Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

Y. Colin de Verdière

Paramétrix de l'équation des ondes et intégrales sur l'espace des chemins

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1974-1975), exp. n° 20, p. 1-12.

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1974-1975____A19_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHEMATIQUES

17, rue Descartes

75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - L I O N S - S C H W A R T Z

1 9 7 4 - 1 9 7 5

PARAMETRIX DE L'EQUATION DES ONDES ET INTEGRALES SUR L'ESPACE DES CHEMINS

par Y. COLIN DE VERDIERE

Exposé n° XX

30 Avril 1975

Si M est une variété compacte C^∞ sans bord, la théorie des opérateurs intégraux de Fourier développée par Hörmander [H 1] et Duistermaat-Hörmander ([D H]) s'applique à la construction du noyau de l'équation des ondes. Plus précisément, on a le :

<u>Théorème 1</u> : Si Δ est le laplacien opérant sur les fonctions sur M, la solution du problème de Cauchy ($\frac{1}{2}$ équation des ondes) :

$$\begin{cases} (\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t} + \Delta^{1/2})\, u(x,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

est donnée par $u(x,t) = \int_M e(t,x,y) f(y)\,dy$, où e est une distribution intégrale de Fourier : $e \in I^{-1/4}(M \times M \times \mathbb{R}, \Lambda)$ où $\Lambda \subset (T^*(M)\backslash 0) \times (T^*(M)\backslash 0) \times T^*(\mathbb{R}) \setminus 0$ est définie par

$\Lambda = \{(x,\xi\,;y,-\eta\,;t,\tau) \mid (x,\xi) = \varphi_t(y,\eta),\ \tau + q(x,\xi) = 0\}$ où

$q(x,\xi) = (\sum_{i,j} g^{ij}\xi_i\xi_j)^{1/2}$ est la norme de $\xi \in T_x^*(M)$ et $\varphi_t : T^*(M)\backslash 0 \to T^*(M)\backslash 0$ est le flot du champ de vecteur $H_q = \sum_j (\frac{\partial q}{\partial \xi_j} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial q}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_j})$, appelé flot géodésique : les projections sur M des courbes $t \mapsto \varphi_t(x_o,\xi_o)$ sont les géodésiques de M parcourues avec une vitesse égale à 1.

Tout cela signifie que e peut s'écrire comme une somme localement finie d'intégrales du type $\int_{U_\alpha} e^{i\varphi_\alpha(t,x,y,\theta_\alpha)} a_\alpha(t,x,y,\theta_\alpha)\,d\theta_\alpha$ où U_α est un ouvert conique de $\mathbb{R}^{N_\alpha}$, φ_α une fonction phase non dégénérée telle que Λ_{φ_α} soit un ouvert de Λ et a_α est un symbole.

Cette description de e(t,x,y) ne s'avère pas très facile à manier dans certains problèmes globaux ; par exemple pour l'étude du comportement asymptotique quand $t \to \infty$ ou pour le calcul explicite des coefficients qui apparaissent pour caractériser la partie principale des singularités de la distribution $\sum_{j=0}^{\infty} e^{-i\mu_j t}$ ((μ_j^2) étant les valeurs propres de Δ) ([C] et [D G]).

Il est donc intéressant de pouvoir disposer de fonctions phases représentant Λ ou certaines parties de Λ et qui soient aussi géométriques que possible, donnons deux tels exemples de fonctions phases :

1) Dans son article sur la fonction spectrale d'un opérateur elliptique ([H 2]), Hörmander construit une fonction phase pour t petit qui est de la forme : $\varphi(x,y,t,\eta) = \phi(x,y,\eta) - tq(y,\eta)$ où ϕ est une fonction phase telle que $\Lambda_\phi = N^*(\Delta_M)$ (variété lagrangienne associée à la distribution $\delta(x-y)$ et vérifiant $\{q(.), \phi(x,.)\} = q(.)$.

