

COMPOSITIO MATHEMATICA

Y. COLIN DE VERDIÈRE

Spectre du laplacien et longueurs des géodésiques périodiques. I

Compositio Mathematica, tome 27, n° 1 (1973), p. 83-106.

http://www.numdam.org/item?id=CM_1973__27_1_83_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SPECTRE DU LAPLACIEN ET LONGUEURS DES GÉODÉSQUES PÉRIODIQUES I

Y. Colin de Verdière

Introduction

Mac-Kean et Singer ([1] p. 67) posent le problème d'existence d'un analogue de la formule de Poisson pour d'autres variétés que le tore \mathbf{R}^n/Γ , pour lequel cette formule est

$$\sum_{k \in \mathbf{N}} e^{-\lambda_k/t} = \left(\frac{t}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}n} (\text{vol } M) \cdot \sum_{\omega \in \Gamma} e^{-|\omega|^2 t/4}$$

où $(\lambda_k)_{k \in \mathbf{N}}$ désigne le spectre du laplacien.

On peut remarquer que les $|\omega|$ pour ω dans Γ sont les longueurs des géodésiques périodiques du tore \mathbf{R}^n/Γ . Pour obtenir dans un cas plus général une formule analogue, il est difficile de prendre t réel, $t \rightarrow \infty$, à cause de la petitesse des termes $e^{-|\omega|^2 t/4}$, et du développement de Minakshisundaram-Pleijel ([3] p. 215) qui s'écrit pour $t \rightarrow \infty$:

$$\sum_{k \in \mathbf{N}} e^{-\lambda_k/t} \sim \left(\frac{t}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}n} \left(\text{vol } M + \frac{a_1}{t} + \frac{a_2}{t^2} + \dots\right).$$

Nous sommes donc amenés à chercher un développement approché pour t complexe avec $\text{Im}(t) \rightarrow \infty$. Nous démontrons dans cet article (voir 2-4) le:

THÉORÈME: *Soit M une variété riemannienne compacte de dimension 2 à courbure sectionnelle $\sigma < 0$. Soit $(\lambda_k)_{k \in \mathbf{N}}$ le spectre de son laplacien ([3] p. 14 et suivantes). Soit \mathcal{L} l'ensemble des classes d'homotopie libre de M et si a est un élément de \mathcal{L} , L_a la longueur de l'unique géodésique périodique de a ([4] p. 10 et suivantes). On a*

$$\sum_{k \in \mathbf{N}} e^{-\lambda_k/z} = \left(\frac{z}{4\pi}\right) \text{vol } M + \left(\frac{z}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{a \in \mathcal{L} - \{\text{Id}\}} u_a e^{-\frac{1}{2}L_a^2/z} + 0^+(1)$$

où les u_a sont des réels > 0 et $0^+(1)$ est une fonction de z bornée dans les régions $\text{Re}(z) \geq \xi_0 > 0$.

Ce théorème admet le corollaire suivant qu'il est intéressant de rapprocher des résultats d'Huber ([5]).

COROLLAIRE: Si deux variétés vérifient les hypothèses du théorème précédent et ont même spectre, elles ont même ensemble des longueurs des géodésiques périodiques.

La méthode utilisée ici repose sur deux points:

(i) Une approximation de la solution fondamentale E de l'équation de la chaleur où l'on prend des temps complexes. Cette approximation utilise une construction faite sur le revêtement riemannien universel de M qui ici est difféomorphe à \mathbf{R}^n . Ici on suppose seulement $\sigma \leq 0$ et le raisonnement vaut en dimension quelconque sauf dans 1.3.

(ii) On part ensuite de l'identité

$$\sum_{k \in \mathbf{N}} e^{-\lambda_k/z} = \int_M E\left(\frac{1}{z}; x, x\right) v_M(x)$$

dans laquelle on reporte l'approximation de (i). L'évaluation quand $\text{Im}(z) \rightarrow \infty$ se fait alors par une méthode d'intégrale oscillante qui ressemble à celle utilisée par Balian et Bloch ([2] p. 84 et suivantes). On suppose dans ce 2 que la dimension est 2 et $\sigma < 0$.

Notations: C^+ est l'ensemble des nombres complexes z tels que $\text{Re}(z) > 0$. Pour tout réel $\xi_0 > 0$, C_{ξ_0} est l'ensemble des nombres complexes tels que $\text{Re}(z) \geq \xi_0$. L'application $z \mapsto z^\alpha$ est définie sur C^+ pour α réel comme prolongement holomorphe de l'application $t \mapsto t^\alpha$ définie sur \mathbf{R}^+ à valeur dans \mathbf{R}^+ . L'écriture $g(z) = 0^+(f(z))$ signifie: pour tout $\xi_0 > 0$, le rapport $|g(z)/f(z)|$ est borné dans C_{ξ_0} .

M est une variété riemannienne, C^∞ et de dimension n ; σ est la courbure sectionnelle de M . \tilde{M} est le revêtement riemannien universel de M et Γ le groupe des automorphismes de ce revêtement qui est isomorphe au groupe $\pi_1(M)$.

1. Approximation de la solution fondamentale de l'équation de la chaleur

1.1. *Cas d'une variété complète simplement connexe à courbure sectionnelle négative ou nulle bornée.*

M étant une telle variété, on sait que l'application $\exp_m : T_m M \rightarrow M$ est un difféomorphisme pour tout m . Nous noterons $\mathfrak{g}(m, x)$ le déterminant de l'application tangente à \exp_m au point $\exp_m^{-1}(x)$ et nous introduirons les fonctions $u_i : M \times M \rightarrow \mathbf{R}$ définies par:

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= \mathfrak{g}^{-\frac{1}{2}}(x, y) \\ u_i(x, y) &= \mathfrak{g}^{-\frac{1}{2}}(x, y) \int_0^1 \mathfrak{g}^{\frac{1}{2}}(x, \exp_x(\tau \exp_x^{-1}(y))) \\ &\quad \times \Delta_2 u_{i-1}(x, \exp_x(\tau \exp_x^{-1}(y))) \tau^{i-1} d\tau \end{aligned}$$

qui sont utilisées dans [3] p. 204 à 215. On sait que ces fonctions u_i sont C^∞ et que, de plus, si on pose pour $(z; x, y)$ dans $C^+ \times M \times M$

$$(1) \quad S_k(z; x, y) = (4\pi z)^{-\frac{1}{2}n} e^{-d^2(x, y)/4z} (u_0(x, y) + \dots + z^k u_k(x, y))$$

on a:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \Delta_y \right) S_k(z; x, y) = (4\pi)^{-\frac{1}{2}n} z^{k-\frac{1}{2}n} e^{-d^2(x, y)/4z} \Delta_y u_k(x, y).$$

DÉFINITION: Une application $E : C^+ \times M \times M \rightarrow C$ sera dite solution fondamentale complexe de l'équation de chaleur (S.F.C.E.C) si:

(i) E est holomorphe par rapport à z , C^2 au moins par rapport à x et y , et vérifie:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \Delta_y \right) E = 0$$

(ii) Pour toute fonction continue à support compact f sur M et tout α , avec $|\alpha| < \pi/2$, on a:

$$\lim_{\substack{|z| \rightarrow 0 \\ |\text{Arg } z| \leq \alpha}} \left(\int_M E(z; x, y) f(y) v_M(y) \right) = f(x)$$

Nous supposons dans la suite de ce 1.1 que la condition (E) suivante est vérifiée:

(E) il existe des nombres réels C et h tels que pour tout entier i , $i \leq n$, et pour tout (x, y) dans $M \times M$ on ait:

$$\begin{aligned} |u_i(x, y)| &\leq C e^{hd(x, y)} \\ |\Delta_y u_i(x, y)| &\leq C e^{hd(x, y)}. \end{aligned}$$

Nous démontrerons en 1.3 cette condition si M est le revêtement riemannien universel d'une variété compacte de dimension $n = 2$.

Soient \mathcal{A} et $\mathcal{B} : C^+ \times M \times M \rightarrow C$, on pose quand cela a un sens:

$$\mathcal{A} * \mathcal{B}(z; x, y) = \int_0^z du \int_M \mathcal{A}(u; x, \xi) \mathcal{B}(z-u; \xi, y) v_M(\xi)$$

où l'intégrale en u est prise sur le segment $(0, z)$ dans C .

Nous allons montrer que la série:

$$(2) \quad E(z; x, y) = S_n(z; x, y) - \left\{ \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left(\left(\frac{\partial}{\partial z} + \Delta_y \right) S_n(z; x, y) \right)^{* \lambda} * S_n(z; x, y) \right\} (-1)^{\lambda+1}$$

définit une S.F.C.E.C sur M et donner une majoration de $|E - S_{(n-1)/2}|$.

LEMME 1: Soit δ la distance euclidienne dans $T_m M$ et d la distance riemannienne dans M ; pour tout a, b dans $T_m M$, on a: $d(\exp_m(a), \exp_m(b)) \geq \delta(a, b)$.

