Licence AEM
SYSTEMES DIFFERENTIELS LINEAIRES

March 31, 2006

1 Exemples et Définitions

1.1 De l'usage des systèmes différentiels en modélisation

De nombreux problèmes de mécanique , d'éléctromagnétisme (étude des circuits électriques) , de biologie , d'économie conduisent à des systèmes différentiels linéaires . Par exemple le problème du mouvement plan de trois billes de même masse équidistantes sur un fil horizontal , qui conduit au problème :

$$\begin{array}{ccccccc} \ddot{x} & = & -2x & +y & & +f_1 \\ \ddot{y} & = & x & -2y & +z & +f_2 \\ \ddot{z} & = & y & -2z & & +f_3 \end{array}$$

en notant x,y,z les coordonnées de chacune des particules sur un axe perpendiculaire au fil . Un tel système est un système différentiel linéaire d'ordre deux . Les deux points au dessus de x sont une notation commode pour la dérivée seconde .

1.2 Quelques définitions

Définition 1 *On appelle système différentiel linéaire du premier ordre à coefficients constants tout système de n équations différentielles linéaires du premier ordre de la forme :*

$$(S)\left\{\begin{array}{cccccc} \dot{x_1} & = & a_{1,1}x_1 & +... & +a_{1,n}x_n & +b_1(t) \\ \dot{x_2} & = & a_{2,1}x_1 & +... & +a_{2,n}x_n & +b_2(t) \\ ... & ... & ... & ... & ... & \\ \dot{x_n} & = & a_{n,1}x_1 & +... & +a_{n,n}x_n & +b_n(t) \end{array}\right.$$

o t désigne une variable réelle , o les x_i sont des fonctions de la variable t de classe C^1 sur un intervalle I de R, à valeurs dans R ou C, o les a_i sont des réels ou des complexes , et les b_i des fonctions de la variable t continues sur I , à valeurs dans R ou C .Le point au dessus de x_1 est une notation pour la dérivée première .

Il est commode d'utiliser la notation matrices-colonnes pour exprimer un système différentiel:

Définition 2 *En notant* $A = (a_{i,j}) \in M_n(K)$ *, et* $X(t)$*,*$B(t)$ *les matrices colonnes :*

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \quad B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ ... \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

le système (S) s'écrit : $\dot{X}(t) = AX(t) + B(t)$ *. La matrice* A *est la matrice du système . Le système (SH):*$\dot{X}(t) = AX(t)$ *est le système différentiel sans second membre associé à (S) .*

On peut également faire appel aux endomorphismes et aux fonctions vectorielles pour écrire le système:

Proposition 1 *En notant* f *l'endomorphisme de* K^n *de matrice* A *en base canonique et* $\overrightarrow{x(t)}$*,*$\overrightarrow{b(t)}$ *les vecteurs de coordonnées* $x_i(t)$ *et* $b_i(t)$ *en base canonique , les sytèmes précédents s'écrivent respectivement :*

$$(S) \quad \frac{d}{dt}\overrightarrow{x(t)} = f(\overrightarrow{x(t)}) + \overrightarrow{b(t)} \qquad (SH) \quad \frac{d}{dt}\overrightarrow{x(t)} = f(\overrightarrow{x(t)}$$

On utilise ici des fonctions vectorielles $t \longrightarrow \overrightarrow{x(t)}$ et $t \longrightarrow \overrightarrow{b(t)}$ de I dans K^n , ainsi que leurs fonctions dérivées .

1.3 Exemple

Mettre le système:

$$\begin{array}{rcrrr} x & = & x & +2y & +1 \\ y & = & 2x & +y & \end{array}$$

sous forme matricielle.