2) Soit $\rho > 0$, le rayon d'injectivité de M, i.e. le plus grand réel positif tel que $\forall x \in M$, $\exp_x : \begin{array}{ccc} B(0,\rho) & \to & B(x,\rho) \\ \cap & & \cap \\ T_x(M) & & M \end{array}$ soit un difféomorphisme ,

alors la distance $d(x,y) = \overline{xy}$ est C^∞ sur $\{(x,y) \in M^2 \mid 0 < \overline{xy} < \rho\}$ et la fonction $\varphi(\theta,x,y,t) = \theta(\overline{xy} - t)$ $(\theta > 0)$ est une fonction phase pour $\Lambda_{]0,\rho[}$ (où Λ_I $(I \subset \mathbb{R})$ désigne la partie de Λ telle que $t \in I$).

L'utilisation de cette fonction phase conduit à des formules où $e(t,x,y)$ peut être représenté sous une forme voisine des formules classiques sur $\mathbb{R}^n$ à l'aide d'intégrales sur les boules $\overline{xy} \leq t$ ou sur les sphères $\overline{xy} = t$.

Plus généralement, si $\Lambda \subset T^*(X) \setminus 0$ est une variété lagrangienne, on peut chercher à construire une fonction phase φ telle que $\Lambda_\varphi = \Lambda$, il y a plusieurs obstructions à cela, nous notons principalement les trois suivantes :

a) La forme $\xi\, dx \restriction_\Lambda$ est fermée et définit donc par l'isomorphisme de de Rham, une classe de cohomologie $\omega \in H^1(\Lambda;\mathbb{R})$, or on a : $\xi\, dx \restriction_\Lambda = d(\varphi \circ i_\varphi^{-1})$ et donc si $\Lambda = \Lambda_\varphi$, $\omega = 0$. Dans le cas où Λ est conique, $\xi\, dx \restriction_\Lambda = 0$, donc cette obstruction ne tient pas.

b) La classe de cohomologie de Maslov, $m \in H^1(\Lambda ; \mathbb{Z})$ peut ne pas être nulle (il existe des courbes fermées, dont l'indice de Maslov n'est pas nul). Pour la variété Λ associée à la paramétrix de l'équation des ondes on a $m = 0$, car on peut ramener par homotopie tout lacet fermé $\subset \Lambda$ à être contenu dans $\Lambda_{\{0\}}$ et comme la projection $\pi : \Lambda \to M \times M \times \mathbb{R}$ est de rang constant sur $\Lambda_{\{0\}}$, l'indice est nul ([H] p.).

c) Il peut exister des courbes $t \mapsto \gamma(t)$ tel que l'indice de Maslov de $\gamma \restriction [0,t]$ ne soit pas borné quand $t \to \infty$, or (voir plus loin) cet indice est donné par $\operatorname{ind} \gamma_{[0,t]} = \operatorname{ind} \varphi''_{\theta\theta}(i_\varphi^{-1}(\gamma(t))) - \operatorname{ind} \varphi''_{\theta\theta}(i_\varphi^{-1}(\gamma(0)))$ et donc est borné par N si φ est défini sur $X \times \mathbb{R}^N$. Dans le cas riemannien, c'est ce qui se produit si $\gamma(t) = \varphi_t(x_0,\xi_0)$ et que la géodésique $t \mapsto p(\gamma(t))$

admet une infinité de points conjugués (par exemple si la variété est à courbure $\sigma \geq a > 0$).

Il faut donc rechercher des fonctions phases avec une infinité de variables oscillantes, quoique pour $\Lambda_{]0,T[}$, T fixé, on doive pouvoir se ramener à la dimension finie.

De plus, géométriquement, on a intérêt à considérer plûtôt des espaces fibrés $\mathcal{E} \xrightarrow{p} X$ au lieu de produits $X \times \mathbb{R}^N \xrightarrow{p_1} X$, cela n'est pas gênant car si $\widetilde{F} : (x,\theta) \mapsto (x,F(x,\theta))$ est un difféomorphisme de $X \times U$ sur $X \times V$ et φ une fonction phase non dégénérée sur $X \times V$, $\varphi \circ \widetilde{F}$ est une fonction phase non dégénérée sur $X \times U$ et on a : $C_\varphi = \widetilde{F}(C_{\varphi \circ \widetilde{F}})$, $i_\varphi \circ \widetilde{F} = i_{\varphi \circ \widetilde{F}}$, et $\Lambda_{\varphi \circ \widetilde{F}} = \Lambda_\varphi$.

