VALEURS PROPRES PLONGEES DU LAPLACIEN SUR UNE VARIETE AVEC CUSPS ET LAPLACIEN AVEC CHAMP MAGNETIQUE

Françoise Truc

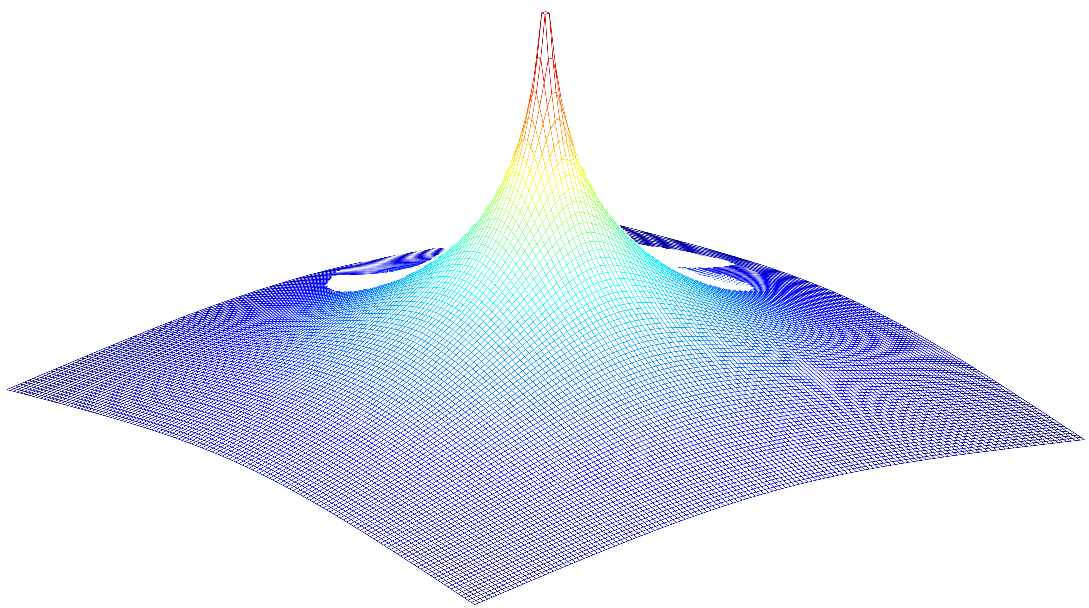
Institut Fourier, Grenoble

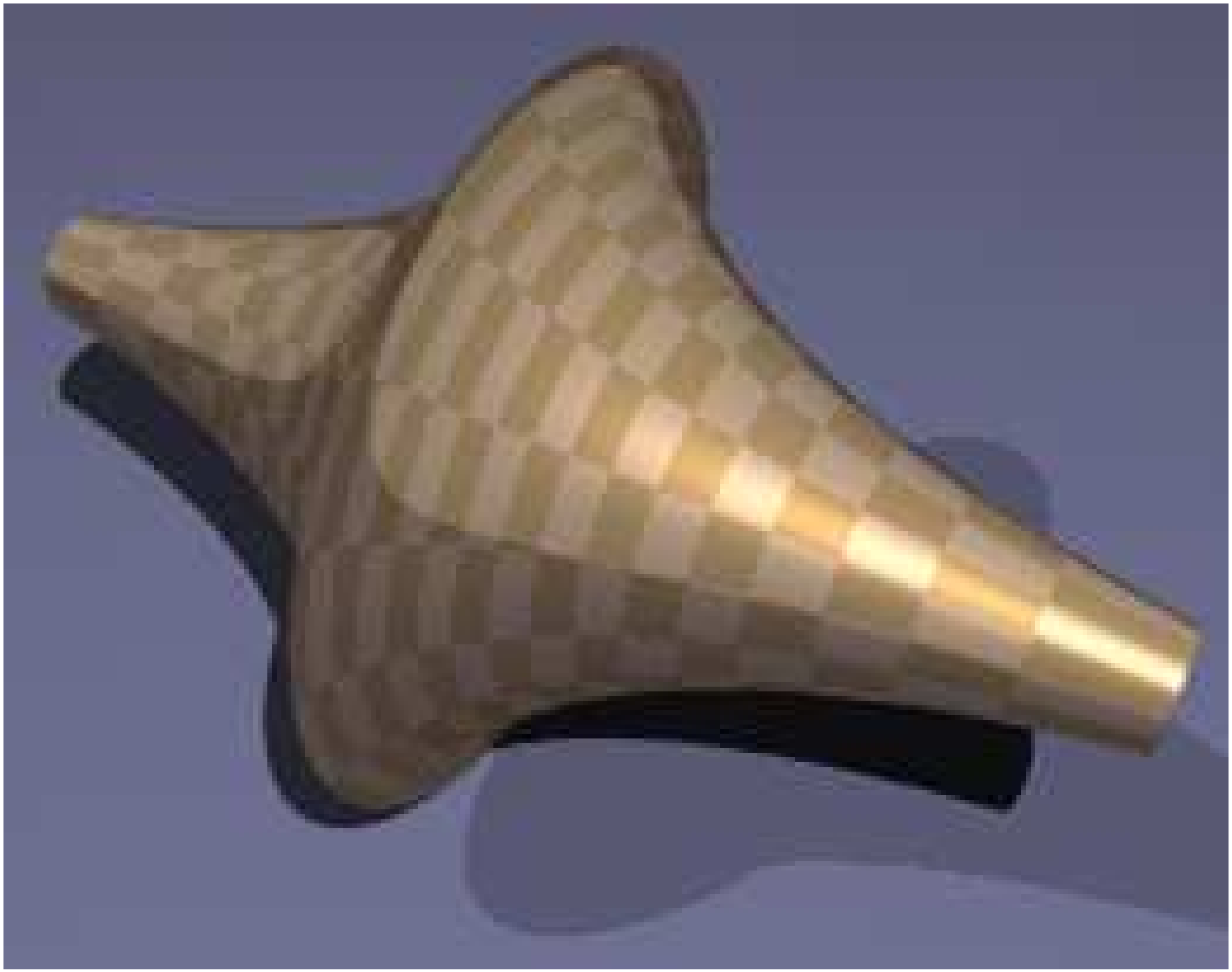
Champs magnétiques en mécanique classique