1.4 Equation différentielle linéaire scalaire d'ordre n

Une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n , de la formme :

$$(E_n) \quad y^n(t) + a_{n-1}y^{n-1}(t) + ... + a_1y'(t) + a_0y(t) = c(t)$$

peut s'écrire comme un système linéaire de n équations du premier ordre L'équation sans second membre associée est :

$$(E_n') \quad y^n(t) + a_{n-1}y^{n-1}(t) + ... + a_1y'(t) + a_0y(t) = 0$$

Examinons par exemple le cas de l'équation :

$$(E_2) \qquad y''(t) + by'(t) + cy(t) = g(t)$$

Elle s'écrit :

$$\begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix}$$

2 Existence et unicité de la solution

2.1 Conditions initiales

Définition 3 *On appelle condition initiale un point de $I \times K^n$ de la forme : $(t_0, y_1, ..., y_n)$. Résoudre le système pour une condition initiale donnée c'est chercher une solution $X(t)$ telle que : $\forall i \in 1, n$: $x_i(t_0) = y_i$.*

2.2 Théorème d'existence et d'unicité de la solution

Théorème 1 *Théorème de CAUCHY (admis) Pour tout choix de conditions initiales le système (S) (respectivement (SH)) admet une solution unique , définie sur I (respectivement sur R).*

Ce théorème est admis dans le cas général; nous en donnerons une démonstration dans le cas où la matrice est diagonalisable . Nous allons maintenant examiner la structure des espaces des solutions des systèmes (S) et (SH) .

3 Structure des espaces de solutions d'un système différentiel linéaire

Proposition 2 *L'ensemble des solutions du système (SH) est un sous espace vectoriel de dimension n de l'espace des fonctions vectorielles de classe C^1 sur K , que nous noterons E_{SH}.*

On notera que la dimension de l'espace des solutions provient du théorème d'existence et d'unicité de Cauchy . En effet, fixons par exemple $t_0 = 0$. L'application de K^n dans E_{SH} qui à un vecteur y de conditions initiales associe la solution telle que $\overrightarrow{x(0)} = y$ est alors un isomorphisme . Or un isomorphisme conserve les dimensions .

Proposition 3 *On obtient la solution générale de (S) en ajoutant à la solution générale de (SH) une solution particulière de (S) .*

Les résultats précédents s'appliquent bien sûr à l'équation différentielle scalaire (E_n) , écrite comme un système différentiel ; on obtient alors :

Proposition 4 *Les solutions de l'équation linéaire scalaire sans second membre d'ordre n (E'_n) forment un sous espace vectoriel de l'espace des fonctions $C^n(R, K)$. La solution générale de l'équation complète s'obtient en ajoutant à la solution générale de E_n une solution particulière de (E_n) .*

4 Système fondamental de solutions

4.1 Utilité d'un système fondamental

On appelle système fondamental de solutions de (S) une famille libre de n fonctions vectorielles solutions de (S) :

$$\{\overrightarrow{\phi_1}, ..., \overrightarrow{\phi_n}\}$$

un système fondamental est une base de $\mathcal{SH}$ et la solution générale de (SH) s'écrit alors :

$$\overrightarrow{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\phi}(t)$$

4.2 Wronskien

Définition 4 *On appelle Wronskien d'une famille de n fonctions vectorielles*

$$\{\overrightarrow{\phi_1}, ..., \overrightarrow{\phi_n}\}$$

la fonction :

$$t \to \det_B(\overrightarrow{\phi_1}(t), ..., \overrightarrow{\phi_n}(t))$$

o B désigne la base canonique de K^n .

Pour une famille de solutions de (SH) on a le résultat suivant :

Théorème 2 *Etant donnée une famille n fonctions vectorielles solutions de (S) :*

$$\mathcal{A} = \{\overrightarrow{\phi_1}, ..., \overrightarrow{\phi_n}\}$$

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- *$\mathcal{A}$ est un système fondamental .*
- *Le wronskien W ne s'annule pas sur I .*
- *Il existe un point t_0 de I tel que $W(t_0 \neq 0$.*

Ceci permet de chercher la solution générale de (S) par la méthode de variation des constantes , c'est à dire sous la forme :

$$\overrightarrow{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t) \overrightarrow{\phi}(t)$$