Cet exposé est divisé en trois parties :

1) la construction de fonctions phases non dégénérées pour $\Lambda_{\mathbb{R}_+^*}$ construite sur un fibré fabriqué à l'aide de la variété des chemins sur M ;

2) l'application au noyau de l'équation des ondes et à la formule de Poisson.

3) Quelques remarques sur les relations entre l'indice de Morse et l'indice de Maslov.

§ 1. FONCTIONS PHASES ASSOCIEES A L'ESPACE DES CHEMINS

Soit $(\mathcal{E},p,X)$ un fibré au-dessus des X où $\mathcal{E}$ est une variété banachique et X une variété de dimension finie d. Si $e \in \mathcal{E}$, on désigne par $\mathcal{E}_e$ la fibre passant par e et si $\varphi : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ est C^∞, on note $d_{v\varphi}$ la différentielle le long de la fibre : $d_{v\varphi}(e) \in T_e^*(\mathcal{E}_e)$, $d_{v\varphi}$ est une section du fibré $T_v^*(\mathcal{E})$ au-dessus de $\mathcal{E}$. Si e est tel que $d_{v\varphi}(e) = 0$, la différentielle $d(d_{v\varphi})(e)$ est bien défini comme application linéaire de $T_e\mathcal{E}$ dans $T_e^*(\mathcal{E}_e)$ et on peut aussi définir $d_B\varphi \in T^*_{p(e)}(X)$ par passage au quotient, on a alors les définitions et propositionssuivantes :

Définition 1 : Soit $\varphi : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable, on dit que c'est une fonction phase non dégénérée si

i) φ n'a pas de points critiques

ii) $C_\varphi = \{e \in \mathcal{E} \mid d_v\varphi = 0\}$ est une sous-variété de dimension n de $\mathcal{E}$.

iii) $\forall\, e \in C_\varphi$, $T_e(C_\varphi) = \mathrm{Ker}(d(d_v\varphi)(e))$.

Remarque : En dimension finie, on remplace ii) et iii) par $\forall e$ tq $d_v\,\varphi(e) = 0$, $d(d_v\varphi)(e)$ est surjective.

Proposition 1 : Si $\varphi : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ est une fonction phase non dégénérée, l'application $i_\varphi : C_\varphi \to T^*(X)\setminus 0$ définie par $i_\varphi(e) = (p(e), d_B\varphi(e))$ est une immersion dont l'image est lagrangienne.

On peut souvent réduire le nombre de variables oscillantes, notamment on a la proposition suivante :

Proposition 2 : Soit $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}$ un sous-fibré tel que :

i) $C_\varphi \subset \mathcal{E}_1$

ii) Il existe une décomposition C^∞, $T(\mathcal{E}) = T(\mathcal{E}_1) \oplus N$ (comme fibrés au dessus de $\mathcal{E}_1$) tel que $\forall e \in \mathcal{E}_1$, $N_e \subset T_e\mathcal{E}_e$ et $d_{\varphi \restriction N_e} = 0$.

Alors $\varphi_1 = \varphi \restriction \mathcal{E}_1$ est une fonction phase non dégénérée, $C_{\varphi_1} = C_\varphi$, $i_{\varphi_1} = i_\varphi$ et par conséquent $\Lambda_{\varphi_1} = \Lambda_\varphi$.

Remarque : C'est une conséquence des axiomes des fonctions phases non dégénérées que $d(d_{v\varphi})_{\restriction N_e} : N_e \to (N_e)^*$ est injective, on aura souvent intérêt à essayer d'obtenir que cela définisse une forme quadratique $\gg 0$ sur N_e.

Dans le cas qui nous préoccupe, soit $\Omega(M)$ l'espace des chemins $\gamma : [0,1] \to M$ qui sont de classe H^1 i.e. tels que l'intégrale $E(\gamma) = \int_0^1 \|\dot\gamma\|^2 dt$ soit finie et considérons le fibré $(\mathcal{E}, p, M \times M \times \mathbb{R}_+^*)$ où $\mathcal{E} = \mathbb{R}_+^* \times \Omega(M) \times \mathbb{R}_+^*$ et $p : (\theta, \gamma, t) \to (\gamma(0), \gamma(1), t)$. Soit $\varphi(\theta, \gamma, t) = \theta(E^{1/2}(\gamma) - t)$, alors :

Théorème 2 : φ est une fonction phase non dégénérée sur $\mathcal{E}$ telle que $\Lambda_\varphi = \Lambda_{\mathbb{R}_+^*}$ est la partie $t > 0$ de la variété lagrangienne servant à construire la paramétrix de l'équation des ondes.