- La trajectoire dans $\mathbb{R}^3$ d'une particule de masse m, de charge e, soumise à un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ est décrite par l'équation de Lorentz : $m\ddot{x} = e\dot{x} \wedge \overrightarrow{B}$.
- Lagrangien associé ($m = e = 1$) : $\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \dfrac{1}{2}\,\dot{x}^2 + \dot{x} \cdot A(x)$

Champs magnétiques en mécanique classique

- La trajectoire dans $\mathbb{R}^3$ d'une particule de masse m, de charge e, soumise à un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ est décrite par l'équation de Lorentz : $m\ddot{x} = e\dot{x} \wedge \overrightarrow{B}$.
- Lagrangien associé ($m = e = 1$) : $\mathcal{L}(x, \dot{x}) \;=\; \dfrac{1}{2}\,\dot{x}^2 + \dot{x} \cdot A(x)$
- Moments conjugués : $\xi_j = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_j} \Longrightarrow \xi = \dot{x} + A(x)$
- Hamiltonien : $\mathcal{H}(x, \xi) = \xi\dot{x} - \mathcal{L}(x, \dot{x}) \;=\; \dfrac{1}{2}(\xi - A(x))^2$.
- $\vec{B}$ constant $\Longrightarrow$ $\mathcal{H}$ intégrable ,
  Trois intégrales du mouvement : l'énergie $\mathcal{H}$, le rayon de Larmor $\rho = \frac{v_\perp}{B}$ et le moment magnétique $I = \frac{v_\perp^2}{2B}$.





Sommaire

- Le cadre riemannien
- Le demi-plan de Poincaré
  - Le Laplacien avec champ magnétique constant
  - Résultats reliés

Sommaire

- Le cadre riemannien
- Le demi-plan de Poincaré
  - Le Laplacien avec champ magnétique constant
  - Résultats reliés
- Surfaces hyperboliques non compactes
  - Le spectre essentiel du Laplacien avec champ magnétique constant
  - La formule de Weyl (cas d’une surface d’aire finie)

Sommaire

- Le cadre riemannien
- Le demi-plan de Poincaré
  - Le Laplacien avec champ magnétique constant
  - Résultats reliés
- Surfaces hyperboliques non compactes
  - Le spectre essentiel du Laplacien avec champ magnétique constant
  - La formule de Weyl (cas d’une surface d’aire finie)
- Dimension > 2 : les variétés avec cusps
  - Le spectre essentiel du Laplacien avec champ magnétique
  - La formule de Weyl avec reste
  - Nombre de valeurs propres plongées du Laplacien
  - Démonstrations (les grandes lignes)

Collaboration avec Abderemane Morame, Laboratoire J. Leray, Nantes

Le cadre riemannien

- $(\mathcal{M}, g)$ variété riemannienne connexe orientée de dimension n.
- Pour toute 1-forme réelle A sur $\mathcal{M}$, on définit

$$-\Delta_A \;=\; (i\,d{+}A)^\star(i\,d{+}A)\;,\;((i\;d+A)u = i\;du + uA\;,\;\forall\;u\;\in\;C_0^\infty(\mathcal{M}))\;\;.$$

- Le champ magnétique est la 2-forme dA .

Le cadre riemannien

- $(\mathcal{M}, g)$ variété riemannienne connexe orientée de dimension n.
- Pour toute 1-forme réelle A sur $\mathcal{M}$, on définit

$$-\Delta_A \; = \; (i\, d{+}A)^\star (i\, d{+}A) \; , \; ((i\; d + A)u = i\; du + uA \; , \; \forall\; u \; \in \; C_0^\infty(\mathcal{M})) \; .$$

- Le champ magnétique est la 2-forme dA .
- On associe à dA un opérateur linéaire B defini sur l'espace tangent par $dA(X,Y) \; = \; g(B.X,Y) \; ; \quad \forall\; X \; , \; Y \; \in TM \times TM$.
- L'intensité du champ magnétique $\mathbf{b}$ est alors $\mathbf{b} \; = \; \frac{1}{2} tr \left((B^\star B)^{1/2} \right)$.

