^m(M; \varphi_{t_0}(\Lambda_0))$ *et* $u(x, t) \in I^{m-1/4}(M \times \mathbf{R}; \Lambda)$ *avec*

$$\Lambda = \{(x, \xi, t, \tau) \mid \tau + |\xi|_x = 0, (x, \xi) = \varphi_t(y, \eta), (y, \eta) \in \Lambda_0\}.$$

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le théorème 1.2 : commençons par le vérifier sous l'hypothèse (i) de 1.2 :

Il suffit pour cela de construire une solution u de l'équation des ondes sur M telle que :

(*a*) $u(x, 0) \notin L^\infty(M)$;

(*b*) $u(x, t) \in \Lambda^{((n-1)/2)-\varepsilon}(M \times]\eta', T[)$, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout η' avec $0 < \eta' < T$.

On en déduit immédiatement les assertions du théorème en inversant le sens du temps et en remarquant que s'il existe sur M un arc de géodésique γ de longueur T sans points conjugués, il en existe aussi un de longueur strictement supérieure à T.

Pour faire notre construction, choisissons dans $\Lambda_0 = T^*_{x_0}(M)\setminus 0$ un voisinage ouvert conique Λ de $(x_0, \eta_0) = (\gamma(0), (d\gamma/dt)(0))$ tel que toute géodésique γ' définie par

$$\gamma'(0) = x_0 \qquad \text{et} \qquad \frac{d\gamma'}{dt}(0) = \frac{\eta}{\|\eta\|}$$

avec $(x_0, \eta) \in \Lambda$ ne contienne pas de points conjugués sur $[0, T]$. Si $u_0 \in I^m(M; \Lambda)$ on a alors

$$u(x, t) \in I^{m-1/4}(M \times]\eta', T[; \Lambda')$$

avec

$$\Lambda' = \{(\varphi_t(x_0, \eta), t, -\|\eta\|_x) \mid (x_0, \eta) \in \Lambda \text{ et } t \in]\eta', T[\}.$$

Remarquons que la projection $\pi : \Lambda \to M$ est de rang 0. Par contre le rang de la projection de Λ' sur $M \times]\eta', T[$ est n : considérant le difféomorphisme $i(t, \eta) = (\varphi_t(x_0, \eta), t, -\|\eta\|_x)$ de $]\eta', T[\times \Lambda$ sur Λ', on se ramène à montrer que le rang de l'application

$$(t, \eta) \mapsto (\pi\varphi_t(x_0, \eta), t)$$

est n. Or, si $t \in]\eta', T[$, x_0 et $\pi\varphi_t(x_0, \eta)$ ne sont pas conjugués et donc l'application $\eta \mapsto \pi(\varphi_t(x_0, \eta))$ est de rang $n-1$ d'après 2.1. Le rang cherché est donc $n-1+1 = n$.

Choisissons alors m pour que

$$-\frac{n}{4} - \frac{n}{2} < m < -\frac{n}{4} - \frac{n}{2} + \varepsilon$$

et soit $u_0 \in I^m(M; \Lambda)$ elliptique en (x_0, η_0), on a alors $u_0 \notin L^\infty(M)$, car d'après 4.7 on a $n_\Lambda = -(n/4)-(n/2)$. Mais on a

$$n_{\Lambda'} = -\left(\frac{n+1}{4}+\frac{1}{2}\right)$$

et l'inégalité

$$m-\frac{1}{4} < n_{\Lambda'} - \left(\frac{n-1}{2}-\varepsilon\right)$$

permet d'affirmer d'après 4.5 que l'on a bien $u(x, t) \in \Lambda^{((n-1)/2)-\varepsilon}(M \times]\eta', T[)$.