DÉMONSTRATION: Soit γ un chemin C^1 dans $T_m M$ tel que $\gamma(0) = a, \gamma(1) = b$, on a:

$$\delta(a, b) \leq \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

On sait ([6] p. 253 à 255) que $T_x \exp_m$ augmente la longueur des vecteurs, on a donc:

$$\int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\| dt \leq \int_0^1 \|T_{\gamma(t)} \exp_m(\dot{\gamma}(t))\| dt$$

Si on pose $\varepsilon(t) = \exp_m(\gamma(t))$, cette dernière intégrale est égale à la longueur du chemin ε et comme tout chemin C^1 de $\exp_m(a)$ à $\exp_m(b)$ est de la forme $\exp_m \circ \gamma$ pour un γ C^1 de a à b , on en déduit

$$\delta(a, b) \leq \inf (\text{longueur de } \varepsilon) = d(\exp_m(a), \exp_m(b)).$$

ε chemin C^1 de $\exp_m(a)$ à $\exp_m(b)$

LEMME 2: Soient a et b des réels > 0 et supposons $-A^2 \leq \sigma \leq 0$, alors il existe C_1 ne dépendant que de n, h et A tel que:

$$\begin{aligned} & \int_M e^{-d^2(x, m)/a} \cdot e^{-d^2(y, m)/b} \cdot e^{h(d(x, m) + d(y, m))} v_M(m) \\ & \leq C_1 \cdot e^{hd(x, y)} \cdot e^{-d^2(x, y)/(a+b)} \cdot e^{\frac{1}{2}(2h + (n-1)A^2) \cdot ab/(a+b)} \\ & \quad \times \left(\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)^{-\frac{1}{2}n} + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)^{-n+\frac{1}{2}} \right) \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION: Soit 0 le point du segment géodésique $[x, y]$ tel que $d(x, 0)/a = d(y, 0)/b$ et considérons l'espace Π tangent en 0 à M . Soit ω, ξ, η et μ les images réciproques de $0, x, y$ et m par l'exponentielle en 0 , on a:

$$\frac{\delta^2(\mu, \xi)}{a} + \frac{\delta^2(\mu, \eta)}{b} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \delta^2(\omega, \mu) + \frac{\delta^2(\xi, \eta)}{a+b}$$

Donc en appliquant l'exponentielle en 0 et le lemme 1, il vient:

$$\frac{d^2(m, x)}{a} + \frac{d^2(m, y)}{b} \geq \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) d^2(0, m) + \frac{d^2(x, y)}{a+b}$$

Posons $r = d(x, y)$; $t = d(0, m)$.

L'intégrale I est majorée par

$$\int_M e^{-r^2/(a+b)} \cdot e^{hr} \cdot e^{2ht} \cdot e^{-(1/a+1/b)t^2} v_M(m)$$

De plus ([6] p. 253) pour toute fonction $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$

$$\left| \int_M f(t) v_M(m) \right| \leq n \omega_n \int_0^{+\infty} |f(t)| \left(\frac{shAt}{A} \right)^{n-1} dt$$

où ω_n est le volume de la boule unité euclidienne de dimension n . Donc:

$$I \leq n \omega_n e^{hr} e^{-r^2/(a+b)} \int_0^{+\infty} e^{-(1/a+1/b)t^2} e^{(2h+(n-1)A)t} \cdot t^{n-1} dt$$

(car $shAt \leq Ate^{At}$)

Cette intégrale se majore bien:

$$J = \int_{\mathbf{R}^+} e^{-\alpha t^2} \cdot e^{\beta t} t^{n-1} dt = \int_{\mathbf{R}^+} e^{-\alpha(t-\beta/2\alpha)^2} \cdot e^{\beta^2/4\alpha} \cdot t^{n-1} dt$$

$$J = \int_{-\beta/2\alpha}^{+\infty} e^{-\alpha u^2} \cdot e^{\beta^2/4\alpha} \cdot \left(\frac{\beta}{2\alpha} + u \right)^{n-1} du$$

$$J \leq 2^{n-1} e^{\beta^2/4\alpha} \left[\left(\frac{\beta}{2\alpha} \right)^{n-1} \int_{\mathbf{R}} e^{-\alpha u^2} du + \int_{\mathbf{R}^+} e^{-\alpha u^2} \cdot u^{n-1} du \right]$$

$$J \leq C'(n, \beta) e^{\beta^2/4\alpha} (\alpha^{\frac{1}{2}-n} + \alpha^{-\frac{1}{2}n})$$

On en déduit le lemme 2.

LEMME 3: Soient \mathcal{A} et $\mathcal{B}: \mathbf{C}^+ \times M \times M \rightarrow \mathbf{C}$ tels que

$$|\mathcal{A}(z; x, y)| \leq K|z|^\alpha e^{-\frac{1}{2}r^2 \operatorname{Re}(1/z)} \cdot e^{hr}$$

$$|\mathcal{B}(z; x, y)| \leq L|z|^\beta e^{-\frac{1}{2}r^2 \operatorname{Re}(1/z)} \cdot e^{hr}$$

où α et β sont $\geq -n/2$, on a pour tout z tel que $1/z \in \mathbf{C}_{\xi_0}$:

$$|\mathcal{A} * \mathcal{B}(z; x, y)| \leq KLC_2 e^{hr} \cdot e^{-\frac{1}{2}r^2 \operatorname{Re}(1/z)} |z|^{\alpha+\beta+1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2}n + \sup(\alpha, \beta)}$$

où C_2 est un nombre réel qui ne dépend que de n, h, A et ξ_0 .

DÉMONSTRATION: On utilise le lemme 2 avec

$$\phi = \operatorname{Arg} z; \quad a = \frac{4|u|}{\cos \phi}, \quad b = \frac{4(|z|-|u|)}{\cos \phi}$$

Donc:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)^{-1} = \frac{4|z|}{\cos \phi} \vartheta(1-\vartheta) \quad \text{où} \quad \vartheta = \left| \frac{u}{z} \right|$$

$$\frac{1}{a+b} = \frac{\operatorname{Re}(1/z)}{4}$$

$$|\mathcal{A} * \mathcal{B}(z; x, y)| \leq KL \int_0^{|z|} dv \cdot \int_M e^{-(d^2(x, m)/a + d^2(m, y)/b)} \cdot e^{h[d(x, m) + d(y, m)]} \cdot v^\alpha (|z| - v)^\beta v_M(m)$$

Il vient donc:

$$|\mathcal{A} * \mathcal{B}(z; x, y)| \leq KLC_1 e^{hr} \cdot e^{-\frac{1}{4}r^2 \operatorname{Re}(1/z)} \cdot e^{(2h + (n-1)A)^2/2\xi_0} |z|^{\alpha + \beta + 1} \cdot \rho(\alpha, \beta)$$

avec:

$$\rho(\alpha, \beta) = \int_0^1 \left\{ \vartheta^{\alpha + \frac{1}{2}n} \cdot (1 - \vartheta)^{\beta + \frac{1}{2}n} \cdot \left(\frac{4}{\xi_0}\right)^{\frac{1}{2}n} + \vartheta^{\alpha + n - \frac{1}{2}} (1 - \vartheta)^{\beta + n - \frac{1}{2}} \left(\frac{4}{\xi_0}\right)^{n - \frac{1}{2}} \right\} d\vartheta$$

Il suffit donc d'utiliser le fait que

$$\int_0^1 \vartheta^p (1 - \vartheta)^q d\vartheta \leq \frac{1}{1 + \sup(p, q)}$$

et que $n/2 \leq n - \frac{1}{2}$ pour voir le résultat du lemme 3.

Nous pouvons maintenant démontrer le:

THÉORÈME 1: *M étant une variété riemannienne simplement connexe complète de courbure sectionnelle σ négative ou nulle bornée, et vérifiant la condition (E), M admet une S.F.C.E.C. E qui vérifie pour tout z tel que $1/z$ soit dans C_{ξ_0} :*

$$(3) \quad |E(z; x, y) - S_{[\frac{1}{2}(n-1)]}(z; x, y)| \leq C_3 \cdot e^{hd(x, y)} e^{-\frac{1}{4}\xi_0 d^2(x, y)}$$

où C_3 ne dépend que de la variété M et de ξ_0 , mais non de z, x et y.