Bornons-nous à donner le calcul de C_φ et i_φ ; la condition de non dégénérescence iii) est une conséquence aisée de la formule de la variation seconde.

Calcul de C_φ : Il faut rechercher les points critiques de $\varphi \restriction \mathcal{E}_{x,y,t}$, on a : $\mathcal{E}_{x,y,t} = \mathbb{R}_+^* \times \Omega_{x,y}(M)$, où $\Omega_{x,y}(M)$ est l'espace des chemins joignant x à y, il est connu que les points critiques de $\mathbf{E}$ sur $\Omega_{x,y}(M)$ sont les géodésiques joignant x à y paramétrés proportionnellement à la longueur, on a donc :

$$C_\varphi = \{\theta,\gamma,t) \mid \gamma \text{ géodésique de } x \text{ à } y \text{ et } t = \mathbf{E}^{1/2}(\gamma) = \text{longueur de } \gamma\}$$

C_φ est l'image de $\mathbb{R}_*^+ \times T^*(X) \setminus 0$ par le plongement j :

$$j(\theta,x,\xi) = (\theta, \tau \to \varphi_{\tau\|\xi\|}(x,\xi), \|\xi\|).$$

c'est donc bien une sous-variété de dim 2n+1 de $\mathcal{E}$.

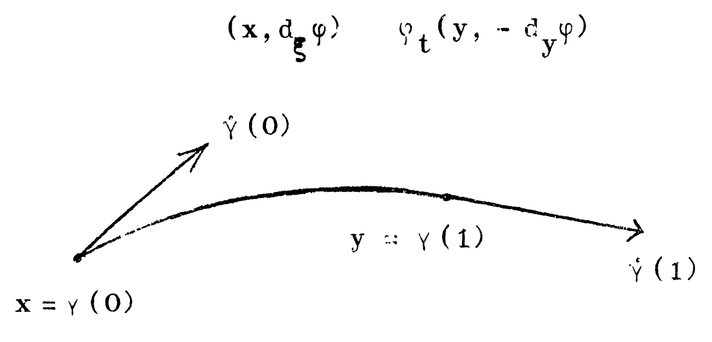
Calcul de i_φ : $i_\varphi(\theta,\gamma,t) = (\gamma(0), d_x\varphi\ ;\ \gamma(1), d_y\varphi\ ; t, -\theta)$. Pour calculer $d_x\varphi(\delta x)$ et $d_y\varphi(\delta y)$, on choisit un champ de vecteur X le long de γ tel que $X(0) = \delta x$ et $X(1) = \delta y$, on a alors :

$$d\varphi(0,X,0) = \theta\, \mathbf{E}^{-1/2}(<\dot\gamma(1),\delta y> - <\dot\gamma(0),\delta x>)$$

d'après la variation première et donc :

$$d_x\varphi = -\frac{\theta}{\sqrt{\mathbf{E}}}(\dot\gamma(0))^\# \ ; \quad d_y\varphi = \frac{\theta}{\sqrt{\mathbf{E}}}(\dot\gamma(1))^\# .$$

et donc $\|d_x\varphi\| = \|d_y\varphi\| = \theta$ et



et on trouve bien que $i_{\varphi}(C_{\varphi}) = \Lambda_{\mathbb{R}_+^*}$.

Cette fonction phase ne peut pas être utilisée directement telle quelle pour construire le noyau e(t,x,y), car il faudrait faire du calcul intégral en dimension infinie, on aurait une expression du genre :

$$\forall t > 0 , \qquad e(t,x,y) = \int_0^{+\infty} d\theta \int_{\Omega_{x,y}} e^{i\theta((\int_0^1 \|\dot{\gamma}\|^2)^{1/2} - t)} a(\theta,\gamma,t)$$

les physiciens utilisent sous le nom d'intégrale de Feynmann de telles intégrales pour construire la paramétrix de l'équation de Schrödinger. L'intégrale porte sur tous les chemins de x à y, mais la contribution singulière provient seulement des chemins "classiques" que sont les géodésiques joignant x à y.