5 Etude du cas où la matrice du système est diagonalisable

5.1 Point de vue vectoriel

Théorème 3 *On considère le système sans second membre sous forme vectorielle:*

$$(SH) \quad \frac{d}{dt}\overrightarrow{x(t)} = f(\overrightarrow{x(t)})$$

et on suppose que l'endomorphisme $f \in L(K^n)$ est diagonalisable. Soit $\{\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n}\}$ une base de vecteurs propre de f, respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Alors les fonctions vectorielles $\overrightarrow{\phi_i}$ définies par:

$$\forall i \in [[1, n]] \ , \forall t \in R \ : \ \overrightarrow{\phi_i}(t) = e^{\lambda_i t} \overrightarrow{e_i}$$

forment un système fondamental de solutions de (SH).

Corollaire 4 *La solution générale du système*

$$(SH) \quad \frac{d}{dt}\overrightarrow{x(t)} = f(\overrightarrow{x(t)}$$

où l'endomorphisme $f \in L(K^n)$ est diagonalisable, s'écrit:

$$\overrightarrow{x(t)} = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i t}\overrightarrow{e_i}$$

avec $(C_1, ..., C_n) \in K^n$.

Corollaire 5 *La solution générale du système*

$$(S) \quad \frac{d}{dt}\overrightarrow{x(t)} = f(\overrightarrow{x(t)}) + b(t)$$

où l'endomorphisme $f \in L(K^n)$ est diagonalisable, s'écrit:

$$\overrightarrow{x(t)} = \overrightarrow{u(t)} + \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i t}\overrightarrow{e_i}$$

avec $(C_1, ..., C_n) \in K^n$ et o $\overrightarrow{u(t)}$ est une solution particulière de (S).

5.2 Calcul matriciel

Dans la pratique, si la matrice du système se diagonalise, on a :

$$A = PDP^{-1}$$

avec $D \in M_n(K)$ diagonale et $P \in Gl_n(K)$. On peut alors transformer le système : $\dot{X}(t)= AX(t)$ en posant $X(t) = PX_1(t)$, ce qui conduit au système : $\dot{X_1}(t)= DX_1(t)$. La solution est de la forme :

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ ... \\ ... \\ C_n^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

et on peut retourner à $X(t)$ par : $X(t) = PX_1(t)$.

6 Etude du cas général

6.1 Utilisation d'une réduite triangulaire

Dans le cas général où la matrice ne se diagonalise pas on peut toujours la triangulariser (sur C).

$$A = PTP^{-1}$$

avec $T \in M_n(K)$ triangulaire supérieure et $P \in Gl_n(K)$. On peut alors transformer le système : $\dot{X}(t)= AX(t)$ en posant $X(t) = PZ(t)$, ce qui conduit au système : $\dot{Z(t)} = TZ(t)$. Ce système est plus simple que le précédent; en particulier sa dernière équation est $\dot{z_n(t)} =_n z_n(t)$, qui se résout immédiatement en $z_n(t) = C_n e^{\lambda_n t}$. On continue ensuite la résolution du système en déterminant de proche en proche $z_{n-1}(t), ..., z_1(t)$. La meilleure méthode consiste à utiliser la réduite de Jordan J de la matrice A.

6.2 Etude du cas de la dimension deux

6.3 Etude du cas de la dimension trois

7 Portraits de phase de systèmes différentiels

7.1 Introduction

Dans cette partie nous nous plaçons en dimension deux et nous nous intéressons au système différentiel:

$$\dot{X(t)} = \begin{pmatrix} \dot{x(t)} \\ \dot{y(t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Les solutions $t \to (x(t), y(t))$ du système déterminent des courbes paramétrées de R^2, les trajectoires du système. R^2 est appelé ici l'espace des phases. L'ensemble des trajectoires est appelé le portrait de phase du système.

7.2 Différentes allures du portrait de phase du système

7.3 Cas d'une équation scalaire d'ordre deux