Licence AEM
SYSTEMES RECURRENTS

F.Truc

March 31, 2006

1 Propriétés générales

Définition 1 *On appelle système linéaire d'équations récurrentes une relation de la forme :*

$$X_{t+1} = AX_t + B_t \qquad \forall\ t\ \in\ N \quad (1)$$

dans laquelle :
A est une matrice carrée d'ordre n donnée ,
(X_t) est une suite de vecteurs colonnes de composantes $x_{1,t}, \ldots, x_{n,t}$,
(B_t) est une suite donnée de vecteurs colonnes de composantes $b_{1,t}, \ldots, b_{n,t}$
.

Si la suite (B_t) est la suite nulle , le système est dit sans second membre ou homogène ;la suite (B_t) est le second membre du système . Le système linèaire sans second membre associé est :

$$X_{t+1} = AX_t \qquad \forall\ t\ \in\ N \quad (2)$$

Définition 2 *On appelle données initiales les valeurs des coordonnées du premier vecteur (X_0) de la suite (X_t) : $x_{1,0}, \ldots, x_{n,0}$.*

Dans le cadre de ce cours , nous confondrons souvent un vecteur colonne avec le vecteur de R^n ou C^n de mêmes composantes .

Théorème 1 *Pour tout choix des données initiales , il existe une suite unique X_t solution de (1) .*

Théorème 2 *Les suites X_t solution de (2) forment un sous espace vectoriel de l'espaces des suites de vecteurs (ou de matrices colonnes) de K^n .*

Théorème 3 *La solution générale de (1) s'obtient en ajoutant la solution générale de (2) une solution particulière de (1) .*

Théorème 4 *Si on connait une solution* (Z_t) *de (1), la solution de (1) pour les données initiales* X_0 *est la suite définie par :*

$$X_t = Z_t + A^t(X_0 - Z_0) \quad \forall\ t\ \in\ N$$

Théorème 5 (Changement de coordonnées) *Soit* P *une matrice inversible. On définit une suite* (Y_t) *par* $Y_t = P^{-1}X_t \quad \forall t\ \in\ N$*.*
Alors la suite (X_t) *est solution de (1) pour les données initiales* X_0 *si et seulement si la suite* (Y_t) *est solution du système (3) pour les données initiales* $Y_0 = P^{-1}X_0$*, où (3) est défini par :*

$$Y_{t+1} = P^{-1}APY_t + P^{-1}B_t \qquad \forall\ t\ \in\ N \quad (3)$$

Dans le cas où la matrice A est diagonalisable , on pourra donc remplacer le système (1) par un système (3) où la matrice $D = P^{-1}AP$ est diagonale .

2 Résolution dans le cas d'une matrice diagonalisable

D est la matrice diagonale des valeurs propres de A :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Le système (3) s'écrit donc :

$$y_{i,t+1} = \lambda_i y_{i,t} + c_{i,t} \quad \forall\ t\ \in\ N$$

On résoud alors ce système équation par équation . Ce sont des équations récurrentes linéaires d'ordre 1 que l'on résout ainsi :

lemme 1 *Si* (u_t) *est une solution particulière de l'équation :*

$$x_{t+1} = \lambda x_t + c_t \qquad \forall\ t\ \in\ N \quad (e)$$

alors la solution générale de (e) est donnée par :

$$x_t = (x_0 - u_0)\lambda^t + u_t \qquad \forall\ t\ \in\ N$$

lemme 2 *Si le terme général de la suite* c_t *est de la forme :* $c_t = r^t P(t)$ *où* P *est un polynôme de degré* m *alors on peut trouver une solution particulière sous la forme :*

$$u_t \ = \ r^t Q(t) \quad \text{si } \lambda \ \neq r u_t \ = \ t r^t Q(t) \quad \text{si } \lambda \ = \ r$$

où Q *est un polynôme de même degré* m *que* P *.*

Exercice

Résoudre le système :

$$\begin{array}{rcl} x_{t+1} & = & ax_t + y_t - a^t + a^{t+1} \\ y_{t+1} & = & x_t + ay_t - ta^t \end{array}$$

où a est un réel donné .

Théorème 6 *Si A est diagonalisable et si $B = \{\vec{V_1}, ..., \vec{V_n}\}$ est une base de vecteurs propres respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$ distinctes ou non , alors la solution générale de (2) est de la forme :*

$$X_t = \alpha_1 \lambda_1^t \vec{V_1} + ... + \alpha_n \lambda_n^t \vec{V_n}$$

où les scalaires α_i sont les coordonnées de X_0 dans la base B de vecteurs propres .

Exercice

Donner la solution générale du système :

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcll} x_{t+1} & = & -a^2 x_t & \\ y_{t+1} & = & -y_t & +(1-a^2)z_t \\ z_{t+1} & = & y_t & -(1+a^2)z_t \end{array} \right.$$

3 Application aux équations récurrentes d'ordre n

Définition 3 *On appelle équation récurrente d'ordre n sans second membre une relation de la forme :*

$$x_{t+n} = a_1 x_{t+n-1} + ... + a_{n-1} x_{t+1} + a_n x_t \quad \forall\ t\ \in\ N \quad (4)$$

où les (a_i) sont n scalaires (réels ou complexes) donnés et où (x_t) est une suite à valeurs réelles ou complexes .

On appelle équation récurrente d'ordre n avec second membre une relation de la forme :

$$x_{t+n} = a_1 x_{t+n-1} + ... + a_{n-1} x_{t+1} + a_n x_t + b_t \quad \forall\ t\ \in\ N \quad (5)$$

où (b_t) est une suite réelle ou complexe donnée .

Les données initiales sont : $x_0, x_1, ..., x_{n-1}$.

L'équation (3) se met sous la forme matricielle $X_{t+1} = AX_t$ grace la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & ... & a_n \\ 1 & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & .... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

proposition 3 *Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme*

$$P_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - ... - a_{n-1}\lambda - a_n)$$

Il est possible de montrer (Exercice) que la matrice A qui est la matrice "compagnon" du polynôme P_A est diagonalisable sur K si et seulement si le polynôme P_A est scindé ` racines simples dans K[X] , c'est à dire que A est diagonalisable si et seulement si elle admet n valeurs propres distinctes (ce qui est bien sûr faux en général !) ; Ceci est dû à la forme particulière de la matrice compagnon . Nous supposerons dans la suite cette condition réalisée .

Théorème 7 *On suppose que le polynôme*

$$P_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - ... - a_{n-1}\lambda - a_n)$$

est scindé à racines simples $\mu_1, ..., \mu_n$. Alors la solution générale de (4) s'écrit :

$$x_t = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu_k^t$$

où les α_i sont des scalaires qui dépendent des données initiales .

Dans le cas où la matrice compagnon n'est pas diagonalisable , on peut chercher à la réduire à une forme triangulaire ou de Jordan .

4 DYNAMIQUE ET STABILITE

Définition 4 *Un équilibre du système (2) est un vecteur colonne $X^\star$ tel que : $AX^\star = X^\star$; La suite constante $X_t = X^\star$ est alors solution de (2) . Si 1 n'est pas valeur propre de A , O est le seul équilibre .*

Définition 5 *On appelle ensemble de stabilité de l'équilibre $X^\star$ l'ensemble des données initiales X_0 de K^n telles que la solution (X_t) converge vers l'équilibre quand t tend vers l'infini . Si l'ensemble de stabilité est égal à K^n on dit que l'équilibre est globalement stable .*