Le cadre riemannien

- $(\mathcal{M}, g)$ variété riemannienne connexe orientée de dimension n.
- Pour toute 1-forme réelle A sur $\mathcal{M}$, on définit

$$-\Delta_A \;=\; (i\,d{+}A)^\star(i\,d{+}A)\;,\;((i\;d+A)u = i\;du + uA\;,\;\forall\;u\;\in\;C_0^\infty(\mathcal{M}))\;\;.$$

- Le champ magnétique est la 2-forme dA .
- On associe à dA un opérateur linéaire B defini sur l'espace tangent par $dA(X,Y) \;=\; g(B.X,Y)\;;\quad \forall\;X\;,\;Y\;\in T\mathcal{M}\times T\mathcal{M}$.
- L'intensité du champ magnétique $\mathbf{b}$ est alors $\mathbf{b} \;=\; \frac{1}{2}tr\left((B^\star B)^{1/2}\right)$.
- Si $dim(\mathcal{M}) = 2$, alors
  - $dA \;=\; \widetilde{\mathbf{b}}\;dv$, avec $|\widetilde{\mathbf{b}}| \;=\; \mathbf{b}$,
    dv la mesure riemannienne sur $\mathcal{M}$.
  - Le champ magnétique est constant $\Longleftrightarrow$ $\widetilde{\mathbf{b}}$ est constant.

Le demi-plan de Poincaré

On considère le cas où $\mathcal{M} = \mathbb{H}$ est le demi-plan de Poincaré :

$$\mathbb{H} = \mathbb{R}\times]0,+\infty[\,, \quad g = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} \,.$$

- $-\Delta_A = y^2(D_x - A_1)^2 + y^2(D_y - A_2)^2$,
  avec $A = A_1(x,y)\,dx + A_2(x,y)\,dy$, et $A_j(x,y) \in C^\infty(\mathbb{H};\mathbb{R})$,

Le demi-plan de Poincaré

On considère le cas où $\mathcal{M} = \mathbb{H}$ est le demi-plan de Poincaré :

$$\mathbb{H} = \mathbb{R}\times]0,+\infty[\,, \quad g = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}\,.$$

- $-\Delta_A = y^2(D_x - A_1)^2 + y^2(D_y - A_2)^2$,
  avec $A = A_1(x,y)\,dx + A_2(x,y)\,dy$, et $A_j(x,y) \in C^\infty(\mathbb{H};\mathbb{R})$,
- $\widetilde{\mathbf{b}} = y^2\,(\partial_x A_2 - \partial_y A_1)$
- $\mathbf{b} = |\widetilde{\mathbf{b}}|$,
- $dv = y^{-2}dxdy$.

Le demi-plan de Poincaré

On considère le cas où $\mathcal{M} = \mathbb{H}$ est le demi-plan de Poincaré :

$$\mathbb{H} = \mathbb{R}\times]0,+\infty[\,, \quad g = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}\,.$$

- $-\Delta_A = y^2(D_x - A_1)^2 + y^2(D_y - A_2)^2$,
  avec $A = A_1(x,y)\,dx + A_2(x,y)\,dy$, et $A_j(x,y) \in C^\infty(\mathbb{H};\mathbb{R})$,
- $\widetilde{\mathbf{b}} = y^2\,(\partial_x A_2 - \partial_y A_1)$
- $\mathbf{b} = |\widetilde{\mathbf{b}}|$,
- $dv = y^{-2}dxdy$.

Proposition

- $-\Delta_A$ est essentiellement auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{H})$.
  On veut étudier son spectre : $\mathrm{sp}(-\Delta_A)$.
- Invariance de jauge :

$$\mathrm{sp}(-\Delta_A) = \mathrm{sp}(-\Delta_{A+d\varphi})\,; \quad \forall\,\varphi \in C^\infty(\mathbb{H};\mathbb{R})\,.$$

Le spectre pour un champ constant

- Le spectre de $-\Delta_{A^{\mathbf{b}}}$ est essentiel:
  $\mathrm{sp}(-\Delta_{A^{\mathbf{b}}}) = \mathrm{sp}_{ac}(-\Delta_{A^{\mathbf{b}}}) \bigcup S(\mathbf{b})$.
- Le spectre absolument continu est donné par
  $\mathrm{sp}_{ac}(-\Delta_{A^{\mathbf{b}}}) \; = \; [\mathbf{b}^2 + \frac{1}{4}, +\infty[$.

Le spectre pour un champ constant

- Le spectre de $-\Delta_{A^{\mathbf{b}}}$ est essentiel:
  $\mathrm{sp}(-\Delta_{A^{\mathbf{b}}}) = \mathrm{sp}_{ac}(-\Delta_{A^{\mathbf{b}}}) \bigcup S(\mathbf{b})$.
- Le spectre absolument continu est donné par
  $\mathrm{sp}_{ac}(-\Delta_{A^{\mathbf{b}}}) \; = \; [\mathbf{b}^2 + \frac{1}{4}, +\infty[$.
- Si $0 \leq \mathbf{b} \leq 1/2$ l'ensemble $S(\mathbf{b})$ est vide,
- Si $\mathbf{b} > 1/2$ il est composé d'un nombre fini de valeurs propres de multiplicité infinie données par

$$S(\mathbf{b}) \; = \; \{(2j+1)\mathbf{b} - j(j+1) \; ; \; j \in \mathbb{N} \, , \; j < \mathbf{b} - \frac{1}{2}\} \, .$$

Résultats reliés : contexte hyperbolique

- Résultats sur le demi-plan de Poincaré
  - Laplacien de Maass: Elstrodt(73), Grosche(88), Comtet(87), Ikeda-Matsumoto (99), Kim-Lee(02)
  - Asympt. constant magnetic fields ,Pauli operators : Inahama-Shirai (03)
  - Asymptotic distribution for Schrödinger operators : Inahama-Shirai (04)
  - Asymptotic distribution for magnetic bottles : Morame-Truc (08)