DÉMONSTRATION: Puisque $1/z$ est dans C_{ξ_0} , $|z|$ est borné, nous avons donc, en utilisant la condition (E):

$$|S_n| < K|z|^{-\frac{1}{2}n} e^{-\frac{1}{4}r^2 \operatorname{Re}(1/z)} e^{hr}$$

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial z} + \Delta_2 \right) S_n \right| < L|z|^{\frac{1}{2}n} e^{-\frac{1}{4}r^2 \operatorname{Re}(1/z)} e^{hr}$$

L'application du lemme 3 montre donc que si on pose $T_n = (\partial/\partial z + \Delta_y)S_n$, on a:

$$|T_n^{*\lambda} * S_n| \leq \frac{KL^\lambda C_2^\lambda}{(n+1)(n+1)(1+2(1+n/2)) \cdots (1+(\lambda-1)(1+n/2))} \times |z|^{1+(\lambda-1)(1+n/2)} e^{hr} \cdot e^{-\frac{1}{4}r^2 \operatorname{Re}(1/z)}$$

Donc

$$\left| \sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^\lambda T_n^{*\lambda} * S_n \right| \leq KLC_2 |z| e^{LC_2 |z|^{1+\frac{1}{2}n}} \cdot e^{hr} \cdot e^{-\frac{1}{4}\xi_0 r^2}$$

De plus on a :

$$S_n - S_{[\frac{1}{2}(n-1)]} = \frac{e^{-r^2/4z}}{(4\pi)^{\frac{1}{2}n}} (z^{\frac{1}{2}n} u_n + z^{\frac{1}{2}n-1} u_{n-1} + \dots + z^{[\frac{1}{2}(n-1)]+1-\frac{1}{2}n} u_{[\frac{1}{2}(n-1)]+1})$$

D'après la condition (E), on voit que :

$$|S_n - S_{[\frac{1}{2}(n-1)]}| \leq C_4 e^{hr} \cdot e^{-\frac{1}{4}\xi_0 r^2}$$

Donc le seul problème est de montrer que la somme de la série (2) définit bien une S.F.C.E.C sur M . Pour cela, nous aurons besoin des deux lemmes :

LEMME 4: Soit x_0 dans M , α un réel inférieur à $\pi/2$ et $f : M \rightarrow \mathbf{C}$ continue telle que $|f(y)| \leq C e^{h d(x,y)}$ on a :

$$\lim_{\substack{|z| \rightarrow 0 \\ |\text{Arg } z| \leq \alpha}} \int_M S_k(z; x, y) f(y) v_M(y) = f(x_0)$$

D'après la condition (E) et la majoration du volume déjà utilisée plus haut, il suffit de montrer que, si $\phi : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{C}$ continue vérifie $|\phi(\xi)| \leq C' e^{h' \|\xi\|}$, on a :

$$\lim_{\substack{|z| \rightarrow 0 \\ |\text{Arg } z| \leq \alpha}} \frac{1}{(4\pi z)^{\frac{1}{2}n}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-\|\xi\|^2/4z} \phi(\xi) d\xi = \phi(0).$$

Cela résulte des deux faits suivants :

$$(i) \quad \frac{1}{(4\pi z)^{\frac{1}{2}n}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-\|\xi\|^2/4z} d\xi = 1,$$

ce qui est connu pour z réel et donc par prolongement holomorphe pour z dans \mathbf{C}^+ .

(ii) La limite est nulle si $\phi(0) = 0$. En effet

$$|I(z)| \leq \frac{1}{(4\pi|z|)^{\frac{1}{2}n}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-\frac{1}{4}\|\xi\|^2 \cdot \cos \alpha/|z|} \cdot |\phi(\xi)| d\xi.$$

et en posant $\xi = |z|^{\frac{1}{2}} u$

$$|I(z)| \leq \frac{1}{(4\pi)^{\frac{1}{2}n}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-\frac{1}{4}(\cos \alpha \|u\|^2)} |\phi(|z|^{\frac{1}{2}} u)| du$$

et le théorème de Lebesgue permet de conclure car, pour tout u ,

$$\lim_{|z| \rightarrow 0} \phi(|z|^{\frac{1}{2}} u) = \phi(0)$$

et que la fonction

$$C' e^{-\frac{1}{4} \cos \alpha \|u\|^2} e^{h' \|u\|}$$

est intégrable dans \mathbf{R}^n .

LEMME 5: Soit $P : \mathbb{C}^+ \times M \times M$ vérifiant les hypothèses du lemme 3 avec $\alpha \geq 0$, on a:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \Delta_y\right)(P * S_n) = P + P * \left[\left(\frac{\partial}{\partial z} + \Delta_y\right) S_n\right].$$

DÉMONSTRATION:

$$(P * S_n)(z; x, y) = \int_0^z \left[\int_M P(u; x, m) S_n(z-u; m, y) v_M(m) \right] du$$

Donc:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} (P * S_n)(z; x, y) &= \lim_{\substack{u \rightarrow z \\ u \in [0, z]}} \int_M P(u; x, m) S_n(z-u; m, y) v_M(m) \\ &\quad + \int_0^z du \int_M P(u; x, m) \frac{\partial S_n}{\partial z}(z-u; m, y) v_M(m) \end{aligned}$$

La 1ère limite s'obtient avec le lemme 4: elle vaut $P(z; x, y)$. On a d'autre part

$$\Delta_y(P * S_n) = P * \Delta_y S_n$$

Donc:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \Delta_y\right)(P * S_n) = P + P * \left[\left(\frac{\partial}{\partial z} + \Delta_y\right) S_n\right].$$

On en déduit que la somme de la série (2) vérifie $(\partial/\partial z + \Delta_y)E = 0$.

Il reste à vérifier la condition:

$$\lim_{\substack{|z| \rightarrow 0 \\ |\text{Arg } z| \leq \alpha}} \int_M E(z; x, y) f(y) v_M(y) = f(x)$$

qui résulte facilement du lemme 4 et de la majoration de $E - S_n$. Le théorème 1 est ainsi démontré.

1.2. *Cas d'une variété compacte à courbure sectionnelle négative ou nulle.*

Nous allons appliquer la construction du paragraphe 1.1 au revêtement riemannien universel \tilde{M} de la variété compacte M .

Nous noterons maintenant \tilde{E} , \tilde{S}_k les fonctions que nous avons construites au paragraphe 1.1.

Nous aurons besoin du:

THÉORÈME 2: Soit Γ le groupe des automorphismes du revêtement \tilde{M} , la famille

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-\frac{1}{4}\xi_0 d^2(x, \gamma y)} \cdot e^{hd(x, \gamma y)}$$

est uniformément sommable sur tout compact de $\tilde{M} \times \tilde{M}$.

On utilise le lemme suivant ([8])

LEMME 6: Si on pose, pour x dans \tilde{M} : $\phi(\lambda) = \text{Card} \{ \gamma \in \Gamma / d(x, \gamma x) < \lambda \}$
on a:

$$\phi(\lambda) \leq C e^{(n-1)A\lambda}$$

où C est indépendant du choix de x dans \tilde{M} .

DÉMONSTRATION: Soit D un domaine fondamental dans \tilde{M} contenant x et de diamètre inférieur à $2 \text{ diam}(M) = 2A$

$$\bigcup_{d(x, \gamma x) \leq \lambda} \gamma(D) \subset B(x, \lambda + 2A)$$

D'après la majoration des volumes on en déduit:

$$\phi(\lambda) \cdot (\text{vol } M) \leq n\omega_n \int_0^{\lambda+2A} \left(\frac{shAt}{A} \right)^{n-1} dt$$

D'où le lemme 6.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2: Soit K un compact de $M \times M$ et

$$B = \text{Sup}_{(x, y) \in K} d(x, y)$$

De $\text{Card} \{ \gamma \in \Gamma / d(x, \gamma y) \leq \lambda \} \leq \phi(\lambda + B)$, on déduit:

$$\sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ j-1 < d(x, \gamma y) \leq j}} e^{-\frac{1}{2}\xi_0 d^2(x, \gamma y)} \cdot e^{hd(x, \gamma y)} \leq C e^{(n-1)A(j+B)} \cdot e^{-\frac{1}{2}\xi_0(j-1)^2} \cdot e^{hj}$$

Ce qui démontre le théorème.

THÉORÈME 3: Les familles $\sum_{\gamma \in \Gamma} \tilde{E}(z; x, \gamma y)$ et $\sum_{\gamma \in \Gamma} \tilde{S}_{[\frac{1}{2}(n-1)]}(z; x, \gamma y)$ sont uniformément sommables dans tout domaine $\{z \mid |z| \geq \varepsilon \text{ et } 1/z \in C_{\xi_0}^{\circ}\} \times \text{compact de } (\tilde{M} \times \tilde{M})$ et on a sur tout domaine $\{z \mid 1/z \in C_{\xi_0}^{\circ}\} \times \text{compact de } (\tilde{M} \times \tilde{M})$

$$\left| \sum_{\gamma \in \Gamma} \tilde{E}(z; x, \gamma y) - \sum_{\gamma \in \Gamma} \tilde{S}_{[\frac{1}{2}(n-1)]}(z; x, \gamma y) \right| \leq C(\xi_0)$$

DÉMONSTRATION: Cela résulte facilement du théorème 1, de la condition (E) et du théorème 2.