La démonstration de l'assertion (ii) est identique à celle de l'assertion (i) : si pour tout $t \in]\eta', T[$ les points conjugués sont d'ordre k au plus, le rang de la projection $\pi : \Lambda' \to M \times]\eta', T[$ est supérieur ou égal à $n-k$ et donc

$$n_{\Lambda'} \geqq -\left(\frac{n+1}{4}+\frac{k+1}{2}\right).$$

Avec le même choix de m que précédemment, on a

$$m-\frac{1}{4} < -\frac{n}{4}-\frac{n}{2}-\frac{1}{4}+\varepsilon \leqq n_{\Lambda'} - \left(\frac{n-1}{2}-\frac{k}{2}-\varepsilon\right)$$

et donc, d'après 4.5, $u(x, t) \in \Lambda^{(n-1)/2-k/2-\varepsilon}(M \times]\eta', T[)$.

De même pour l'assertion (iii), avec

$$n_{\Lambda'} \geqq -\left(\frac{n+1}{4}+\frac{2}{3}\right)$$

d'après 6.9 et donc

$$m-\frac{1}{4} < -\left(\frac{n+1}{4}+\frac{2}{3}\right)-\left(\frac{n-1}{2}-\frac{1}{6}-\varepsilon\right) \leqq n_{\Lambda'} - \left(\frac{n-1}{2}-\frac{1}{6}-\varepsilon\right),$$

d'où

$$u(x, t) \in \Lambda^{(n-1)/2-1/6-\varepsilon}(M \times]\eta', T[).$$

9. Séparation des fréquences et résultats positifs

a. Séparation des fréquences. — Nous allons montrer que les problèmes posés dans l'introduction sur l'équation des ondes sont équivalents aux problèmes correspondants pour les demi-équations des ondes.

Si M est une variété riemannienne compacte, on sait que toute solution de l'équation des ondes admet un développement en série de Fourier :

$$u(x, t) = a_0 + b_0 t + \sum_1^\infty \exp(-it\sqrt{-\lambda_n})\,\varphi_n(x) + \sum_1^\infty \exp(it\sqrt{-\lambda_n})\,\psi_n(x),$$

où $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$ sont les valeurs propres du laplacien.

On pose alors

$$u^+ = \sum_1^\infty \exp(-it\sqrt{-\lambda_n})\,\varphi_n(x),$$

$$u^- = \sum_1^\infty \exp(it\sqrt{-\lambda_n})\,\psi_n(x)$$

et u^+ et u^- sont solutions des « demi-équations » des ondes :

$$\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t} \pm \sqrt{-\Delta}\right)u^\pm = 0.$$

Le théorème est le suivant :

THÉORÈME 9.1. — *Si u est une solution de l'équation des ondes et $u \in \Lambda^\alpha(M \times [0, T])$, alors $u^\pm \in \Lambda^\alpha(M \times [0, T])$.*

Démonstration. — Remarquons tout d'abord que $(\partial^2/\partial t^2) - \Delta$ est un o. p. d. sur $M \times \mathbf{R}$ de symbole principal $p(x, \xi, t, \tau) = -\tau^2 + \|\xi\|_x^2$. Par suite, si $(x, \xi, t, \tau) \in WF(u)$, on a $\tau^2 = \|\xi\|_x^2$ ([D. H.], p. 196) (et donc, on a aussi $\xi \neq 0$, car τ et ξ ne peuvent être simultanément nuls). De même $(1/i)(\partial/\partial t) \pm \sqrt{-\Delta}$ sont des o. p. d. (sauf au voisinage de $\xi = 0$) de symbole principal $\tau \pm \|\xi\|_x$, et on a donc $WF(u^+) \subset W^+$, W^+ et W^- étant les ensembles disjoints définis par

$$W^\pm = \{(x, \xi, t, \tau) \in T^*(M \times \mathbf{R}) \setminus 0 \mid \tau = \pm\|\xi\|_x\}.$$

L'hypothèse implique qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $u \in \Lambda^\alpha(M \times]-\varepsilon, T+\varepsilon[)$. Grâce au caractère microlocal des espaces de Lipschitz (3.5), il nous suffit de montrer que $u^+ \in \Lambda^\alpha$ au voisinage de tout point de $T^*(M \times]-\varepsilon, T+\varepsilon[) \setminus 0$. Si $\lambda \notin W^+$, c'est évident; si $\lambda \in W^+$, on a $u^- \in C^\infty$ au voisinage de λ, puisque $\lambda \in W^-$ et comme $u^+ = u - u^- - a_0 - b_0 t$, on en déduit que $u^+ = u \pmod{C^\infty}$ au voisinage de λ et donc $u^+ \in \Lambda^\alpha$ au voisinage de λ.