Résultats reliés : contexte hyperbolique

- Résultats sur le demi-plan de Poincaré
  - Laplacien de Maass: Elstrodt(73), Grosche(88), Comtet(87), Ikeda-Matsumoto (99), Kim-Lee(02)
  - Asympt. constant magnetic fields ,Pauli operators : Inahama-Shirai (03)
  - Asymptotic distribution for Schrödinger operators : Inahama-Shirai (04)
  - Asymptotic distribution for magnetic bottles : Morame-Truc (08)

- variétés avec cusps :
  - Asymptotic distribution for Schrödinger operators : Golénia-Moroianu (08)
  - Spectral analysis of magnetic Laplacians : Golénia-Moroianu (08)

- Surfaces hyperboliques non compactes
  Asymptotic distribution for magnetic bottles : Morame-Truc (09)

Surfaces hyperboliques géométriquement finies

- Definition

  $(\mathcal{M},\ g)$: surface Riemannienne connexe

  $$\mathcal{M} \ = \ \left(\bigcup_{j=0}^{J_1} M_j\right) \bigcup \left(\bigcup_{k=1}^{J_2} F_k\right) \ ;$$

  - M_j , F_k ouverts de $\mathcal{M}$, M_0 à fermeture compacte,
  - ($j \neq 0$: M_j isométriques à $\mathbb{S}\times]a_j^2, +\infty[$, (cusps)

    $$ds_j^2 \ = \ y^{-2}(\ L_j^2\ d\theta^2 \ + \ dy^2\ )$$

    (a_j et L_j sont des constantes > 0)
  - F_k isométrique à $\mathbb{S}\times]\alpha_k^2, +\infty[$, (entonnoirs)

    $$ds_k^2 \ = \ \tau_k^2 \cosh^2 t\ d\theta^2 \ + \ dt^2$$

    (α_k et τ_k sont des constantes > 0) .

Champ magnétique constant sur $\mathcal{M}$

- $\mathcal{M} = \left(\bigcup_{j=0}^{J_1} M_j\right) \bigcup \left(\bigcup_{k=1}^{J_2} F_k\right)$;
- On ne peut pas toujours avoir un champ magnétique constant sur $\mathcal{M}$, mais

Champ magnétique constant sur $\mathcal{M}$

- $$\mathcal{M} = \left(\bigcup_{j=0}^{J_1} M_j \right) \bigcup \left(\bigcup_{k=1}^{J_2} F_k \right) \ ;$$
- On ne peut pas toujours avoir un champ magnétique constant sur $\mathcal{M}$, mais
- $\forall (b, \beta) \in \mathbb{R}^{J_1} \times \mathbb{R}^{J_2}$, $\exists\ A$, t. q. dA vérifie

$$dA = \widetilde{\mathbf{b}}(z) dm \quad \begin{cases} \widetilde{\mathbf{b}}(z) = b_j \ \forall\ z \in M_j \\ \widetilde{\mathbf{b}}(z) = \beta_k \ \forall\ z \in F_k \end{cases}$$

Le spectre essentiel du laplacien magnétique (1)

Théorème 1

- Si $J_1 = 0$ et $J_2 > 0$,

$$\mathrm{sp}_{ess}(-\Delta_A) = [\frac{1}{4} + \inf_k \beta_k^2 \,,\, +\infty[\bigcup \left(\bigcup_{k=1}^{J_2} S(\beta_k) \right) \,.$$

Le spectre essentiel du laplacien magnétique (1)

Théorème 1

- Si $J_1 = 0$ et $J_2 > 0$,

$$\mathrm{sp}_{ess}(-\Delta_A) = [\frac{1}{4} + \inf_k \beta_k^2 , +\infty[\bigcup \left(\bigcup_{k=1}^{J_2} S(\beta_k) \right) .$$

- Si $0 \leq \beta_k \leq 1/2$ l'ensemble $S(\beta_k)$ est vide
- si $\beta_k > 1/2$ il est composé d'un nombre fini de valeurs propres de multiplicité infinie données par

$$S(\beta_k) = \{(2j+1)\beta_k - j(j+1) \; ; \; j \in \mathbb{N} , \; j < \beta_k - \frac{1}{2}\} .$$

Le spectre essentiel du laplacien magnétique (2)

Si $J_1 > 0$, alors

- $\forall j$, $1 \leq j \leq J_1$ et $\forall\, z \in M_j$
  $\exists$ une courbe fermée unique $\mathcal{C}_{j,z}$ sur $(M_j,\ g)$, qui passe par z , non contractible et de g-courbure zero .
- La limite suivante existe et est finie:

$$[\mathbf{A}]_{\mathbf{M_j}} = \lim_{d(z)\to+\infty} \int_{\mathcal{C}_{j,z}} A \, .$$

- On définit : $J_1^A = \{j \in \mathbb{N} \, , \, 1 \leq j \leq J_1 \ t.q. \ [\mathbf{A}]_{\mathbf{M_j}} \in 2\pi\mathbb{Z} \ \}$.

Le spectre essentiel du laplacien magnétique (2)

Si $J_1 > 0$, alors

- $\forall j\ ,\ 1 \leq j \leq J_1$ et $\forall\ z \in M_j$
  $\exists$ une courbe fermée unique $\mathcal{C}_{j,z}$ sur $(M_j,\ g)$, qui passe par z , non contractible et de g-courbure zero .
- La limite suivante existe et est finie:

$$[\mathbf{A}]_{\mathbf{M_j}} = \lim_{d(z)\to+\infty} \int_{\mathcal{C}_{j,z}} A\ .$$

- On définit : $J_1^A = \{j \in \mathbb{N}\ ,\ 1 \leq j \leq J_1\ t.q.\ [\mathbf{A}]_{\mathbf{M_j}} \in 2\pi\mathbb{Z}\ \}$.