Posons

$$\bar{E}(z; x, y) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \tilde{E}(z; x, \gamma y) \text{ et de même } \bar{S}_{[\frac{1}{2}(n-1)]}$$

La construction des u_i étant invariante par les isométries de \tilde{M} , on a:

$$u_i(\gamma x, \gamma y) = u_i(x, y)$$

Donc, pour tout k :

$$\tilde{S}_k(z; \gamma x, \gamma y) = \tilde{S}_k(z; x, y)$$

et donc

$$\tilde{E}(z; \gamma x, \gamma y) = \tilde{E}(z; x, y)$$

On en déduit facilement que pour tout couple (γ_1, γ_2) de $\Gamma \times \Gamma$, on a :

$$\begin{aligned}\bar{S}_k(z; \gamma_1 x, \gamma_2 y) &= \bar{S}_k(z; x, y) \\ \bar{E}(z; \gamma_1 x, \gamma_2 y) &= \bar{E}(z; x, y)\end{aligned}$$

Donc les fonctions \bar{E} et \bar{S}_k définissent par passage au quotient des fonctions E et S_k sur $C^+ \times M \times M$.

THÉORÈME 4: *Le noyau E obtenu sur M par passage au quotient est la S.F.C.E.C sur M .*

DÉMONSTRATION: L'unicité résulte de [3] par prolongement analytique. Pour montrer que $(\partial/\partial z + \Delta_y)E = 0$, il suffit de le montrer pour \bar{E} et donc pour $\bar{S}(z; x, \gamma y) = \bar{E}(z; \gamma^{-1}x, y)$; c'est donc clair. L'autre condition peut se démontrer en utilisant un domaine fondamental D , en effet, soit $f: M \rightarrow C$ continue, on a :

$$\int_M E(z; x', y') f(y') v_M(y') = \int_D \bar{E}(z; x, y) f(\pi(y)) v_{\tilde{M}}(y)$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \int_D \bar{E}(z; x, \gamma y) f(\pi(y)) v_M(y) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{\gamma D} \bar{E}(z; x, \eta) f(\pi \gamma^{-1}(\eta)) v_M(\eta)$$

Donc comme les γD font une partition de \tilde{M}

$$\int_M E(z; x', y') f(y') v_M(y') = \int_{\tilde{M}} \bar{E}(z; x, \eta) f(\pi(\eta)) v_M(\eta)$$

Comme \bar{E} est S.F.C.E.C sur \tilde{M} et que $f \circ \pi$ est bornée, on en déduit que la limite quand $z \rightarrow 0$ avec $|\text{Arg}(z)| \leq \alpha$ est $f(\pi(x)) = f(x')$.

1.3. Condition (E) pour le revêtement universel d'une variété riemannienne de dimension 2 à courbure sectionnelle négative ou nulle

DÉFINITION 1: *Un nombre réel C sera dit universel s'il ne dépend que de la variété M ; $(C_i)_{i \in \mathbb{N}}$ désigneront de tels nombres.*

DÉFINITION 2: *Une application $f: \mathbf{R}^+ \times X \rightarrow \mathbf{R}$ sera dite de type exponentiel en t (E.t en abrégé) s'il existe des réels universels C et h tels que pour tout (t, x) de $\mathbf{R}^+ \times X$, on ait :*

$$|f(t, x)| \leq C e^{ht}$$

PROPOSITION 1: *Soit $y(t, x)$ la solution du système :*

$$D_{2,0} y(t, x) + \sigma(t, x) y(t, x) = f(t, x), y(0, x) = a, y'(0, x) = b$$

où $-A^2 \leq \sigma \leq 0$ et f de type E.t., alors y est de type E.t.

DÉMONSTRATION: Elle se fait par comparaison de l'équation sans second membre avec l'équation $y'' - A^2y = 0$ et par la méthode de variations des constantes.

Pour démontrer la condition (E), on utilise une carte en m fabriquée à l'aide de coordonnées polaires (t, α) dans $T_m \tilde{M}$, soit:

$$\Psi : (t, \alpha) \rightarrow \exp_m(tu_\alpha)$$

où u_α désigne le vecteur unitaire d'angle polaire α .

Pour toute fonction g sur \tilde{M} , on note \bar{g} la fonction $g \circ \Psi$. Soit y la solution du système

$$\begin{aligned} D_{2,0}y(t, \alpha) + \bar{\sigma}(t, \alpha)y(t, \alpha) &= 0 \\ y(0, \alpha) &= 0; D_{1,0}y(0, \alpha) = 1 \end{aligned}$$

On a

$$\theta(m, \psi(t, \alpha)) = \frac{1}{t} y(t, \alpha) = \int_0^1 D_{1,0}y(ts, \alpha) ds$$

Evaluons l'expression du laplacien dans la carte ψ :

$$\Delta f = -\frac{1}{y} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(y \frac{\partial f}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{y} \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right) \right]$$

On a donc:

$$(4) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} = -y^2 \Delta f - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - y \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

et on a:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} D_{0,1}y(t, \alpha) &= \left(\frac{y}{t} \right)^{-1} \times \int_0^1 D_{1,1}y(ts, \alpha) ds \\ \frac{1}{y} D_{0,1}y(t, \alpha) &= \left(\int_0^1 D_{1,0}y(ts, \alpha) ds \right)^{-1} \left(\int_0^1 D_{1,1}y(ts, \alpha) ds \right) \end{aligned}$$

On en déduit la proposition ci-dessous.

Notations: $((f, p))$ signifiera que toutes les dérivées $D_{i,j}f$ pour i quelconque et $j \leq p$ sont de type E.t.

PROPOSITION 2: Si on a $((f, k+1))$, $((\Delta f, k))$ et $((y, k+1))$, on a $((f, k+2))$.

Cela résulte de (4) où l'on fait opérer $D_{p,k}$.

PROPOSITION 3: Si on a $((\sigma, k))$ on a $((y, k))$

Cela résulte de la proposition 1.

PROPOSITION 4: On a $((\sigma, k))$ et $((y, k))$ pour tout k .

Démontrons par récurrence la propriété (P_k)

(P_k) Pour tout i ; $((\Delta^i \sigma, k))$ et $((y, k))$

(P_0) est clair

(u, v) désigne un repère orthonormé au point $\psi(t, \alpha)$, $u = \psi'(\partial/\partial t)$ et $v = \psi'(1/t \cdot \partial/\partial \alpha)$

$$D_{p,0}(\Delta^i \sigma) = d^p(\Delta^i \sigma)(u, \dots, u)$$

et les dérivées covariantes de $\Delta^i \sigma$ sont bornées car elles proviennent d'un relèvement de M qui est compacte.

On en déduit la majoration des $D_{p,0} \gamma$.

On a: $D_{0,1}(\Delta^i \sigma) = d(\Delta^i \sigma)(tyv)$.

On obtient (P_1) en dérivant cette formule par rapport à t et en utilisant (P_0) pour y . De (P_1) pour σ , on le déduit pour γ .

(P_k) implique (P_{k+1}) d'après la proposition 2.

Cette dernière proposition, l'expression de θ et du laplacien permettent de montrer la condition (E) pour une variété de dimension 2 qui est le revêtement universel d'une variété compacte.

2. Calcul d'intégrale oscillante

On supposera M compacte, de dimension 2, et $\sigma < 0$. Les deux applications

$$z \mapsto \int_M E\left(\frac{1}{z}; x, x\right) v_M(x) \text{ et } z \mapsto \sum_{k \in \mathbb{N}} e^{-\lambda_k/z}$$

étant holomorphes dans \mathbb{C}^+ et coïncidant pour z réel positif d'après [3] p. 206, sont égales. Nous déduisons alors des théorèmes 3 et 4, la formule:

$$(1) \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} e^{-\lambda_k/z} = \int_M S_0\left(\frac{1}{z}; x, x\right) v_M(x) + 0^+(1).$$

Pour évaluer cette intégrale, nous remontons à \tilde{M} à l'aide du lemme de régularisation suivant:

LEMME 1: Il existe une fonction $\phi : \tilde{M} \rightarrow [0, 1]$, C^∞ à support compact telle que, pour toute fonction continue $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ on ait:

$$\int_M f(x') v_M(x') = \int_{\tilde{M}} f(\pi(x)) \phi(x) v_{\tilde{M}}(x)$$

De plus, pour toute sous-variété N de M , on a:

$$\int_{\pi^{-1}(N)} f(\pi(x)) \phi(x) v_{\pi^{-1}(N)}(x) = \int_N f(x') v_N(x')$$

De plus, on peut prendre ϕ telle que $d_0 = \text{diamètre}(\text{Supp } \phi) \leq 2 \text{ diam}(M) + 1$ donc d_0 majoré par un nombre universel.