Nous allons montrer comment on peut réduire le nombre de variables oscillantes de façon à intégrer seulement sur une sous-variété de dimension finie de $\Omega_{x,y}$ l'espace des chemins géodésiques par morceaux ; nous nous inspirons beaucoup de la présentation qu'en donne Milnor dans son livre ([M] p.88 à 97).

$T > 0$ étant donné, cherchons à construire une fonction phase pour $\Lambda_{]0,T[}$. Si $N \in \mathbb{N}$ est tel que $\frac{T}{N} < \rho$, on pose
$M_0^{N+1} = \{(x_0,\dots,x_N) \in M^{N+1} \mid \forall i \in \{0,1,\dots,N-1\},\ \overline{x_i x_{i+1}} < \rho\}$ et
$j_N : M_0^{N+1} \to \Omega(M)$, l'application qui à une suite $(x_i)_{0 \le i \le N}$ associe le chemin γ tel que $\gamma(\frac{i}{N}) = x_i$ et γ est sur $]\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}[$ la géodésique minimisante de x_i à x_{i+1} parcouru avec une vitesse $\dot{\gamma}_i = N.\overline{x_i x_{i+1}}$. Alors $W_N = j_N(M_0^{N+1})$ est une sous variété (non fermée) de $\Omega(M)$.

Si on pose $\mathcal{E}_1 = \mathbb{R}_+^* \times W_N \times]0,T[$, on est dans les conditions voulues pour restreindre φ à $\mathcal{E}_1$. Il suffit de prendre $N_{\{\theta,x_i,t\}} = \{0\} \times \mathfrak{M}_{\{x_i\}} \times \{0\}$, où $\mathfrak{M}_{\{x_i\}}$ désigne l'espace des champs X de vecteurs H^1 le long de $j_N((x_i))$ tels que $X(\frac{i}{N}) = 0$ pour tout $i \in \{0,1,\dots,N\}$. Identifions $\mathcal{E}_1$ à $\mathbb{R}_+^* \times M_0^{N+1} \times]0,T[$, on a $\varphi_1(\theta,(x_i),t) = \theta([N \sum_{i=0}^{N-1} \overline{x_i x_{i+1}}^2]^{1/2} - t)$.

De plus, il n'est pas difficile de voir que la remarque suivant la proposition 2 est satisfaite.

§ 2. APPLICATION A LA PARAMETRIX DE L'EQUATION DES ONDES ET A LA FORMULE DE POISSON .

Soit $T > 0$, on sait que le noyau $e(t,x,y)$ peut s'écrire pour $t \in]0,T[$ à l'aide de la fonction phase φ_1 que nous avons obtenue dans le § 1 :

$$e(t,x,y) =$$
$$i^{-\frac{N'}{2}} \int_{\mathbb{R}_+^*} d\theta \int_{M^{N-1}} e^{i\theta([N(\overline{xx}_1^2+\ldots+\overline{x_{N-1}y}^2)]^{1/2}-t)} a_1(\theta,x,y,x_1,\ldots,x_{N-1},t) \prod_{i=1}^{N-1} dx_i$$

où $N' = (N-1)n+1$ est la dimension de $\mathcal{E}^1_{t,x,y}$ et a_1 est un symbole en θ nul hors d'un voisinage de C_{φ_1} .

De plus comme la partie principale $a_{1,\mu}$ de a_1 vérifie une équation de transport à coefficients réels, l'argument de $a_{1,\mu}$ sur C_{φ_1} est constant. Calculons-le pour t petit à l'aide de la formule de transition ([H] p.147) en comparant avec l'écriture avec la fonction phase de Hörmander (voir introduction)

$$e(t,x,y) = i^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\phi(x,y,\eta) - tq(y,\eta))} a_2(t,x,y,\eta)\, d\eta$$