Théorème 2

On suppose que $J_1 > 0$, $J_2 > 0$, et que $J_1^A \neq \emptyset$. Alors

- $\mathrm{sp}_{ess}(-\Delta_A) =$
  $$[\frac{1}{4} + \min\{\inf_{j\in J_1^A} b_j^2\ ,\ \inf_{1\leq k\leq J_2} \beta_k^2\ \}\ ,\ +\infty[\ \bigcup \left(\bigcup_{k=1}^{J_2} S(\beta_k)\right)\ .$$

Surface d'aire finie, avec une 1-forme de classe non entière

- Théorème 3

  On considère une surface hyperbolique géométriquement finie $(\mathcal{M},\ g)$ d'aire finie, $(J_2 = 0)$, et telle que $J_1^A \ = \ \emptyset$. Alors

  - (i) $\mathrm{sp}_{ess}(-\Delta_A) \ = \ \emptyset$:
    $-\Delta_A$ a un spectre discret , (il est à résolvante compacte).
  - (ii) $N(\lambda, -\Delta_A) \ = \ \lambda \dfrac{|\mathcal{M}|}{4\pi} \ + \ \mathbf{O}(\sqrt{\lambda} \ln \lambda)$.

Surface d'aire finie, avec une 1-forme de classe non entière

- Théorème 3
  On considère une surface hyperbolique géométriquement finie $(\mathcal{M},\ g)$ d'aire finie, $(J_2 = 0)$, et telle que $J_1^A \ = \ \emptyset$. Alors
  - (i) $\mathrm{sp}_{ess}(-\Delta_A) \ = \ \emptyset$:
    $-\Delta_A$ a un spectre discret , (il est à résolvante compacte).
  - (ii) $N(\lambda, -\Delta_A) \ = \ \lambda \dfrac{|\mathcal{M}|}{4\pi} \ + \ \mathbf{O}(\sqrt{\lambda} \ln \lambda)$.

- $N(\lambda, -\Delta_A) \ = \ \sum_{\lambda_j < \lambda} 1$
  - $(\lambda_j)_j$: la suite croissante des valeurs propres de $-\Delta_A$, (chaque valeur propre répétée selon sa multiplicité)

- Proposition :
  le laplacien sur une variété riemannienne compacte M de dim n satisfait à la loi de Weyl :
  $$N(\lambda, -\Delta_0^M) \ = \ \lambda^{n/2} \frac{|M|}{(4\pi)^{n/2} \Gamma(n/2+1)} \ + \ o(\lambda^{n/2}) \ .$$

Remarques (1)

- Le th. 3 est une conséquence de la loi de Weyl pour un cusp :
  - Soit $M = \mathbb{S}\times]\alpha^2, +\infty[$ munie de la métrique $ds^2 = L^2 e^{-2t} d\theta^2 + dt^2$ ($\alpha > 0$ $L > 0$ donnés).
  - $-\Delta_A^M$: l'op. associé à $-\Delta_A$ sur M avec la cond de Dirichlet .
  - $$N(\lambda, -\Delta_A^M) = \lambda \frac{|M|}{4\pi} + \mathbf{O}(\sqrt{\lambda}\ln\lambda) .$$
- Stabilité Le théorème 3 reste vrai si on perturbe la métrique de $\mathcal{M}$ sur un compact.

Remarques (1)

- Le th. 3 est une conséquence de la loi de Weyl pour un cusp :
  - Soit $M = \mathbb{S}\times]\alpha^2, +\infty[$ munie de la métrique $ds^2 = L^2 e^{-2t} d\theta^2 + dt^2$ ($\alpha > 0$ $L > 0$ donnés).
  - $-\Delta_A^M$: l'op. associé à $-\Delta_A$ sur M avec la cond de Dirichlet .
  - $$N(\lambda, -\Delta_A^M) = \lambda \frac{|M|}{4\pi} + \mathbf{O}(\sqrt{\lambda} \ln \lambda) .$$
- Stabilité Le théorème 3 reste vrai si on perturbe la métrique de $\mathcal{M}$ sur un compact.
- Le cas $J^A = \emptyset$ peut s'interpréter comme un phénomène de Aharonov-Bohm :
  - le champ magnétique dA ne suffit pas à décrire $-\Delta_A$
  - on peut avoir une bouteille magnétique (= laplacien magnétique à résolvante compacte) d'intensité nulle .

Remarques (2)

- $A = 0 \Rightarrow$ le spectre essentiel de $-\Delta = -\Delta_0$ contient des valeurs propres plongées : $(\mathrm{sp}_{ess}(-\Delta) = [\frac{1}{4}, +\infty[)$.
  - $N_{ess}(\lambda, -\Delta)$: nombre de valeurs propres plongées dans $[\frac{1}{4}, \lambda[$,
  - $N_{ess}(\lambda, -\Delta) \leq \lambda \dfrac{|\mathcal{M}|}{4\pi}$; (Colin de Verdière, Hejhal)

Remarques (2)