DÉMONSTRATION: Soit $\psi : \tilde{M} \rightarrow [0, 1]$ une fonction C^∞ à support compact telle que, pour tout x' de M , il existe au moins un point de x de $\pi^{-1}(x')$ vérifiant $\psi(x) > 0$. Posons $\phi(x) = \psi(x)(\sum_{\gamma \in \Gamma} \psi(\gamma x))^{-1}$. La somme $\sum_{\gamma \in \Gamma} \psi(\gamma x)$ est localement finie à cause de la compacité du support de ψ et du fait que Γ agit sur \tilde{M} de façon proprement discontinue et sans points fixes. Soit $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ continue et D un domaine fondamental du revêtement, on a:

$$\int_{\tilde{M}} f(\pi(x))\phi(x)v_{\tilde{M}}(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{\gamma D} f(\pi(x))\phi(x)v_{\tilde{M}}(x).$$

Soit, en posant $x = \gamma y$

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{\gamma D} f(\pi(x))\phi(x)v_{\tilde{M}}(x) = \int_D f(\pi(y)) \cdot \sum_{\gamma \in \Gamma} \phi(\gamma y)v_{\tilde{M}}(y)$$

et d'après la définition de $\phi : \sum_{\gamma \in \Gamma} \phi(\gamma y) = 1$, ce qui démontre le premier résultat. Pour le deuxième, soit $V_\varepsilon = \{x \in M \mid d(x, N) \leq \varepsilon\}$. On a:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\text{vol}(B_{n-d}(\varepsilon))]^{-1} \int_{V_\varepsilon} g(x)v_M(x) = \int_N g(x)v_N(x)$$

où $B_{n-d}(\varepsilon)$ désigne la boule euclidienne de dimension $n-d$ et rayon ε , et $d = \dim N$. On en déduit le résultat en utilisant le fait que $\pi^{-1}(V_\varepsilon(N)) = V_\varepsilon(\pi^{-1}(N))$.

Pour la condition supplémentaire de support, on remarque que $\text{Supp}(\phi) = \text{Supp}(\psi)$ et qu'on peut prendre ψ à support dans un voisinage de rayon 1 d'un domaine fondamental de diamètre inférieur à $2 \text{diam}(M)$. On déduit alors de (1) et de l'expression de $S_0(z; \pi(x), \pi(x))$ (1.2) la formule (2)

$$(2) \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} e^{-\lambda_k/z} = \frac{z}{4\pi} \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{\tilde{M}} e^{-\frac{1}{2}zd^2(x, \gamma x)} \cdot \theta^{-\frac{1}{2}}(x, \gamma x)\phi(x)v_{\tilde{M}}(x) + 0^+(1)$$

le problème est maintenant d'évaluer l'intégrale

$$(3) \quad I_\gamma(z) = \int_{\tilde{M}} e^{-\frac{1}{2}zd^2(x, \gamma x)} \theta^{-\frac{1}{2}}(x, \gamma x)\phi(x)v_{\tilde{M}}(x)$$

2.1. Désintégration de $v_{\tilde{M}}$ par rapport à l'axe de γ

Le calcul de (3) pour $\text{Im } z \rightarrow \infty$ fait intervenir les valeurs critiques de l'application $x \mapsto d^2(x, \gamma x)$. Les résultats suivants sont démontrés dans [4] p. 10 et suivantes: l'ensemble des points critiques de cette application f_γ est une géodésique A_γ de \tilde{M} . De plus, on sait qu'il existe une bijection canonique de l'ensemble des classes de conjugaison de Γ sur l'ensemble \mathcal{L} des classes d'homotopie libre de M ; soit a l'élément de \mathcal{L} que l'on associe ainsi à la classe de γ dans Γ . Alors il existe une géodésique péri-

dique unique dans a , soit L_a sa longueur; γ translate A_γ d'une longueur égale à L_a et la valeur critique de f_γ est L_a^2 . Nous allons utiliser pour le calcul de I_γ une carte liée à γ de la façon suivante: on paramètre A_γ proportionnellement à l'arc par $s \mapsto m_s$ de façon que $\gamma(m_s) = m_{s+L_a}$; on considère un repère orthonormé (u_s, v_s) de $T_{m_s} \tilde{M}$ variant parallèlement avec s et tel que u_s soit le vecteur vitesse de m_s . On pose alors $\Phi(s, t) = \exp_{m_s}(tv_s)$. Φ est un difféomorphisme de \mathbf{R}^2 sur \tilde{M} ; soit $j(s, t)$ le déterminant de son application tangente au point (s, t) et $Y_s(t)$ le champ de Jacobi le long de $\exp_{m_s}(\mathbf{R} \cdot v_s) = G_s$ tel que: $Y_s(0) = u_s$; $Y'_s(0) = 0$, on a: $j(s, t) = |Y_s(t)|$. On a donc pour toute f intégrable sur \tilde{M} :

$$(4) \quad \int_{\tilde{M}} f v_{\tilde{M}} = \int_{\mathbf{R}^2} f(\Phi(s, t)) j(s, t) ds dt.$$

2.2. Un lemme sur les intégrales oscillantes

Nous nous ramènerons à l'aide de la formule (4) au cas du:

LEMME 2: Soit $\alpha : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction C^5 , convexe, et ayant l'origine pour seul point critique. Soit $h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction C^2 nulle pour $|t| \geq R$. Etant donné un réel $\xi_0 > 0$, il existe un polynôme P de $\mathbf{R}[X_1, X_2, X_3, X_4]$ tel que, en posant $b = \alpha''(0)/2$, on ait, pour tout z de C_{ξ_0} :

$$\int_{\mathbf{R}} e^{-z\alpha(t)} h(t) dt = \left\{ \left(\frac{\pi}{bz} \right)^{\frac{1}{2}} h(0) + \frac{1}{z} R(z) \right\} e^{-z\alpha(0)} \text{ et}$$

$$|R(z)| \leq P \left(\frac{1}{b}, \|\alpha\|_{C^5([-R, R])}, \|h\|_{C^2([-R, +R])}, R \right)$$

Pour évaluer, par exemple, l'intégrale sur \mathbf{R}^+ , on peut faire le changement de variables $\theta = (\alpha(t) - \alpha(0))^{\frac{1}{2}} = \beta(t)$. On a:

$$\int_{\mathbf{R}^+} e^{-z\alpha(t)} h(t) dt = e^{-z\alpha(0)} \left[\int_{\mathbf{R}^+} e^{-z\theta^2} \cdot \left(\frac{h}{\beta'} \circ \beta^{-1} \right) (\theta) d\theta \right]$$

Nous appliquerons le

LEMME 2bis: Soit $\psi : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction C^2 à support compact, on a:

$$\int_{\mathbf{R}^+} e^{-z\theta^2} \psi(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{z} \right)^{\frac{1}{2}} \psi(0) + \frac{1}{z} S(z) \text{ Avec } |S(z)| \leq C \|\psi\|_{C^2}.$$

DÉMONSTRATION DU LEMME 2 bis:

$$\int_{\mathbf{R}^+} e^{-z\theta^2} \psi(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{z} \right)^{\frac{1}{2}} \psi(0) + \int_{\mathbf{R}^+} e^{-z\theta^2} \theta \psi_1(\theta) d\theta$$

où

$$\psi_1(\theta) = \frac{\psi(\theta) - \psi(0)}{\theta}$$

$$\int_{\mathbf{R}^+} e^{-z\theta^2} \theta \psi_1(\theta) d\theta = \left[\frac{e^{-z\theta^2}}{-2z} \cdot \psi_1(\theta) \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2z} \int_{\mathbf{R}^+} e^{-z\theta^2} \psi_1'(\theta) d\theta.$$

De plus:

$$\psi_1(\theta) = \int_0^1 \psi'(\theta s) ds$$

Donc $|\psi_1'(\theta)| \leq \|\psi\|_{C^2}$.

On en déduit facilement le lemme 2bis.

DÉMONSTRATION DU LEMME 2: D'après le lemme 2 bis, il nous suffit de majorer $\|h/\beta' \circ \beta^{-1}\|_{C^2}$.

(1) Minoration de

$$\beta'(t) = \frac{\alpha'(t)}{2\sqrt{\alpha(t) - \alpha(0)}}.$$

Si

$$0 \leq t \leq \frac{2b}{\sup_{[0, R]} |\alpha''|}, \text{ on a: } |\alpha'(t)| \geq bt \text{ et } |\alpha(t) - \alpha(0)| \leq \frac{4}{3}bt^2$$

donc:

$$\beta'(t) \geq \frac{\sqrt{b}}{4}$$

et si

$$\frac{2b}{\sup_{[0, R]} |\alpha''|} \leq t \leq R, \quad |\alpha'(t)| \geq \frac{2b^2}{\sup_{[0, R]} |\alpha''|} \quad (\text{car } \alpha \text{ est convexe})$$

$$|\alpha(t) - \alpha(0)| \leq R \sup_{[0, R]} |\alpha'|.$$

Finalement il existe un polynôme P_1 tel que:

$$\left| \frac{1}{\beta'(t)} \right| \leq P_1 \left(\frac{1}{b}, \|\alpha\|_{C^3(0, R)}, R \right).$$

(2) Majoration des dérivées de β : elles se font en partant de

$$\beta(t) = t \left(\int_0^1 (1-u) \alpha''(tu) du \right)^{\frac{1}{2}}$$

et de

$$\left| \frac{\beta(t)}{t} \right| \geq \min_{u \in [0, R]} (\beta'(u)).$$

On en déduit que les dérivées jusqu'à l'ordre 3 de β sont majorées à l'aide des dérivées jusqu'à l'ordre 5 de α et de la majoration de $1/\beta'(t)$ vue au § 1).

