
MAT35B - L3A ALGÈBRE
Premier semestre — 2021-2022

Fiche 1: Relations d'équivalence

1. Soit f une application d'un ensemble E dans lui-même. Pour tout entier naturel n , on note f^n la composée $f \circ \dots \circ f$ (n facteurs), avec la convention $f^0 = \text{id}_E$.

- (a) Montrer qu'on définit une relation d'équivalence \sim sur E en posant $x \sim y$ si et seulement s'il existe $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $f^p(x) = f^q(y)$.
- (b) Dans le cas où f est bijective, décrire la classe d'équivalence de $x \in E$, appelée **orbite** de x suivant f . À quelle condition cette orbite est-elle finie?

2. Soit G un groupe et H un sous-groupe de G .

- (a) Montrer que l'on définit une relation d'équivalence sur G par $g_1 \sim_H g_2$ si et seulement si $g_1^{-1}g_2 \in H$, pour tous $g_1, g_2 \in G$.
- (b) Les classes d'équivalences sont appelées les **classes à gauche modulo H** . Les décrire et montrer qu'elles sont toutes en bijection avec H .
- (c) L'ensemble quotient pour cette relation d'équivalence est noté G/H . Lorsque G est un groupe fini, montrer que $|G/H| = |G|/|H|$.

3. Soit n un entier strictement positif. Comme $n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de \mathbb{Z} , on obtient une relation d'équivalence sur \mathbb{Z} en posant $a \sim b$ si et seulement si $b - a \in n\mathbb{Z}$, pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$.

- (a) Montrer que sur l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on peut définir une addition et une multiplication par

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b} \text{ et } \bar{a} \times \bar{b} = \overline{a \times b}$$

pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$.

- (b) Montrer que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau commutatif.
- (c) Quel est l'ordre du groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$?
- (d) Montrer que les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour la loi \times sont les classes des entiers premiers avec n . On note $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ l'ensemble de ces inversibles.
- (e) Montrer que $((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times, \times)$ est un groupe. L'ordre de ce groupe est donc la fonction ϕ de \mathbb{N}^* dans lui-même donnée par

$$\phi(n) = \left| (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \right| = \left| \{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket : k \wedge n = 1\} \right|,$$

appelée l'**indicateur d'Euler**.

- (f) Montrer que l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ est nul (i.e., réduit à $\{\bar{0}\}$) si $n = 1$, un corps si n est premier, et non-intègre (i.e., le produit de deux éléments non nuls peut être nul) si n est composé.

4. Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

- (a) Montrer que l'on définit une relation d'équivalence sur E par $x_1 \sim_f x_2$ si et seulement si $f(x_1) = f(x_2)$ pour tous $x_1, x_2 \in E$ et décrire les classes d'équivalences.

- (b) On note E/\sim_f l'ensemble quotient et p la projection canonique de E sur E/\sim_f . Montrer qu'il existe une unique application $\bar{f} : E/\sim_f \rightarrow F$ telle que $f = \bar{f} \circ p$ et que cette application \bar{f} est injective.
- (c) On suppose maintenant que $f : G \rightarrow G'$ est un morphisme de groupes et on note p la projection de G sur l'ensemble quotient $G/\text{Ker}(f)$. Montrer alors que $g_1 \sim_f g_2$ si et seulement si $g_1^{-1}g_2 \in \text{Ker}(f)$ pour tous $g_1, g_2 \in G$. En déduire que les classes d'équivalence pour la relation \sim_f sont les classes à gauche modulo $\text{Ker}(f)$ et qu'il existe une application injective $\bar{f} : G/\text{Ker}(f) \rightarrow G'$ telle que $f = \bar{f} \circ p$.
- (d) Appliquer ce résultat à l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^*$ définie par $f(t) = e^{it}$.
5. Soient G un groupe, H et K deux sous-groupes de G et $f : H \times K \rightarrow G$ l'application donnée par $f(h, k) = hk$. Soit $HK = f(H \times K)$ l'ensemble image de l'application f .
- (a) Montrer que les classes d'équivalences pour \sim_f sont en bijection avec $H \cap K$.
- (b) En déduire que lorsque le groupe G est fini, on a $|H \times K| = |HK||H \cap K|$.
6. Soit $f : E \rightarrow F$ une application, \sim une relation d'équivalence sur E et p la projection de E sur l'ensemble quotient E/\sim .
- (a) À quelle condition portant sur f et \sim existe-t-il une application $\bar{f} : E/\sim \rightarrow F$ telle que $f = \bar{f} \circ p$? Montrer qu'une telle application est unique si elle existe, ce qui légitime la notation \bar{f} .
- (b) Expliciter la condition précédente sur f lorsque $E = F = \mathbb{R}$ et \sim est la relation d'équivalence :
- (i) \sim_g associée à la fonction g donnée par $g(x) = |x|$ pour $x \in \mathbb{R}$;
- (ii) \sim_H associée au sous-groupe $H = a\mathbb{Z}$ de E , avec $a > 0$.
- (c) On revient au cas général et on suppose que \bar{f} existe. Montrer que \bar{f} a même image que f . Montrer que \bar{f} est injective si et seulement si les relations \sim et \sim_f coïncident.
7. Soit $f : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupes et H un sous-groupe de G . Soit $p : G \rightarrow G/H$ la projection de G sur l'ensemble des classes à gauche modulo H .
- (a) Montrer qu'il existe une application $\bar{f} : G/H \rightarrow G'$ telle que $f = \bar{f} \circ p$ si et seulement si $H \subseteq \text{Ker}(f)$.
- (b) À quelle condition \bar{f} est-elle injective?
8. Soit K un corps. On pose $E = K^2 \setminus \{(0, 0)\}$. On munit E de la relation \sim définie par $v_1 \sim v_2$ si et seulement s'il existe $\alpha \in K^*$ tel que $v_1 = \alpha v_2$.
- (a) Montrer que \sim est une relation d'équivalence sur E . Pour $v \in E$, quelle est la classe d'équivalence de v ?
- On notera p la projection canonique de E sur E/\sim . On appelle **droite projective sur K** , notée $\mathbb{P}^1(K)$, l'ensemble quotient E/\sim . La question suivante montre qu'on peut identifier $\mathbb{P}^1(K)$ à K auquel on ajoute un point à l'infini.
- (b) On note p la projection canonique de E sur E/\sim . Montrer que l'application $f : E \rightarrow K \cup \{\infty\}$ définie par $f(x, y) = x/y$ (en posant $x/y = \infty$ si $x \neq 0$ et $y = 0$) passe au quotient et induit une bijection \bar{f} de E/\sim vers $K \cup \{\infty\}$.
- (c) On considère l'application