Remarque 9.2. — Comme il est observé dans [N], le fait que $\sqrt{-\Delta}$ soit un o. p. d. sur M n'entraîne pas que $\sqrt{-\Delta} \otimes \mathrm{Id}_{\mathbf{R}}$ en soit un sur $M \times \mathbf{R}$; toutefois pour les raisons qu'on a indiquées au début de cette démonstration, cet opérateur agit sur les solutions de l'équation des ondes comme un o. p. d. et dans la suite, on ne fera pas la distinction dans les cas analogues.

b. DÉMONSTRATION DES RÉSULTATS POSITIFS. — Vérifions d'abord l'assertion (i) du théorème 1.1 : supposons dans un premier temps qu'il n'y ait pas du tout de points conjugués sur M. On va montrer que, pour tout $t_0 \in \mathbf{R}$, on a

$$u^+(x, t) \in \Lambda^{[\alpha - [(n-1)/2]]/2}(M \times]t_0, T + t_0[),$$

ce qui prouvera bien que u^+ est continue sur $M \times \mathbf{R}$ puisqu'on a $\alpha - (n-1)/2 > 0$. Considérons l'opérateur $P_{t_0} = \exp(it_0\sqrt{-\Delta}) \otimes \mathrm{Id}_{]0, T[}$ sur $M \times \mathbf{R}$; c'est un O.I.F.

d'ordre 0 (*cf.* rem. 9.2) associé au difféomorphisme canonique $\chi = \varphi_{-t_0} \otimes \mathrm{Id}$. Comme on a supposé qu'il n'y a pas de points conjugués sur M, la projection du graphe Γ_χ de χ sur $(\mathrm{M} \times]0, \mathrm{T}[)^2$ est de rang $2n$ d'après 2.1. D'après 7.4, on a $\mathrm{C}_{\Gamma_\chi} = -(n-1)/2$ et l'hypothèse $u^+(x, t) \in \Lambda^\alpha(\mathrm{M} \times]0, \mathrm{T}[)$ implique

$$\mathrm{P}_{t_0}(u^+(x, t)) \in \Lambda^{[\alpha-[(n-1)/2]]/2}(\mathrm{M} \times]0, \mathrm{T}])$$

d'après le théorème 7.3 et l'inégalité :

$$\frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{n-1}{2}\right) < \mathrm{C}_{\Gamma_\chi} + \alpha.$$

Or, on a $\mathrm{P}_{t_0}(u^+(x, t)) = u^+(x, t-t_0)$ et donc finalement

$$u^+(x, t) \in \Lambda^{[\alpha-(n-1)/2]/2}(\mathrm{M} \times]t_0, \mathrm{T}+t_0[).$$

Le cas général se traite en utilisant le fait que les points conjugués le long d'une géodésique donnée sont isolés : si $(y, \eta) \in \mathrm{T}^*(\mathrm{M}) \setminus 0$ et $t_0 \in \mathbf{R}$, il existe un $t_{y,\eta} \in [0, \mathrm{T}]$ tel que les points $\pi\varphi_{t_{y,\eta}}(y, \eta)$ et $\pi\varphi_{t_0}(y, \eta)$ ne soient pas conjugués le long de la géodésique $t \mapsto \varphi_t(y, \eta)$; il existe alors un voisinage conique Ω de (y, η), un voisinage V de t_0 tels que les points $\pi\varphi_{t_{y,\eta}}(y', \eta')$ et $\pi\varphi_{t'}(y', \eta')$ ne soient pas conjugués pour $(y', \eta') \in \Omega$ et $t' \in \mathrm{V}$. On est alors ramené au cas précédent grâce à 7.6 : on vérifie que

$$u(x, t) \in \Lambda^{[\alpha-[(n-1)/2]]/2}(\mathrm{M} \times \mathbf{R})$$

en montrant que c'est vrai microlocalement.