- $A = 0 \Rightarrow$ le spectre essentiel de $-\Delta = -\Delta_0$ contient des valeurs propres plongées : $(\mathrm{sp}_{ess}(-\Delta) = [\frac{1}{4}, +\infty[)$.
  - $N_{ess}(\lambda, -\Delta)$: nombre de valeurs propres plongées dans $[\frac{1}{4}, \lambda[$,
  - $N_{ess}(\lambda, -\Delta) \;\le\; \lambda \frac{|\mathcal{M}|}{4\pi}$; (Colin de Verdière, Hejhal)
- Espaces localement symétriques et formes automorphes
  Dans le cas où $\mathcal{M} = \Gamma(N)\backslash\mathbb{H}$,

$$\Gamma(N) = \{\gamma \in SL(2, \mathbb{Z}) : \gamma = Id \bmod N\}$$

on a (Müller '07)

$$N_{ess}(\lambda, -\Delta) \;=\; \lambda \frac{|\mathcal{M}|}{4\pi} \;+\; \mathbf{O}(\sqrt{\lambda} \ln \lambda) \; .$$

Remarques (3)

- Definition

  Une fonction $f\ :\ \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ est une forme automorphe de Maass si

  - $f(\gamma z) = f(z) \quad \forall \gamma \in \Gamma(N)$
  - $\exists \lambda$ s.t. $\Delta f = \lambda f$
  - f est à croissance lente.

- Exemples : les séries d'Eisenstein, les formes cusps.

Remarques (3)

- Definition

  Une fonction $f \;:\; \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ est une forme automorphe de Maass si

  - $f(\gamma z) = f(z) \quad \forall \gamma \in \Gamma(N)$
  - $\exists \lambda$ s.t. $\Delta f = \lambda f$
  - f est à croissance lente.

- Exemples : les séries d'Eisenstein, les formes cusps.

- Formule de Selberg

  Pour tout réseau $\Gamma \in SL(2, \mathbb{R})$:

$$N_\Gamma(\lambda, -\Delta) + \; M_\Gamma(\lambda, -\Delta) \;\sim\; \lambda \frac{|\Gamma \backslash \mathbb{H}|}{4\pi} \; .$$

  - $M_\Gamma(\lambda, -\Delta)$: "winding number" du déterminant de la matrice de scattering (donné par le zéro-ième coefficient de Fourier des séries d'Eisenstein .)

Dimensions supérieures

$(\mathcal{M},\ g)$: variété riemannienne connexe de dim n

$\mathcal{M} \ = \ M_0 \cup \left(\bigcup_{j=1}^{J} M_j \right)$;

- $M_j \cap M_k = \emptyset$,
- M_j ouverts de $\mathcal{M}$, M_0 à fermeture compacte,
- $\forall j > 1, \exists$ une variété riem. compacte $(X_j, \mathbf{h}_j)$ de dim $n-1$ t.q. M_j isométrique à $X_j \times]a_j^2, +\infty[$, $(a_j > 0)$ (M_j $j \neq 0$ cusps)

$$ds_j^2 \ = \ y^{-2\delta_j}(\mathbf{h}_j \ + \ dy^2 \ ) \ ; \quad (1/n < \delta_j \leq 1)$$

Dimensions supérieures

$(\mathcal{M},\ g)$: variété riemannienne connexe de dim n

$\mathcal{M} \ = \ M_0 \cup \left(\bigcup_{j=1}^{J} M_j \right)$;

- $M_j \cap M_k = \emptyset$,
- M_j ouverts de $\mathcal{M}$, M_0 à fermeture compacte,
- $\forall j > 1, \exists$ une variété riem. compacte $(X_j, \mathbf{h}_j)$ de dim $n-1$ t.q. M_j isométrique à $X_j \times]a_j^2, +\infty[$, $(a_j > 0)$ (M_j $j \neq 0$ cusps)

$$ds_j^2 \ = \ y^{-2\delta_j}(\mathbf{h}_j \ + \ dy^2 \ ) \ ; \quad (1/n < \delta_j \leq 1)$$

$\Rightarrow \forall j > 1, \exists$ une 1-forme $A_j \in T^\star(X_j)$, t.q.

- $dA_j \neq 0$ ou
- $dA_j = 0$ et $[A_j]$ non entier

($\exists$ une courbe fermée γ sur X_j vérifiant $\int_\gamma A_j \ \notin \ 2\pi\mathbb{Z}$.)

- - On peut trouver $A \in T^\star(\mathcal{M})$ t. q.
    $\forall\, j,\ 1 \le j \le J, \quad A \;=\; A_j \quad \text{on} \;\; M_j$.
  - On définit le laplacien magnétique
    $-\Delta_A \;=\; (i\, d + A)^\star (i\, d + A)$,
    $(i\, d + A)u = i\, du + uA$, $\forall\, u \;\in\; C_0^\infty(\mathcal{M}; \mathbb{C})$

- - On peut trouver $A \in T^\star(\mathcal{M})$ t. q.
    $\forall\, j,\ 1 \leq j \leq J, \quad A = A_j \quad \text{on } M_j$.
  - On définit le laplacien magnétique
    $-\Delta_A = (i\,d + A)^\star (i\,d + A)$,
    $(i\,d + A)u = i\,du + uA$, $\forall\, u \in C_0^\infty(\mathcal{M};\mathbb{C})$

- $\mathcal{M}$ espace métrique complet
  $\Longrightarrow$ $\mathcal{M}$ est géodésiquement complet (théorème de Hopf-Rinow)
  $\Longrightarrow$ $-\Delta_A$ a une unique extension auto-adjointe sur $L^2(\mathcal{M})$.