Et regardant ce qui se passe pour $t = 0$, on voit que $\mathrm{Arg}(a_2,\mu_2) = \mathrm{Arg}(i^{n/2})$, on obtient donc :

$$\mathrm{Arg}^t(i^{-\mathrm{ind}\,\varphi''_{1,v,v}} a_1) = \mathrm{Arg}(i^{-(n-1)} i^{\frac{n}{2}})$$

en effet $\mathrm{ind}(\varphi''_{2,\eta,\eta}) = n-1$ (la contribution dominante pour t petit est celle de $-tq(y,\eta)$). De plus pour t petit, l'indice de $\varphi''_{1,v,v}$ est nul car les géodésiques de longueurs t sont alors minimisantes, on obtient ainsi $\mathrm{Arg}^t(a_2) = (1-\frac{n}{2})\frac{\pi}{2}$.

Et donc finalement, l'expression :

$$e(t,x,y) = i^{1-\frac{n+N'}{2}} \int_0^{+\infty} d\theta \int_{M^{N-1}} e^{i\theta([\overline{(x_i x_{i+1})}^2]^{1/2} - t)} a(\theta, x_i, t) \prod_{i=1}^{N-1} dx_i$$

où la partie principale a_μ de a est positive.

Soit maintenant x_o, y_o joints par une géodésique γ de longueur t le long de laquelle ils ne sont pas conjugués, au voisinage de $(x_o, \dot{\gamma}(0)^{\#}, y_o, -\dot{\gamma}(1)^{\#}, t, -\|\dot{\gamma}(0)\|)$, Λ est un fibré normal $N^*(\Sigma)$ où Σ est définie par une équation $f(x,y,t) = 0$, f peut être prise de la forme $\delta_\gamma(x,y) - t$, où $\delta_\gamma(x,y)$ est la distance de x à y comptée le long de géodésiques voisines de γ, on peut donc écrire au voisinage de ce point de Λ :

$$e(t,x,y) = i^{-1/2} \int_0^{+\infty} e^{i\theta(\delta_\gamma(x,y) - t)} b(x,y,t,\theta) d\theta$$

Pour calculer l'argument de b, on utilise comme tout à l'heure la règle de comparaison de Hörmander :

$$\operatorname{Arg}(i^{1-\frac{n}{2}} i^{-\operatorname{ind} \varphi''_{1,v,v}}) = \operatorname{Arg}(b.i^o),$$

et on a :

$$\operatorname{ind}(\varphi''_{1,v,v}) = \operatorname{ind}(\varphi''_{v,v})$$

à cause de la condition sur la restriction de $\varphi''_{v,v}$ à N_e ; $\operatorname{ind}(\varphi''_{v,v})$ est par définition l'indice de Morse pour la géodésique γ joignant x_o à y_o. On obtient donc au voisinage de $(x_o, \xi_o, y_o, -\eta_o, t_o, \tau_o)$,

$$e(t,x,y) = i^{1-\frac{n}{2} - \operatorname{ind}(\gamma)} \int_0^{+\infty} e^{i\theta(\delta_\gamma(x,y) - t)} a(x,y,t,\theta) d\theta$$ où la partie principale de a est positive.

Application à la formule de Poisson pour les variétés riemanniennes

Soit $0 = \lambda_o < \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n \leq \ldots$ les valeurs propres du laplacien sur M répétées un nombre de fois égal à leur multiplicité et $\mu_n = \sqrt{\lambda_n}$, Chazarain ([C]) et Duistermaat-Guillemin ([D.G]) ont étudié les singularités de la distribution $\sigma(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-it\mu_n}$ et ont montré que le supp. sing (σ) est contenu dans l'ensemble des longueurs de géodésiques fermées, de plus on a un résultat plus précis si l'on fait une hypothèse de régularité (condition de "clean" intersection) :

<u>Théorème 3</u> : Soit $T_o \in \mathbb{R}$ et supposons que les points fixes de φ_{T_o} forment une sous variété clean W : i.e. que $T_w W = \mathrm{Ker}(d\varphi_{T_o} - Id)$, $\forall w \in W$, alors si $W = \bigcup_{j=1}^{N} W_j$ où les W_j sont connexes de dimension d_j, $\sigma(t)$ est au voisinage de T_o une somme de distributions intégrales de Fourier $(\sigma_j(t))_{j=1,\dots,N}$ avec $\sigma_j \in I^{\frac{d_j}{2} - \frac{1}{4}}(T_o, \tau < 0)$. C'est à dire que

$$\sigma_j(t) = a_j\left(\int_0^{+\infty} e^{-i\tau(t - T_o)}\tau^{\frac{d_j - 1}{2}}\, d\tau\right) \pmod{I^{\frac{d_j}{2} - \frac{1}{4} - 1}}$$