Il reste à prouver l'assertion (ii) de 1.1 : mais de l'hypothèse $\gamma(t+\mathrm{T}_0) = \sigma(\gamma(t))$ on déduit

$$\frac{d\gamma}{dt}(t+\mathrm{T}_0) = d\sigma\left(\frac{d\gamma}{dt}(t)\right)$$

et donc $\varphi_{\mathrm{T}_0} = d\sigma$. Par suite, $\exp(-i\,\mathrm{T}_0\sqrt{-\Delta}) \circ \sigma^{-1} \in \mathrm{I}^0(\mathrm{M}, \mathrm{M}; \mathrm{Id})$ est un o. p. d. d'ordre 0 sur M. De même, $(\exp(-i\,\mathrm{T}_0\sqrt{-\Delta}) \circ \sigma^{-1}) \otimes \mathrm{Id}_{\mathbf{R}}$ est un o. p. d. d'ordre 0 sur $\mathrm{M} \times \mathbf{R}$. Si donc $u \in \Lambda^\alpha(\mathrm{M} \times [0, \mathrm{T}])$, on a : $u \in \Lambda^\alpha(\mathrm{M} \times [0, 2\,\mathrm{T}_0])$ et on achève de montrer que $u \in \Lambda^\alpha(\mathrm{M} \times \mathbf{R})$ en itérant ce procédé.

10. Théorie L^p.

On peut naturellement vouloir remplacer L^∞ par L^p dans la théorie précédente. Il faut d'abord définir l'analogue des espaces de Lipschitz.

a. Définition et propriétés des espaces L^p_α (locaux). — Soit X une variété de dimension n.

Définition 10.1. — *Soient α et p réels, $1 < p < \infty$; on écrit $f \in \mathrm{L}^p_\alpha(\mathrm{X})$ s'il existe un o. p. d. elliptique* P *d'ordre α avec $\mathrm{P}f \in \mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mathrm{X})$.*

Naturellement pour $p = 2$, ces espaces ne sont autres que les espaces de Sobolev locaux.

PROPOSITION 10.2. — *Un o. p. d.* P *d'ordre* $\beta \in \mathbf{R}$ *opère de* $L^p_\alpha(X)$ *dans* $L^p_{\alpha-\beta}(X)$.

Cette proposition résulte de la définition puisqu'il est bien connu que les o. p. d. d'ordre 0 opèrent dans L^p pour $1 < p < \infty$ ([C. Z.]); ces espaces sont donc microlocaux au sens du paragraphe 3. Avec les notations de ce même paragraphe, on associe un indice critique à tout ouvert conique d'une variété lagrangienne unique fermée Λ_0.

DÉFINITION 10.3. — *On pose* $n^p_\Lambda = \sup \{ m \in \mathbf{R} \mid I^m(X; \Lambda) \subset L^p_{loc}(X) \}$.

On en déduit aisément :

PROPOSITION 10.4. — (i) *Si* $\alpha < n^p_\Lambda - m$, *on a* $I^m(X; \Lambda) \subset L^p_\alpha(X)$.

(ii) *Si* $\alpha > n^p_\Lambda - m$ *et si* $u \in I^m(X; \Lambda)$ *est elliptique sur* Λ, *alors* $u \notin L^p_\alpha(X)$.

Nous nous contenterons de calculer cet indice dans le cas du rang constant.

THÉORÈME 10.5. — *Si la projection* $\pi : \Lambda \to X$ *est de rang constant* $n-k$, *on a*

$$n^p_\Lambda = -\frac{n}{4} + k\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right).$$

Remarque 10.6. — L'indice $n^2_\Lambda = -n/4$ ne dépend pas de Λ.