On en déduit finalement le lemme 2.

2.3. Calcul de $I_\gamma(z)$

Partant de la formule (3), il vient en utilisant la désintégration de 2.1.

$$(5) \quad I_\gamma(z) = \int_{\mathbf{R}} ds \int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{1}{2}zd^2(\Phi(s,t), \gamma\Phi(s,t))} \theta^{-\frac{1}{2}}(\Phi(s,t), \gamma\Phi(s,t)) \\ \times \phi(\Phi(s,t)) j(s,t) dt$$

Nous allons appliquer le lemme 2.2. pour évaluer l'intégrale en t .

(a) Notations et définitions préliminaires

Dans la suite des calculs de 2.3 nous supposons γ et s fixés.

Nous introduisons les paramètres réels t_1 et t_2 et posons:

$$p(t_1) = \Phi(s, t_1); \quad q(t_2) = \gamma(p(t_2)) = \Phi(s + L_a, \varepsilon t_2)$$

($\varepsilon = +1$ si γ conserve l'orientation de \tilde{M} , $\varepsilon = -1$ sinon).

D_{t_1, t_2} désignera le segment géodésique $(p(t_1), q(t_2))$ paramétré par τ de 0 à 1; (u, v) sera un repère orthonormé variant parallèlement le long de ce segment, tel que u soit tangent à D_{t_1, t_2} et orienté de $p(t_1)$ vers $q(t_2)$, et que (u, v) et $(u, p'(t_1))$ définissent la même orientation au point $p(t_1)$.

On pose:

$$p'(t_1) = \cos \theta_1 \cdot u + \sin \theta_1 \cdot v \quad (\sin \theta_1 > 0) \\ q'(t_2) = \cos \theta_2 \cdot u + \sin \theta_2 \cdot v.$$

On introduit aussi $\delta(t_1, t_2) = d(p(t_1), q(t_2))$ et pour toute fonction $\phi(t_1, t_2)$, on note $\tilde{\phi}$ l'application diagonale $t \mapsto \phi(t, t)$.

Nous introduisons aussi les trois champs de Jacobi Y, Z et W sur D_{t_1, t_2} satisfaisant aux conditions aux limites:

$$Y(0) = p'(t_1); \quad Y(1) = q'(t_2) \\ Z(0) = 0; \quad Z(1) = q'(t_2) \\ W(0) = p'(t_1); \quad W(1) = 0.$$

On a évidemment $Y = Z + W$.

Nous décomposons un tel champ, par exemple Y , suivant u et v :

$$Y = \bar{y} \cdot u + y \cdot v.$$

Donc y et \bar{y} vérifient les systèmes (les $\dot{}$ et $\ddot{}$ désignant des dérivés par rapport à τ)

$$\begin{cases} \bar{y}(0) = \cos \theta_1; \bar{y}(1) = \cos \theta_2 \\ \ddot{\bar{y}} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y(0) = \sin \theta_1; y(1) = \sin \theta_2 \\ \ddot{y} + \sigma \delta^2 y = 0 \end{cases}$$

où σ désigne la courbure sectionnelle au point de paramètre τ de D_{t_1, t_2} .
Pour un tel champ nous posons:

$$E(Y) = \int_0^1 (\dot{y}^2 - \sigma \delta^2 y^2) d\tau.$$

Les formules de variation première et seconde nous donnent les résultats suivants:

$$\begin{aligned} D_{1,0} \delta &= -\cos \theta_1; & D_{0,1} \delta &= \cos \theta_2; & \delta' &= \widetilde{\cos \theta_2} - \widetilde{\cos \theta_1} \\ D_{2,0} \delta &= \frac{1}{\delta} E(W); & D_{0,2} \delta &= \frac{1}{\delta} E(Z); & \delta'' &= \frac{1}{\delta} E(Y) \end{aligned}$$

Les calculs qui vont suivre reposent en grande partie sur le lemme suivant de calcul des variations:

LEMME 3: Soient a et b deux réels, f_1 et $f_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continues et vérifiant $f_2 \leq f_1 \leq 0$. Considérons les solutions y_1 et y_2 uniques des systèmes suivants:

$$\begin{cases} y_1(0) = a; & y_1(1) = b \\ y_1' + f_1 y_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_2(0) = a; & y_2(1) = b \\ y_2' + f_2 y_2 = 0 \end{cases}$$

Alors on a:

$$\int_0^1 (y_1'^2 - f_1 y_1^2) d\tau \leq \int_0^1 (y_2'^2 - f_2 y_2^2) d\tau.$$

Utilisant ce lemme et le fait que M est compacte et $\sigma < 0$, et donc $-A^2 \leq \sigma \leq -B^2 < 0$, on a les majorations suivantes:

$$\begin{aligned} (6) \quad \frac{B\delta}{t h B \delta} \left(\sin^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_2 - \frac{2}{ch B \delta} \sin \theta_1 \sin \theta_2 \right) \\ \leq E(Y) \leq \frac{A\delta}{t h A \delta} \left(\sin^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_2 - \frac{2}{ch A \delta} \sin \theta_1 \sin \theta_2 \right) \end{aligned}$$

et des majorations analogues pour Z et W en faisant $\sin \theta_i = 0$ dans les inégalités précédentes.

Rappelons qu'on a dit qu'un nombre réel universel s'il ne dépend que de M (et donc pas de s , t et γ).

(b) Majoration $|t| \leq C\tilde{\delta}(t) + C'$

LEMME 4: Il existe des nombres C et C' universels tels que

$$|t| \leq C\tilde{\delta}(t) + C'$$

DÉMONSTRATION: L'expression de $\tilde{\delta}''$ montre la convexité de δ . Comme $\tilde{\delta}'(0) = 0$, il suffit de montrer qu'il existe des nombres t_0 et a strictement

positifs universels tels que: pour tout t , avec $|t| \leq t_0$, on ait $\tilde{\delta}''(t) \geq a$. γ étant supposée distincte de l'identité, on a $\delta \geq \rho_0 > 0$ (ρ_0 rayon d'injectivité de M). Donc $\tilde{\delta}''(0) \geq 2B(1 - 1/chB\rho_0) > 0$, c'est-à-dire $\tilde{\delta}''(0) \geq b > 0$ où b est un nombre universel. Il suffit donc de trouver des nombres t_1 et c universels tels que, si $|t| \leq t_1$, on ait $|\tilde{\delta}'''(t)| \leq c$. Or $|\tilde{\delta}'''(t)| \leq 4B/thB\rho_0(\tilde{\theta}'_1 + \tilde{\theta}'_2)$. Il suffit donc de montrer que $(\cos \theta_i)'$ sont majorées par des nombres universels. On a:

$$D_{1,0} \delta = -\cos \theta_1$$

Donc:

$$-(\cos \theta_1)' = D_{2,0} \delta + D_{1,1} \delta = \frac{1}{2\delta} (E(Y) + E(W) - E(Z))$$

Donc:

$$|(\cos \theta_1)'| \leq \frac{A}{2thA\delta} \left(2 \sin^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_2 + \frac{2}{chA\delta} |\sin \theta_1| \cdot |\sin \theta_2| \right)$$

cette expression est majorée par un nombre universel.

(c) *Un lemme de majoration de dérivées diagonales*

Pour majorer les dérivées de $\tilde{\delta}$ nous utiliserons uniquement des majorations de $D_{p,0} \delta$ et $D_{0,q} \delta$ à l'aide du:

LEMME 5: Soit $\psi : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$, tel qu'il existe $a > 0$ avec $\psi(t) \geq at + b$, et soit $\phi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ une application C^∞ vérifiant:

$$\begin{aligned} \text{Sup}_{\substack{|x| \leq A \\ |y| \geq A}} |D_{p,0} \phi(x, y)| &\leq c_p e^{\alpha_p \psi(A)} \\ \text{Sup}_{\substack{|x| \leq A \\ |y| \geq A}} |D_{0,q} \phi(x, y)| &\leq c_q e^{\alpha_q \psi(A)} \end{aligned}$$

Alors si $f(t) = \phi(t, t)$ il existe des réels d_k et β_k tels que pour tout t :

$$|f^{(k)}(t)| \leq d_k e^{\beta_k \psi(2t)}$$

(d_k et β_k ne dépendant que de a, b, c_p et α_q)

DÉMONSTRATION: Soit g une fonction C^∞ à support dans $[-A, A]^2$ et \hat{g} sa transformée de Fourier. On a:

$$2|X^p Y^q \hat{g}(X, Y)| \leq |X^{2p} \hat{g}(X, Y)| + |Y^{2q} \hat{g}(X, Y)|$$