Le spectre essentiel

- Théorème 4 (Le cas $A = 0$)
  Sous les hypothèses précédentes pour $\mathcal{M}$,
  le spectre essentiel de $-\Delta = -\Delta_0$ on $\mathcal{M}$ est donné par
  - $\mathrm{sp}_{\mathrm{ess}}(-\Delta) = [0, +\infty[\quad \text{if} \quad 1/n < \delta < 1$
  - $\mathrm{sp}_{\mathrm{ess}}(-\Delta) = [\dfrac{(n-1)^2}{4}, +\infty[\quad \text{if} \quad \delta = 1 \ .$
  - $\delta = \min\limits_{1 \leq j \leq J} \delta_j \ .$

Le spectre essentiel

- Théorème 4 (Le cas $A = 0$)
  Sous les hypothèses précédentes pour $\mathcal{M}$,
  le spectre essentiel de $-\Delta = -\Delta_0$ on $\mathcal{M}$ est donné par
  - $\mathrm{sp}_{\mathrm{ess}}(-\Delta) = [0, +\infty[\quad \text{if} \quad 1/n < \delta < 1$
  - $\mathrm{sp}_{\mathrm{ess}}(-\Delta) = [\dfrac{(n-1)^2}{4}, +\infty[\quad \text{if} \quad \delta = 1$.
  - $\delta = \min\limits_{1 \leq j \leq J} \delta_j$.

- Théorème 5 (Le cas $A \neq 0$)
  Sous les hypothèses précédentes pour $\mathcal{M}$ et A,
  - le laplacien magnétique $-\Delta_A$ est à résolvante compacte .
  - $\mathrm{sp}(-\Delta_A) = \mathrm{sp}_d(-\Delta_A) = \{\lambda_j, j \in \mathbb{N}^\star\}$ with
    - $\lambda_j \leq \lambda_{j+1}$
    - $\lim_{j \to +\infty} \lambda_j = +\infty$,
    - $\lambda_0 > 0$.
  - la suite des fonctions propres normalisées e $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}^\star}$ est une base de l'espace de Hilbert $L^2(\mathcal{M})$.

Formule de Weyl

- Théorème 6 (le cas $A \neq 0$)
  Sous les hypothèses précédentes pour $\mathcal{M}$ et A,
  on a la formule de Weyl avec reste (quand $\lambda \to +\infty$)

$$N(\lambda, -\Delta_A) \;=\; |\mathcal{M}| \frac{\omega_n}{(2\pi)^n} \lambda^{n/2} \;+\; \mathbf{O}(r(\lambda))\;,$$

avec $r(\lambda) \;=\; \begin{cases} \lambda^{(n-1)/2} \ln(\lambda), & \text{if} \quad 1/(n-1) \leq \delta \\ \lambda^{1/(2\delta)}, & \text{if} \quad 1/n < \delta < 1/(n-1) \end{cases}$

Formule de Weyl

- Théorème 6 (le cas $A \neq 0$)
  Sous les hypothèses précédentes pour $\mathcal{M}$ et A,
  on a la formule de Weyl avec reste (quand $\lambda \to +\infty$)

$$N(\lambda, -\Delta_A) = |\mathcal{M}| \frac{\omega_n}{(2\pi)^n} \lambda^{n/2} + \mathbf{O}(r(\lambda)) ,$$

avec $r(\lambda) = \begin{cases} \lambda^{(n-1)/2} \ln(\lambda), & \text{if} \quad 1/(n-1) \leq \delta \\ \lambda^{1/(2\delta)}, & \text{if} \quad 1/n < \delta < 1/(n-1) \end{cases}$

- $\delta = \min_{1 \leq j \leq J} \delta_j$,
- $|\mathcal{M}|$: le volume riemannien de $\mathcal{M}$
- ω_d : le volume euclidien de la boule unité de $\mathbb{R}^d$: $\omega_d = \dfrac{\pi^{d/2}}{\Gamma(1 + \frac{d}{2})}$.

- Remarques
  - La formule asymptotique sans le reste est faite par Golenia -Moroianu (dans un contexte plus large),
  - Le Théorème 3 est un cas particulier du Théorème 6 (pour $n = 2$ et $\delta_j = 1$ pour tout $1 \leq j \leq J$) .

- Remarques
  - La formule asymptotique sans le reste est faite par Golenia -Moroianu (dans un contexte plus large),
  - Le Théorème 3 est un cas particulier du Théorème 6 (pour $n = 2$ et $\delta_j = 1$ pour tout $1 \leq j \leq J$) .

- Conséquences
  - l'opérateur de Laplace-Beltrami $-\Delta = -\Delta_0$ peut avoir des valeurs propres plongées dans son spectre essentiel $\mathrm{sp}_{\mathrm{ess}}(-\Delta)$.
  - $N_{\mathrm{ess}}(\lambda, -\Delta)$: le nombre de valeurs propres de $-\Delta$, (comptées avec leur multiplicité), inférieures à λ.
  - En adaptant la dem. du Théorème 6 on obtient une majoration de $N_{\mathrm{ess}}(\lambda, -\Delta)$.

Théorème 7

Il existe une constante $C_{\mathcal{M}}$ t.q., pour tout $\lambda >> 1$,

$$N_{\text{ess}}(\lambda, -\Delta) \ \leq \ |\mathcal{M}| \frac{\omega_n}{(2\pi)^n} \lambda^{n/2} \ + \ C_{\mathcal{M}} r_0(\lambda) \qquad (*),$$

avec $r_0(\lambda)$ défini par $r_0(\lambda) \ = \begin{cases} \lambda^{\frac{n-1}{2}} \ln(\lambda), & \text{si} \quad 2/n \leq \delta \leq 1 \\ \lambda^{\frac{n-(n\delta-1)}{2}}, & \text{si} \quad 1/n < \delta < 2/n \end{cases}$;

δ défini comme précédemment .