La méthode de démonstration du théorème 10.5 est celle des théorèmes 4.7 et 6.6 : une distribution $u \in I^m(X; \Lambda)$ est donnée modulo une distribution de $I^{m-1}(X; \Lambda)$ par une intégrale du type :

$$v(x) = \int_{\mathbf{R}^k} \exp i\left(\sum_1^k x_j \theta_j\right) a_\mu(0, x'', \theta)\, d\theta,$$

avec $x' = (x_1, \ldots, x_k)$, $x'' = (x_{k+1}, \ldots, x_n)$, $\mu = m + n/4 - k/2$. La distribution v dépend différentiablement de x'' et est homogène et de degré $-\mu - k$ en x'. Donc $v \in L^p_{loc}(X)$ si et seulement si $p(-\mu - k) > -k$, ce qui donne la valeur de n^p_Λ.

b. RÉSULTATS NÉGATIFS. — Donnons un énoncé à titre d'exemple (*cf.* le résultat annoncé pour les tores dans [M2], p. 203) :

THÉORÈME 10.7. — *S'il existe sur* M *un arc géodésique de longueur* T *sans points conjugués et si*

$$\alpha < (n-1)\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right|, \qquad p > 1,$$

alors pour tout $\varepsilon > 0$, *il existe une solution* u *de l'équation des ondes sur* M *avec*

(i) $u \in L^p_\alpha(M \times [0, T])$;

(ii) $u(., T+\varepsilon) \notin L^p(M)$.

La démonstration est identique à celle de 1.2 (i).

c. RÉSULTATS POSITIFS. — Observons d'abord que la théorie L^2 est triviale et ne fait d'ailleurs pas intervenir la géométrie de M : pour toute solution u de la demi-équation des ondes, on sait que $\| u(.,t) \|_{L^2(M)}$ est indépendant du temps (conservation de l'énergie). On a même mieux : si $u(x,t) \in L^2(M \times [0, T])$, $T > 0$, on a $u(x,t) \in L^2_{loc}(M \times \mathbf{R})$: c'est immédiat à partir de la démonstration de 1.1 (i) (§ 9) : un O.I.F. d'ordre 0 associé à un difféomorphisme canonique homogène opère de L^2_0 dans L^2_{loc}.

Nous allons maintenant interpoler entre ce résultat et celui du paragraphe 9 :

THÉORÈME 10.8. — *Si*

$$p > 1, \qquad T > 0, \qquad \alpha > (n-1)\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right|,$$

on a $u(x,t) \in L^p_{loc}(M \times \mathbf{R})$ *pour toute solution de l'équation des ondes sur* M *telle que* $u(x,t) \in L^p_\alpha(M \times [0, T])$.

C'est une conséquence du lemme d'interpolation suivant :

LEMME 10.9. — *Soit* T *un opérateur linéaire opérant continûment :*

(i) *de* $L^\infty(\mathbf{T}^n)$ *dans* $L^\infty(\mathbf{T}^n)$;

(ii) *de* $L^2(\mathbf{T}^n)$ *dans* $L^2_\alpha(\mathbf{T}^n)$ $(\alpha \in \mathbf{R})$.

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, $p > 2$, T *opère continûment de* $L^p(\mathbf{T}^n)$ *dans* $L^p_{(2\alpha/p)-\varepsilon}(\mathbf{T}^n)$.

Pour démontrer ce lemme, désignons par J_z pour tout z complexe, l'o. p. d. elliptique sur $\mathbf{T}^n$ défini formellement par

$$J_z(\sum a_m \exp(im.x)) = \sum \| m \|^z a_m \exp(im.x).$$

Si $z = u+iv$, c'est un o. p. d. d'ordre u puisque $J_z = J_u \circ J_{iv}$ et que $J\,u$ est d'ordre u et J_{iv} d'ordre 0. Considérons alors la famille d'opérateurs $J_{\alpha u-\varepsilon+iv} \circ T$. Pour tout $v \in \mathbf{R}$, $J_{-\varepsilon+iv} \circ T$ opère de L^∞ dans L^∞ (puisque $\Lambda^\varepsilon \subset L^\infty$) et $J_{\alpha-\varepsilon+iv} \circ T$ opère de L^2 dans L^2. Il résulte alors d'un théorème d'interpolation pour les familles analytiques ([S. W.], p. 205) que $J_{(2\alpha/p)-\varepsilon} \circ T$ opère de L^p dans L^p, ce qui démontre le lemme.