Soit en utilisant le fait que la transformation de Fourier est une isométrie pour les normes L^2 :

$$\|D_{p,q} g\|_{L^2} \leq c(p, q) (\|D_{2p,0} g\|_{L^2} + \|D_{0,2q} g\|_{L^2})$$

Or

$$D_{p,q}g(x,y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y D_{p+1,q+1}g(t,s) dt ds$$

$$|D_{p,q}g(x,y)| \leq 2Ac(p+1, q+1)(\|D_{2p+2,0}g\|_{L^2} + \|D_{0,2q+2}g\|_{L^2})$$

$$|D_{p,q}g(x,y)| \leq 4A^2c(p+1, q+1)(\sup |D_{2p+2,0}g| + \sup |D_{0,2q+2}g|)$$

Soit maintenant α une fonction C^∞ nulle pour $|t| \geq 2$ et égale à 1 pour $|t| \leq 1$, posons $\phi_R(x,y) = \phi(x,y)\alpha(x/R)\alpha(y/R)$ et supposons $R \geq R_0 > 0$. On a :

$$\sup_{[-A,A]^2} |D_{p,q}\phi| \leq \sup_{[2A,2A]^2} |D_{p,q}\phi_R| \leq 16R^2C(p+1, q+1)(\sup |D_{2p+2,0}\phi_R| + \sup |D_{0,2q+2}\phi_R|).$$

Utilisant le fait que $f^{(k)}(t) = \sum_{r=0}^k C_k^r D_{r,k-r}\phi(t,t)$ on en déduit le lemme.

REMARQUE: Pour majorer la dérivée d'ordre k de f , il faut prendre les couples (p,q) tels que $p+q = k$, $p = 1, \dots, k-1$, donc majorer les $D_{p,0}\phi$ et $D_{0,q}\phi$ jusqu'à l'ordre $2k$.

(d) *Majoration des dérivées de la distance d'un point à une géodésique.*

On se donne ici un point a de \tilde{M} et une droite géodésique Γ telle que $\text{dist}(a, \Gamma) \geq C > 0$ où C est un nombre universel. On paramètre Γ par la longueur de l'arc s à partir de la projection b de a sur Γ . On note $\beta(s) = d(a, p(s))$.

DÉFINITION: Une famille d'applications $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ sera dite de type exponentiel en distance (E.d) s'il existe des nombres C et C' universels tels que: $|f(s)| \leq Ce^{C'\beta(s)}$.

LEMME 6: Les dérivées de $\beta(s)$ sont de type E.d.

DÉMONSTRATION: Nous noterons $Y(\tau)$ le champ de Jacobi sur le segment géodésique $(a, p(s))$ paramétré par τ de 0 à 1 tel que $Y(0) = 0$, $Y(1) = p'(s)$. On définit un repère (u, v) comme en 2.3(a), alors $Y = \bar{y}u + yv$. y et \bar{y} vérifiant les équations suivantes:

$$\begin{aligned} \bar{y}(0) &= 0, & \bar{y}(1) &= \cos \theta, & \bar{y}'' &= 0 \\ y(0) &= 0, & y(1) &= \sin \theta, & \ddot{y} + \sigma\beta^2 y &= 0. \end{aligned}$$

On a: $\beta'(s) = \cos \theta$; $\beta''(s) = 1/\beta(s)$; $E(Y_s) = -\sin \theta \cdot \theta'(s)$.

Faisons les remarques suivantes:

(i) On peut montrer à l'aide d'un calcul de variation que

$$|\sin \theta| \geq \frac{\text{sh}Ad(a,b)}{\text{sh}A\beta(s)},$$

donc $1/\sin \theta$ est de type E.d.

$$(ii) \quad \frac{B}{thB\beta} \sin^2 \theta \leq \frac{1}{\beta} E(Y) \leq \frac{A}{thA\beta} \sin^2 \theta$$

Donc β , β' , β'' et θ' sont de type E.d.

NOTATION: Soit $f: R \times [0, 1] \rightarrow R$ une fonction de s et τ , (f, k) signifie que f et ses dérivées par rapport à s jusqu'à l'ordre k compris sont de type E.d.

Pour démontrer le lemme il suffit évidemment d'établir par récurrence la propriété (P_k) suivante:

$$(P_k) \quad (\beta, k+1), (\theta, k), \forall p \in N(D_{0,p}, k) \text{ et } y(D_{0,p}\bar{y}, k)$$

$$\forall (p, i) \in N \times N(D_{0,p}(\Delta^i \sigma), k)$$

(P_0) et (P_1) se démontre comme dans 1, proposition 4.

Montrons que (P_k) implique (P_{k+1}) . L'expression de β'' montre que (β, k) , $(D_{0,p}y, k)$ et (σ, k) impliquent $(\beta, k+2)$ et il est clair d'après la remarque (i) que cela implique $(\theta, k+1)$. Vus les systèmes vérifiés par y et \bar{y} (β, k) , (θ, k) et $(D_{0,p}\sigma, k)$ impliquent $(D_{0,p}y, k)$ et $(D_{0,p}\bar{y}, k)$.

Il reste donc à montrer que $(\beta, k+2)$, $(\theta, k+1)$, $(D_{0,p}y, k)$, $(D_{0,p}\bar{y}, k)$ et $(D_{0,p}(\Delta^i \sigma), k)$ impliquent $(D_{0,p}(\Delta^i \sigma), k+1)$.

Suivant la méthode utilisée pour la condition (E), nous introduisons la carte $\Omega: (s, \tau) \rightsquigarrow$ le point de paramètre τ de $(a, p(s))$.

L'expression du laplacien d'une fonction $f(s, \tau)$ est:

$$\begin{aligned} \Delta f = & -\frac{1}{\beta y} \left(D_{1,0} \left(\frac{\beta}{y} \cdot D_{1,0} f - \frac{\bar{y}}{y} D_{0,1} f \right) \right) \\ & + D_{0,1} \left(-\frac{\bar{y}}{y} D_{1,0} f - \frac{y^2 + \bar{y}^2}{\beta y} D_{0,1} f \right) \end{aligned}$$

Donc:

$$D_{2,0} f = -y^2 \Delta f + \frac{2\bar{y}}{\beta} D_{1,1} f - \frac{y^2 + \bar{y}^2}{\beta^2} D_{0,2} f - \frac{a}{\beta} D_{1,0} f - \frac{b}{\beta} D_{0,1} f$$

Avec

$$a = y \left(D_{1,0} \left(\frac{\beta}{y} \right) - D_{0,1} \left(\frac{\bar{y}}{y} \right) \right); \quad b = y \left(D_{1,0} \left(\frac{\bar{y}}{y} \right) - D_{0,1} \left(\frac{y^2 + \bar{y}^2}{\beta y} \right) \right)$$

Montrons que (P_k) implique pour tout $p \in N(D_{0,p}a$ et $D_{0,p}b, k-1)$. Vu la forme de a et b et que $y \geq \sin \theta \cdot A\beta t/shA\beta$, il suffit de montrer que y/τ et ses dérivées par rapport à τ vérifient $(D_{0,p}(\bar{y}/\tau), k)$.

Cela résulte du fait que:

$$\frac{y(\tau)}{\tau} = \int_0^1 D_{0,1} y(u\tau) du$$

et de la propriété (P_k) . Si on applique à $\Delta^i \sigma$ l'expression de $D_{2,0}$ écrite ci-dessus et que l'on dérive p fois par rapport à τ et $k-1$ fois par rapport à s , on aura montré que $D_{k+1,p} \Delta^i \sigma$ est de type E.d. Ce qui démontre le lemme.

(e) *Majoration des dérivées de $t \rightarrow \frac{1}{4} d^2(\Phi(s, t), \gamma \Phi(s, t))$*

Si on pose

$$\psi(t) = \sup_{\substack{|t_1| \leq t \\ |t_2| \leq t}} \delta(t_1, t_2),$$

il est clair que les dérivées δ , δ' et δ'' sont majorées par des exponentielles $\psi(t)$. Il résulte de (b) que ψ vérifie l'hypothèse du lemme 5, en utilisant (d) il vient que les dérivées $\delta^{(k)}$ sont majorées par des exponentielles à coefficients universels de $\psi(2t)$.

(f) *Majoration des dérivées de $\theta^{-\frac{1}{2}}(\Phi(s, t), \gamma \Phi(s, t), \phi(\Phi(s, t)))$ et $j(s, t)$ par rapport à t .*

Ces majorations jusqu'à l'ordre 2 ne présente pas de difficultés. Les dérivées de ces trois fonctions sont majorées par des exponentielles à coefficients universels de $\psi(t)$.