De plus, on a $a_j = i^{\frac{1 - d_j}{2}} . i^{-\sigma} b_j$, avec $b_j > 0$ et σ est l'indice de Morse des géodésiques fermées $t \in [0, T_o] \to p(\varphi_t(x_o, \xi_o))$ $((x_o, \xi_o) \in W_j)$ qui sont considérées comme points critiques de l'énergie sur l'espace des lacets fermés, c'est-à-dire les applications de classe H^1 de $[0,1]/_{\{0,1\}} \to M$.

La méthode de démonstration de [D G] n'est pas du tout directe puisqu'on commence par donner une formule pour σ à l'aide d'indices de Maslov et de nombres d'intersection et qu'on utilise ensuite un résultat de Duistermaat [D] pour l'identifier à l'indice de Morse.

Montrons comment les considérations précédentes permettent de retrouver cet entier σ directement : la formule précédente qui donne σ_j peut s'inverser (transformation de Fourier) et on obtient :

$$a_j \sim \tau^{-\frac{d_j - 1}{2}} e^{-i\tau T_o} \int_{\mathbb{R}} e^{it\tau} \sigma_j(t)\, dt.$$

Utilisant l'expression $\sigma_j(t) = \int_{\Omega_j} e(t,x,x)\, dx$, où $\int_{\Omega_j}$ signifie que l'on ne s'intéresse qu'aux points près de W_j, on obtient finalement :

$$a_j \sim (\tau^{-\frac{d_j-1}{2}} e^{-i\tau T_o} \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\mathbb{R}_+} d\theta \int_{M^N} \prod_{i=o}^{N-1} dx_i . e^{i[t\tau + \theta([N \sum_{i=o}^{N-1} \overline{x_i x_{i+1}}^2]^{1/2} - t)]} . a(t,x_i,\theta))\, i^{1-\frac{n+N'}{2}}$$

Soit en posant $\theta = \tau\,\theta_1$, on est ramené à trouver l'Arg^t quand $\tau \to +\infty$ de la partie principale de :

$$I_j(\tau) = i^{1-\frac{n+N'}{2}} \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\times M^N} e^{i\tau(t(1-\theta_1) + \theta_1([N\sum_{i=o}^{N-1} \overline{x_i x_{i+1}}^2]^{1/2}) - T_o)} \times$$

$$\times\ a(t,x_i,\theta_1)\, dt . d\theta . dx_i .$$

L'hypothèse de "clean" intersection permet justement d'appliquer la méthode de la phase stationnaire et donne un argument $e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_j}$, où σ_j est la signature du Hessien de la fonction phase.

La dimension de la variété sur laquelle on intègre est $N' + n + 1$ et la dimension de la nullité de cette forme quadratique est justement d_j, on trouve donc :

$$i^{1-\frac{n+N'}{2}}\ i^{\frac{N'+n+1-d_j}{2}}\ i^{-\operatorname{ind}(F'')}$$

en désignant par F la fonction phase qui apparaît et :

$$\operatorname{ind}(F'') = 1 + \operatorname{ind}(G''), \text{ où } G \text{ est définie par :}$$

$$G : (x_o, x_1, \dots, x_{N-1}) \longmapsto \sum_{i=o}^{N-1} \overline{x_i x_{i+1}}^2 \qquad (\text{en posant } x_N = x_o).$$

Il n'est pas difficile alors de voir que l'indice de G'' est l'indice de Morse en question et donc d'identifier l'entier σ comme dans le théorème précédent.