Remarque 10.10. — Il est facile d'en déduire (ou de démontrer directement en utilisant des découpages dyadiques analogues à ceux de [F1]) que si un opérateur linéaire T commutant avec les translations opère continûment

(i) de $\Lambda^\alpha(\mathbf{T}^n)$ dans $\Lambda^\beta(\mathbf{T}^n)$,

(ii) de $L^2(\mathbf{T}^n)$ dans $L^2(\mathbf{T}^n)$,

alors T opère continûment pour tout $\varepsilon > 0$ de $L^p(\mathbf{T}^n)$ dans $L^p_{\beta-\alpha+(\alpha-\beta)(2/p)-\varepsilon}(\mathbf{T}^n)$. La condition $\varepsilon > 0$ est essentielle : on construit dans [S. Z.] un opérateur T opérant de Λ^α dans Λ^α, de L^2 dans L^2 et qui n'opère de L^p dans L^p pour aucun $p \neq 2$.

Montrons maintenant comment le théorème 10.8 se déduit de ce lemme : comme au paragraphe 9, on commence par séparer les fréquences et par se ramener au cas où il n'y a pas de points conjugués sur M. L'opérateur $P_{t_0} = \exp(it_0\sqrt{-\Delta}) \otimes \mathrm{Id}_{]0,T[}$ est un O.I.F. d'ordre 0 défini sur $M \times]0, T[$ dont on sait qu'il opère de Λ^α dans $\Lambda^{\alpha-[(n-1)/2]-\varepsilon}$

($\alpha \in \mathbf{R}$ et $\varepsilon > 0$) et de L^2 dans L^2. Si K_β désigne un o. p. d. elliptique d'ordre β sur $M \times]0, T[$, $A = K_{[(n-1)/2]+\varepsilon-\alpha} \circ P_{t_0} \circ K_{-\alpha}$ opère de L^∞ dans L^∞ et de L^2 dans $L^2_{[(n-1)/2]+\varepsilon}$ (P_{t_0} étant un O.I.F. d'ordre 0 associé au graphe d'un difféomorphisme canonique homogène opère de L^2 dans L^2_α ([H]). Comme le support d'une solution $u(x, t)$ de l'équation des ondes se propage à vitesse finie, on peut localiser le problème dans le domaine d'une carte sur $M \times \mathbf{R}$ et appliquer le lemme en utilisant une périodisation convenable; par suite, si $p > 2$, A opère de L^p dans $L^p_{[(n-1)/2]+\varepsilon}$ et P_{t_0} de L^p_α dans $L^p_{\alpha-(n-1)(1/2-1/p)-\varepsilon}$ ce qui achève la démonstration dans ce cas.

Enfin, le cas $1 < p < 2$ se ramène par dualité au cas $p > 1$, sachant que le dual de L^p_α est $L^q_{-\alpha}$ ($(1/p)+(1/q) = 1$) et que $P^*_{t_0} = P_{-t_0}$ puisque l'opérateur $\sqrt{-\Delta}$ est auto-adjoint.

11. Un problème réciproque

Meyer ([M.2], p. 203) pose le problème de caractériser les variétés riemanniennes compactes telles que toute solution u de l'équation des ondes admette un contrôle du type :

$$\| u(., t) \|_{L^\infty(M)} \leqq \omega(t) \| u \|_{L^\infty(M \times [0, T])}$$

pour un certain $T > 0$ et un poids $\omega(t)$.

Nous allons prouver que, sous une hypothèse d'analyticité sur M, une hypothèse plus faible implique que M a un flot géodésique périodique. Ce résultat est à rapprocher d'un résultat de Duistermaat-Guillemin [D. G.] qui dit que, si les valeurs propres du laplacien sur une variété riemannienne compacte ont leurs racines carrées qui s'accumulent sur une progression arithmétique, alors le flot géodésique est périodique.