$$g : \text{GL}_2(K) \rightarrow \text{Aut}_{K\text{-vect}}(K^2)$$

qui associe à toute matrice inversible $M \in \text{GL}_2(K)$ l'application linéaire inversible $g_M \in \text{Aut}_{K\text{-Vect}}(K^2)$ de matrice M dans la base canonique. Montrer que g est un isomorphisme de groupes. Noter que l'automorphisme g_M induit une permutation $g_M|_E$ sur l'ensemble $E = K^2 \setminus \{(0,0)\}$.

- (d) Montrer que pour tout $\phi \in \text{Aut}_{K\text{-Vect}}(K^2)$ il existe une unique application $\hat{\phi} : \mathbb{P}^1(K) \rightarrow \mathbb{P}^1(K)$ telle que $\hat{\phi} \circ p = p \circ \phi|_E$. Montrer en plus que $\hat{\phi}$ est bijective que l'application

$$\rho : \text{Aut}_{K\text{-Vect}}(K^2) \rightarrow \text{Aut}_{\text{Ens}}(\mathbb{P}^1(K))$$

qui associe $\hat{\phi}$ à ϕ est un morphisme de groupes.

- (e) Soient X et Y deux ensembles et $f : X \rightarrow Y$ une application bijective. Montrer que l'application

$$\text{Ad}_f : \text{Aut}_{\text{Ens}}(X) \rightarrow \text{Aut}_{\text{Ens}}(Y)$$

donnée par $\text{Ad}_f(\phi) = f \circ \phi \circ f^{-1}$ est un isomorphisme de groupes. En déduire que l'application $h_M = \bar{f} \circ \hat{g}_M \circ \bar{f}^{-1}$ est une permutation de $K \cup \{\infty\}$ et que l'application $h = \text{Ad}_f \circ \rho \circ g$, qui associe h_M à M , est un morphisme de $\text{GL}_2(K)$ dans le groupe $\text{Aut}_{\text{Ens}}(K \cup \{\infty\})$ des permutations de $K \cup \{\infty\}$.

- (f) Expliciter le noyau de h . En déduire que l'image de h , le **groupe des homographies**, est isomorphe au groupe projectif linéaire $\text{PGL}_2(K) = \text{GL}_2(K)/(K^*I_2)$.
- (g) Désormais, on fixe $M \in \text{GL}_2(K)$ et on pose

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Pour $z \in K \cup \{\infty\}$, exprimer $h_M(z)$ en fonction de z et des coefficients de M . Calculer en particulier $h_M(\infty)$, $h_M(0)$ et $h_M(-d/c)$. Donner la formule générale pour $h_M^{-1}(z)$.

- (h) Soit $(x, y) \in E$. Montrer que (x, y) est un vecteur propre de g_M si et seulement si x/y est un point fixe de h_M . À quelle condition sur les coefficients de M
- (i) ∞ est-il point fixe de h_M ?
 - (ii) ∞ est-il le seul point fixe de h_M ?
 - (iii) 0 est-il point fixe de h_M ?
- (i) On suppose dans cette question que $K = \mathbb{C}$ et que ∞ n'est pas point fixe de h_M . Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite vérifiant la relation de récurrence $z_{n+1} = h_M(z_n)$. Montrer que l'on est dans une des deux situations suivantes :

(H.1) h_M a exactement deux points fixes distincts r_1 et r_2 dans K , la matrice

$$P = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible, la matrice $P^{-1}MP$ est diagonale et la suite

$$(w_n)_{n \in \mathbb{N}} = (h_{P^{-1}}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$$

est géométrique ;

(H.2) h_M a un seul point fixe r_0 dans K , la matrice

$$P = \begin{pmatrix} r_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible, $P^{-1}MP$ est triangulaire avec ses deux coefficients diagonaux égaux et la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} = (h_{P^{-1}}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique.

- (j) Donner l'expression du terme général de la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée par $z_0 = 0$ et $z_{n+1} = (2z_n + 3)/(z_n + 4)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.