§ 3. INDICE DE MORSE ET INDICE DE MASLOV

Rappelons tout d'abord la définition que donne Hörmander du cocycle σ_{jk} qui permet de définir les indices de Maslov : si $\Lambda \subset T^*(X)\backslash 0$ est une variété lagrangienne et $(U_j)_{j\in J}$ des ouverts de Λ, $(\varphi_j)_{j\in J}$ des fonctions phases non dégénérées avec N_j variables oscillantes et $\Lambda_{\varphi j} = U_j$, soit $q_j(\lambda) = \varphi''_{j,\theta,\theta}(i^{-1}_{\varphi_j}(\lambda))$, on pose pour $\lambda \in U_j \cap U_k$, $\sigma_{jk}(\lambda) = \frac{1}{2}([\operatorname{sgn} q_k(\lambda) - N_k] - [\operatorname{sgn} q_j(\lambda) - N_j])$;on peut du reste transformer cette expression en remarquant que $\operatorname{null}(q_j(\lambda)) = \operatorname{null}(q_k(\lambda)) = n\text{-rang}\, d\pi_\Lambda(\lambda)$; on obtient :

$$\sigma_{jk}(\lambda) = \operatorname{ind} q_j(\lambda) - \operatorname{ind} q_k(\lambda)$$

Hörmander démontre que c'est un entier localement constant dans $U_j \cap U_k$, ce cocycle définit donc dans la cohomologie de Čech une classe $m \in H^1(\Lambda;\mathbb{Z})$ et permet de définir l'indice des courbes fermées γ par $\operatorname{Ind}_M(\gamma) = (m,\gamma)$.

Pour les courbes non fermées γ tracées sur Λ, on peut aussi définir l'indice de Maslov $\operatorname{Ind}_M(\gamma)$ de la façon suivante :
soit $(U_j)_{0\le j\le N}$ un recouvrement de γ pour des ouverts de Λ tels que $U_j \cap U_{j+1} \neq \emptyset$ et est connexe ; supposons qu'il existe des fonctions phases φ_j telle que $\Lambda_{\varphi_j} = U_j$ et que au point $\gamma(0)$, $q_0(\gamma(0)) = 0$ (i.e. le nombre N_0 de variables oscillantes est minimum en $\gamma(0)$) et de même pour $\gamma(1)$. On pose alors :

$$\operatorname{ind}_{M(\gamma)} = \sigma_{0,1} + \sigma_{1,2} + \ldots + \sigma_{N-1,N}$$

En particulier si $\gamma \subset \Lambda_\varphi$, on a :

$$\operatorname{ind}_M(\gamma) = \operatorname{ind} q(\gamma(1)) - \operatorname{ind} q(\gamma(0)).$$

On voit tout de suite à l'aide des fonctions phases construites dans § 2 que l'indice de la courbe $t \mapsto (\varphi_t(y_0,\eta_0), y_0, -\eta_0, t, -\|\eta_0\|)$ sur l'intervalle $]\varepsilon,T[$ (ε petit) est égal à l'indice de Morse de la géodésique correspondante $t \mapsto p(\varphi_t(y_o,\eta_o))$ ($t \in [0,T]$). L'identification entre l'indice de Morse et de Maslov se fait donc ici directement : on n'utilise pas la construction de l'indice de Maslov comme nombre d'intersection avec le cycle singulier (Arnold), ni son parallèle qui est le théorème de l'index de Morse : calcul de l'indice de Morse comme nombre de points conjugués.

BIBLIOGRAPHIE

V. Arnold : Funct. Analysis, Appl. 1 (1967) p.1-13.

[C] J. Chazarain : Inv. Math. 24 (1974) p. 65-82. Voir aussi séminaire Goulaouic-Schwartz (1973-74) et séminaire Bourbaki (Fev. 75).

Y. Colin de Verdière : Comp. Math. 27 (1973) p. 159-184. Voir aussi séminaire Goulaouic-Schwartz (1973-74).

[H 1] Hörmander : Acta Mathematica 127 (1971) p.79-183.

[H 2] Hörmander : Acta Mathematica 121 (1968) p.193-218.

[D H] Duistermaat-Hörmander : Acta Mathematica 128 (1972) p.184-269.

[D G] Duistermaat et Guillemin : The spectrum of positive elliptic operators and periodic geodesics (preprint 1974).

[D] Duistermaat : On the Morse index in variationnal calculus (à paraître à Advances in Math.) et séminaire Goulaouic-Schwartz (73-74).

[M] Milnor : Morse theory, Annals of Math. Studies 51.