THÉORÈME 11.1. — *Pour tout entier $n \geqq 2$, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que si* M *est une variété riemannienne compacte analytique réelle de dimension n et* T *un réel positif, tels que pour toute solution u de l'équation des ondes sur* M *on ait :*

$$\| u(., t) \|_{L^\infty(M)} \leqq \omega(t) \| u \|_{\Lambda^\varepsilon([M \times 0, T])},$$

alors le flot géodésique sur M *est périodique de période* $T_0 \leqq 2T$. *Soit ε_n le sup. des ε ayant cette propriété, alors $\varepsilon_2 = 1/3$ et $\varepsilon_n \geqq 1/2$ pour $n \geqq 3$.*

Pour $n = 2$, le résultat résulte de la remarque 1.8.

Pour $n \geqq 3$, la preuve de ce théorème repose essentiellement sur un résultat de J. H. C. Whitehead amélioré par F. Warner [W. R.] sur le *conjugate locus.*

En utilisant le résultat (ii) du théorème 1.2, on voit que l'hypothèse précédente pour $\varepsilon < 1/2$ implique que, pour tout arc géodésique γ de longueur T, $\gamma(0)$ admet le long de γ un point conjugué d'ordre $n-1$. Soit m un point de M et $S_m = \{ v \in T_m M \mid \| v \| = 1 \}$. Notons par Ω_k le sous-ensemble fermé des points de S_m, où le k-ième point conjugué le long de la géodésique γ_v [$\gamma_v(0) = m$; $\dot{\gamma}_v(0) = v$] est d'ordre $n-1$. D'après ce qui

précède, il existe un N tel que $\bigcup_{k=1}^{N} \Omega_k = S$. Soit k_0 tel que Ω_{k_0} soit d'intérieur non vide, alors l'hypothèse d'analyticité implique que $\Omega_{k_0} = S$ et que les points conjugués correspondants sont dans la partie régulière du *conjugate locus* au sens de [W. R.]. Soit C_{k_0} cette partie du *conjugate locus* de m qui est donc une sous-variété de codimension 1 de $T_m M$, le résultat de Warner est alors que $\operatorname{Ker} d \exp_m (v) = T_v C_{k_0}$ pour tout v dans C_{k_0}. On en déduit que C_{k_0} est une sphère euclidienne de rayon $T_{k_0}(m)$ dans $T_m M$ et que $\exp_m \restriction_{G_{k_0}}$ est de rang 0, donc son image est un point $\sigma_{k_0}(m)$: toutes les géodésiques issues de m repassent en $\sigma_{k_0}(m)$ au temps $T_{k_0}(m)$.

Soit maintenant M_k le sous-ensemble fermé des points de M où l'on peut prendre $k_0 = k$. On a $\bigcup_{k=1}^{N} M_k = M$ et soit M_{k_1} d'intérieur non vide; en réappliquant l'hypothèse d'analyticité, on voit que $M_{k_1} = M$. On en déduit alors sans difficulté que $\sigma = \sigma_{k_1}$ est une application différentiable. L'application $d\sigma(m) : T_m M \to T_{\sigma(m)} M$ est injective; en effet, deux géodésiques issues de m arrivant à l'instant $T(m) = T_{k_1}(m)$ en $\sigma(m)$ avec le même vecteur vitesse sont identiques. Donc $d\sigma(m)$ est surjective; on en déduit facilement que toutes les géodésiques issues de m repassent par m au temps $2\,T(m)$. On montre alors qu'elles sont périodiques de période $2\,T(m)$ indépendante de m et donc que le flot géodésique est périodique de période inférieure ou égale à $2\,T$.

BIBLIOGRAPHIE

[A1] V. I. Arnold, *On a Caracteristic Class Entering in the Quantizations Conditions* (*Funct. Anal. and its Appl.*, Vol. 1, 1967, p. 1-13).

[A2] V. I. Arnold, *Integrals of Rapidly Oscillating Functions and Singularities of Projections of Lagrangien Manifolds* (*Funct. Anal. and its Appl.*, vol. 6, n° 3, 1972, p. 61-62).

[B.] M. Berger, Communication orale.

[B. E.] A. Besse, *Manifolds all of Whose Geodesics are Closed* (*Ergebmisse der Math. und Grenzgebiete*). Springer-Verlag (à paraître).

