Travaux Pratiques

Exercice 1. Pour chaque paire de matrices suivantes, utiliser Sagemath pour déterminer si elles sont semblables ou pas :

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & -4 & 7 & 28 \\ -1 & 1 & -2 & -8 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -5 & 4 & 8 & 4 \\ -3 & 2 & 6 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

On pourra utiliser des invariants de similitude classiques (trace, déterminant, rang, polynôme caractéristique, etc...)

Exercice 2. On rappelle qu'une matrice compagnon est une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & * \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & * \\ 0 & \dots & 0 & 1 & * \end{pmatrix}$$

Le but de cet exercice est de montrer, de manière effective, que toute matrice est semblable à une matrice par blocs de la forme

$$\begin{pmatrix} C_1 & A_{1,2} & \dots & A_{1,p} \\ 0 & C_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & A_{p-1,p} \\ 0 & \dots & 0 & C_p \end{pmatrix}$$

où $C_1, \dots, C_p$ sont des matrices compagnons (pas forcément de même taille) et où les $A_{i,j}$ sont des matrices que l'on pourra prendre de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & * \end{pmatrix}$$

1. Écrire un programme qui prend en entrée une matrice carrée M de taille n (que l'on prendra à coefficients dans un corps exact), un vecteur non nul v, et renvoie le plus petit entier k tel que la famille $(v, Mv, \dots, M^k v)$ est liée ainsi que le polynôme unitaire P de degré k tel que $P(M)v = 0$. Que peut-on dire de la matrice de l'endomorphisme associé à M dans une base qui commence par $v, Mv, \dots, M^{k-1}v$?
2. Quelle est la complexité en fonction de n et de k du programme précédent, en terme d'opérations dans $\mathbb{K}$? Peut-on l'améliorer ?

3. Écrire un programme qui prend en entrée une famille libre $(u_1, \dots, u_m)$, un vecteur v, une matrice carrée M, et renvoie le plus petit entier k tel que la famille $(u_1, \dots, u_m, v, Mv, \dots, M^k v)$ est liée ainsi que le polynôme unitaire P de degré k tel que $P(M)v \in \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_m)$.
4. Écrire enfin un programme qui prend en entrée une matrice carrée M et renvoie une matrice semblable de la forme spécifiée au début de l'exercice, ainsi que la matrice de passage associée.
5. Utiliser votre programme pour calculer une expression partiellement factorisée du polynôme caractéristique d'une matrice carrée. Quelle information obtient-on sur le polynôme minimal de la matrice ?

Exercice 3. Autour des polynômes de matrices

1. Préliminaire.
   (a) Soient $a_1, \dots, a_p$ et $b_1, \dots, b_q$ deux familles d'éléments d'un anneau euclidien effectif A ; on note $e = \mathrm{pgcd}(a_1, \dots, a_p)$, $f = \mathrm{pgcd}(b_1, \dots, b_q)$ et $d = \mathrm{pgcd}(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q)$.
   Soient $x_1, \dots, x_p$ et $y_1, \dots, y_q$ des éléments de A tels que $\sum_{i=1}^{p} a_i x_i = e$ et $\sum_{i=1}^{q} b_i y_i = f$.
   À partir de coefficients de Bézout pour le couple (e, f), expliquer comment calculer des éléments $u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q$ tels que
   $$a_1 u_1 + \cdots + a_p u_p + b_1 v_1 + \cdots + b_q v_q = d.$$
   (b) En déduire un programme récursif qui prend en entrée une liste d'éléments $[a_1, \dots, a_n]$ et renvoie le pgcd d de la famille ainsi qu'une liste de coefficients $[u_1, \dots, u_n]$ telle que $\sum_{i=1}^{n} a_i u_i = d$.
2. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, et $P_1, \dots, P_m \in \mathbb{K}[X]$ des polynômes deux-à-deux premiers entre eux tels que le produit $P = P_1 \dots P_m$ est annulateur de u. Pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, on note $Q_i = P/P_i$.
   (a) Justifier l'existence de polynômes $U_1, \dots, U_m$ tels que $\sum_{i=1}^{m} U_i Q_i = 1$.
   (b) Montrer que pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, l'endomorphisme $U_i(u) \circ Q_i(u)$ est la projection sur $\ker P_i(u)$ parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} \ker P_j(u)$.
3. On considère la matrice
   $$A = \begin{pmatrix} -3 & -9 & -6 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$
   (a) Déterminer les matrices D et N de sa décomposition de Dunford, ainsi que deux polynômes $P, Q \in \mathbb{Q}[X]$ tels que $D = P(A)$ et $N = Q(A)$.
   (b) Déterminer un polynôme $E \in \mathbb{R}[X]$ tel que $e^A = E(A)$.
4. Écrire un programme qui réalise le travail des deux questions précédentes pour une matrice quelconque de polynôme caractéristique scindé.