(g) *Calcul de $I_\gamma(z)$*

Nous sommes amenés à distinguer les trois cas suivants:

1er Cas: $\gamma = Id$

La formule (3) donne alors:

$$I_{Id}(z) = \int_{\tilde{M}} \phi(x) v_{\tilde{M}}(x).$$

D'après le lemme 1, on a donc:

$$I_{Id}(z) = \text{vol}(M).$$

2ème Cas: *distance $(\text{Supp } \phi, A_\gamma) \geq t_0$ (t_0 est le nombre universel déjà défini en b))*

Pour ce cas et le troisième, on pose:

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \frac{1}{4} d^2(\Phi(s, t), \gamma \Phi(s, t)) \\ h(t) &= \theta^{-\frac{1}{2}}(\Phi(s, t), \gamma \Phi(s, t)) \phi(\Phi(s, t)) j(s, t) \end{aligned}$$

et on suppose que z est dans C_{ξ_0} . Pour majorer

$$\int_{\mathbf{R}} e^{-z\alpha(t)} h(t) dt$$

on remarque que α est monotone sur \mathbf{R}^+ et sur \mathbf{R}^- . Sur \mathbf{R}^+ par exemple, on pose $\alpha(t) = u$ et une intégration par parties utilisant le fait que $h(0) = 0$ donne:

$$\int_{\mathbf{R}^+} e^{-z\alpha(t)} h(t) dt = \int_{L_a^2/4}^{+\infty} e^{-zu} \left(\frac{h}{\alpha'} \circ \alpha^{-1} \right) (u) du$$

$$\int_{\mathbf{R}^+} e^{-z\alpha(t)} h(t) dt = \frac{1}{z} \int_{L_a^2/4}^{+\infty} e^{-zu} \left(\frac{\alpha' h' - \alpha'' h}{\alpha'^3} \circ \alpha^{-1} \right) (u) du$$

Soit y_0 un point de $\text{Supp } \phi$, on a pour tout x dans $\text{Supp } \phi$:

$$|d(x, \gamma x) - d(y_0, \gamma y_0)| \leq 2d_0$$

De plus, le choix de t_0 implique que, sur le support de h , $|\alpha'(t)|$ est minoré par un nombre universel. Des majorations des dérivées de h et α jusqu'à l'ordre 2(e) et (f), on déduit l'inégalité suivante:

$$\left| \int_{\mathbf{R}^+} e^{-z\alpha(t)} h(t) dt \right| \leq \frac{1}{|z|} \frac{(d(y_0, \gamma y_0) + 2d_0)^2}{4} \cdot e^{-\frac{1}{2}\xi_0(d(y_0, \gamma y_0) - 2d_0)^2} \cdot C_1 e^{C_2(d(y_0, \gamma y_0) + d_0)}$$

Donc, en faisant de même pour l'intégrale sur \mathbf{R}^- , et en intégrant par rapport à s sur une longueur utile ne dépassant pas d_0 , on a:

$$|(I_\gamma(z))| \leq \frac{1}{|z|} C_3 e^{C_4(y_0, \gamma y_0)} \cdot e^{-\frac{1}{2}\xi_0 d^2(y_0, \gamma y_0)}$$

3ème cas: distance ($\text{Supp } \phi, A_\gamma$) $< t_0$

Ici $h(0)$ n'est pas nécessairement nul, on se sert du lemme 2. Le calcul de $\alpha''(0)$ utilise, pour chaque valeur de s , un champ de Jacobi Y_s sur A_γ tel que:

$$Y_s(s) = v_s; \quad Y_s(s+L_a) = \gamma'(v_s)$$

($\gamma'(v_s) = \varepsilon v_{s+L_a}$, avec $\varepsilon = +1$ ou -1 selon que γ conserve ou non l'orientation).

Ce champ de Jacobi reste colinéaire à v , on peut poser:

$$Y_s(\omega) = y_s(\omega) \cdot v_\omega.$$

On a alors d'après la formule de la variation seconde:

$$\alpha''(0) = \frac{L_a}{2} \int_s^{s+L_a} ((y'_s(\omega))^2 - \sigma(\omega)(y_s(\omega))^2) d\omega$$

$$\alpha''(0) \geq \frac{BL_a}{ih(BL_a)} \left(1 - \frac{1}{chBL_a} \right).$$

Donc $\alpha''(0)$ est minoré par une constante universelle C_5 strictement positive. Le lemme 2 s'écrit alors:

$$\int_{\mathbf{R}} e^{-z\alpha(t)} h(t) dt = \left\{ \left(\frac{2\pi}{\alpha''(0)z} \right)^{\frac{1}{2}} \theta^{-\frac{1}{2}}(m_s, m_{s+L_a}) \phi(m_s) + \frac{1}{z} R(z) \right\} e^{-\frac{1}{2}zL_a^2}$$

avec

$$|R(z)| \leq P \left(\frac{2}{C_5}; C_6 e^{C_7 \psi(2(t_0+d_0))}; C_8 e^{C_9 \psi(t_0+d_0)}; t_0+d_0 \right)$$

on en déduit:

$$|R(z)| \leq C_{10} e^{C_{11} d(y_0, \gamma y_0)}.$$

De ces deux derniers cas, on déduit le

THÉORÈME 5: Soit y_0 un point de *Supp* ϕ , y_s la fonction décrite plus haut, et supposons z dans C_{ξ_0} , on a, pour $\gamma \neq Id$:

$$I_\gamma(z) = \left(\frac{4\pi}{z}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}zL_a^2} \cdot \int_{\mathbf{R}} \left[L_a \left(\int_s^{s+L_a} (y'_s(\omega)) \right)^2 - \sigma(\omega)(y_s(\omega))^2 d\omega \right] \theta(m_s, m_{s+L_a})^{-\frac{1}{2}} \phi(m_s) ds + \frac{1}{z} R_\gamma(z)$$

Avec

$$|R_\gamma(z)| \leq D e^{Ed(y_0, \gamma y_0)} \cdot e^{-\frac{1}{2}\xi_0 d^2(y_0, \gamma y_0)}$$

D et E désignant des nombres universels. En effet dans le deuxième cas $\phi(m_s)$ est nul pour tout s et $I_\gamma(z) = 1/z R_\gamma(z)$.

2.4. Conclusion

Utilisant l'égalité (2) et le théorème 5, il vient:

$$\sum_{k \in \mathbf{N}} e^{-\lambda k/z} = \frac{z}{4\pi} (\text{vol } M) + \left(\frac{z}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\gamma \in \Gamma - \{Id\}} C_\gamma e^{-\frac{1}{2}zL_a^2} + \frac{1}{4\pi} \sum_{\gamma \in \Gamma} R_\gamma(z) + 0^+(1)$$

D'après le théorème 2 et la majoration de R_γ du théorème 5, on a:

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} R_\gamma(z) = 0^+(1).$$

En posant $\sum_{\gamma \in a} C_\gamma = u_a$, on obtient:

$$\sum_{k \in \mathbf{N}} e^{-\lambda k/z} = \frac{z}{4\pi} \text{vol } M + \left(\frac{z}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{a \in \mathcal{L} - \{Id\}} u_a e^{-\frac{1}{2}zL_a^2} + 0^+(1)$$

Ce qui est exactement le théorème énoncé dans l'introduction. Son corollaire se déduit immédiatement en fixant ξ_0 et en prenant la transformation de Fourier par rapport à $\eta = \text{Im}(z)$.

Il rest à donner une expression des u_a qui ne dépende pas du choix de ϕ . Soit G_a la géodésique périodique de la classe a , on a: $\bigcup_{\gamma \in a} A_\gamma = \pi^{-1}(G_a)$; choisissant un γ de a et utilisant le lemme 1, il vient:

$$u_a = \int_0^{L_a} \left[L_a \left\{ \int_s^{s+L_a} (y'_s{}^2(\omega) - \sigma(\omega)y_s^2(\omega)) d\omega \right\} \theta(m_s, m_{s+L_a}) \right]^{-\frac{1}{2}} ds.$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. P. MC KEAN & I. M. SINGER: Curvature and the eigenvalues of the Laplacien. *J. of diff. geom.*, 1 (1967) 43-69.
- [2] R. BALIAN & BLOCH: Distributions of Eigenfrequencies for the wave equation in a finite domaine III. Eigenfrequencies density oscillations. *Ann. of Physics*, 69, vol. 1 76-160.
- [3] M. BERGER, P. GAUDUCHON & E. MAZET: Le spectre d'une variété riemannienne. *Lecture Notes in Mathematics*, 194 (1971) Springer Verlag.
- [4] M. BERGER: Séminaire 1970-1971. Variétés a courbure négative.
- [5] H. HUBER: Zur analytischen Theorie hyperbolischer Raumformen and Bewegungsgruppen. *Math. Annalen*, 138 (1959) 1-26.
- [6] R. L. BISHOP & R. J. CRITTENDEN: *Geometry of Manifolds* (1964) Academic Press.
- [7] Y. COLIN DE VERDIERE: Spectre du laplacien et longueurs des géodésiques périodiques. C.R.A.S. Paris - t 275 A, 805-808.
- [8] A. AVEZ: Géodésiques fermées des variétés compactes à courbure négative. C.R.A.S. Paris - t 270 A, 1512-1514.

(Oblatum 23-I-1973)

67, rue Croulebarbe,
75013 PARIS