[C. C.] J.-L. Clerc et P. Courrège, *Une algèbre d'opérateurs intégraux singuliers dans les espaces* C^μ *pour* $0 < \mu < 1$ (*C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 269, série A, 1968, p. 967-969).

[C. F.] Y. Colin de Verdière et M. Frisch, *Régularité lipschitzienne et solutions de l'équation des ondes sur une variété riemannienne compacte* (*C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 282, série A, 1976, p. 783-786).

[C. Z.] A. P. Calderon and A. Zygmund, *On the existence of Certain Singular Integrals* (*Acta Math.*, vol. 88, 1952, p. 85-139).

[D.] J. J. Duistermaat, *Oscillatory Integrals, Lagrange Immersions and Unfolding of Singularities* (*Comm. on Pure and Applied Math.*, vol. 27, 1974, p. 207-281).

[D. G.] J. J. Duistermaat and V. Guillemin, *The Spectrum of Positiv Elliptic Operators and Periodic Geodesics* (*Invent. Math.*, vol. 29, 1975, p. 39-79).

[D. H.] J. J. Duistermaat and L. Hörmander, *Fourier Integral Operators*, II (*Acta Math.*, vol. 128, 1972, p. 183-269).

[F1] M. Frisch, *Propriétés asymptotiques des vibrations du tore* (*J. Math. pures et appl.*, vol. 54, 1975, p. 285-304).

[F2] M. Frisch, *Propriétés asymptotiques des vibrations des sphères* (*J. Math. pures et appl.*) vol. 55, 1976, p. 421-430.

[G. G.] M. Golubitsky and V. Guillemin, *Stable Mappings and their Singularities* (*Graduate Texts in Math.*, vol. 14, 1973, Springer-Verlag).

[G. S.] V. GUILLEMIN and D. SCHAEFFER, *Remarks on a Paper of D.Ludwig* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 79, n° 2, 1973, p. 382-385).

[G. C.] I. M. GUELFAND et G. E. CHILOV, *Les distributions*, t. 1, Dunod, Paris, 1962.

[H.] L. HÖRMANDER, *Fourier Integral Operators I* (*Acta Math.*, vol. 127, 1971, p. 79-183).

[H. R.] L. HÖRMANDER, *The Spectral Function of an Elliptic Operator* (*Acta Math.*, vol. 121, 1968, p. 193-218).

[H. G.] S. HELGASON, *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York, 1962.

[M1] Y. MEYER, *Trois problèmes sur les sommes trigonométriques. 1 : propriétés asymptotiques des vibrations des sphères* (*Astérisque*, vol, 1, S.M.F., 1973).

[M2] Y. MEYER, *Théorie* L^p *des sommes trigonométriques apériodiques* (*Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, vol. 24, n° 4, 1974, p. 189-211).

[N.] L. NIRENBERG, *Lectures on Linear Partial Differential Equations* (*Reg. Conf. series in Maths.*, n° 20, *Amer. Math. Soc.*, 1973).

[S.] E. M. STEIN, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, 1970.

[S. W.] E. M. STEIN and G. WEISS, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press, 1971.

[S. Z.] E. M. STEIN and A. ZYGMUND, *Boundedness of Translation Invariant Operators in Hölder Spaces and* L^p *Spaces* (*Ann. of Math.*, vol. 85, 1967, p. 337-349).

[W.] A. WEINSTEIN, *The Generic Conjugate Locus* [*Proc. Symp. in Pure Math.* (*A.M.S.*), vol. 15, 1968].

[W. A.] W. WASOW, *Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations* (*Interscience*, New York, 1965).

[W. R.] F. W. WARNER, *The Conjugate Locus of a Riemannian Manifold* (*Amer. J. Math.*, vol. 87, 1965, p. 575-604).

(Manuscrit reçu le 2 juin 1976.)

Y. COLIN DE VERDIÈRE,
Laboratoire associé au C.N.R.S. n° 212,
Université Paris VII,
U.E.R. de Mathématiques,
Tour 45-55, 5e étage,
2, place Jussieu,
75221 Paris Cedex 05;

M. FRISCH,
Université Paris XIII,
Département de Mathématiques,
avenue J.-B. Clément,
93430 Villetaneuse.