- **Théorème 7**

  Il existe une constante $C_{\mathcal{M}}$ t.q., pour tout $\lambda >> 1$,

$$N_{\text{ess}}(\lambda, -\Delta) \ \leq \ |\mathcal{M}| \frac{\omega_n}{(2\pi)^n} \lambda^{n/2} \ + \ C_{\mathcal{M}} r_0(\lambda) \qquad (*),$$

  avec $r_0(\lambda)$ défini par $r_0(\lambda) \ = \begin{cases} \lambda^{\frac{n-1}{2}} \ln(\lambda), & \text{si} \quad 2/n \leq \delta \leq 1 \\ \lambda^{\frac{n-(n\delta-1)}{2}}, & \text{si} \quad 1/n < \delta < 2/n \end{cases}$;

  δ défini comme précédemment .

- Remarques
  - $(*)$ $\Rightarrow$ les v.p. de $-\Delta$ sont de multiplicité finie.
  - $(*)$ est optimale pour $n = 2$. (Müller '07: $\mathcal{M} = \Gamma(N)\backslash\mathbb{H}$, avec $\Gamma(N) = \{\gamma \in SL(2,\mathbb{Z}) : \gamma = Id \bmod N\}$)
  - pour $n = 2$, une perturbation compacte de la métrique peut détruire toutes les v.p. plongées (Colin de Verdière '83).

Preuves des Th. 1-3

- $$\mathrm{sp}_{ess}(-\Delta_A) = \left(\bigcup_{j=1}^{J_1} \mathrm{sp}_{ess}(-\Delta_A^{M_j})\right) \bigcup \left(\bigcup_{k=1}^{J_2} \mathrm{sp}_{ess}(-\Delta_A^{F_k})\right) ;$$

Preuves des Th. 1-3

- $$\mathrm{sp}_{ess}(-\Delta_A) \;=\; \left(\bigcup_{j=1}^{J_1} \mathrm{sp}_{ess}(-\Delta_A^{M_j})\right) \bigcup \left(\bigcup_{k=1}^{J_2} \mathrm{sp}_{ess}(-\Delta_A^{F_k})\right) \;;$$

- Lemme 1

$$\mathrm{sp}_{ess}(-\Delta_A^{F_k}) \;=\; [\frac{1}{4} + \beta_k^2 \;,\; +\infty[\bigcup \left(\bigcup_{k=1}^{J_2} S(\beta_k)\right) \;.$$

- Lemme 2

  Si $1 \leq j \leq J_1$ et $j \;\notin\; J_1^A$, alors

$$\mathrm{sp}_{ess}(-\Delta_A^{M_j}) \;=\; \emptyset \;.$$

  Si $j \;\in\; J_1^A$, alors

$$\mathrm{sp}_{ess}(-\Delta_A^{M_j}) \;=\; [\frac{1}{4} + b_j^2 \;,\; +\infty[\;.$$

Preuve du lemme 2

- M_j isométrique à $\mathbb{S}\times]a_j^2,+\infty[$, (cusps)
$ds_j^2 \;=\; y^{-2}(\;L_j^2\;d\theta^2\;+\;dy^2\;) \quad (a_j > 0 \text{ et } L_j > 0\;)$
- On pose $t = \ln y$ d'où
  - $M_j \;=\; \mathbb{S}\times]\alpha_j^2,+\infty[\quad \text{et} \quad ds_j^2 \;=\; L_j^2 e^{-2t} d\theta^2 \;+\; dt^2$;
    $(\alpha_j = e^{a_j})$.

Preuve du lemme 2

- M_j isométrique à $\mathbb{S}\times]a_j^2,+\infty[$, (cusps)
  $ds_j^2 \;=\; y^{-2}(\;L_j^2\;d\theta^2\;+\;dy^2\;) \quad (a_j > 0 \text{ et } L_j > 0\;)$
- On pose $t = \ln y$ d'où
  - $M_j \;=\; \mathbb{S}\times]\alpha_j^2,+\infty[\quad \text{et} \quad ds_j^2 \;=\; L_j^2 e^{-2t} d\theta^2 \;+\; dt^2\;;$
    $(\alpha_j = e^{a_j})\;.$

- - $-\Delta_A^{M_j} \;=\; L_j^{-2} e^{2t}(D_\theta - A_1)^2 + e^t(D_t - A_2)(e^{-t}(D_t - A_2))\;,$
  - $\widetilde{\mathbf{b}} = b_j \;=\; L_j^{-1} e^t(\partial_\theta A_2 - \partial_t A_1)$ et $dm = L_j e^{-t} d\theta dt\;.$

Preuve du lemme 2

- M_j isométrique à $\mathbb{S}\times]a_j^2, +\infty[$, (cusps)
  $ds_j^2 \;=\; y^{-2}(\; L_j^2 \; d\theta^2 \;+\; dy^2 \;) \quad (a_j > 0 \text{ et } L_j > 0 \;)$
- On pose $t = \ln y$ d'où
  - $M_j \;=\; \mathbb{S}\times]\alpha_j^2, +\infty[\quad \text{et} \quad ds_j^2 \;=\; L_j^2 e^{-2t} d\theta^2 \;+\; dt^2 \;;$
    $(\alpha_j = e^{a_j})$.
-
  - $-\Delta_A^{M_j} \;=\; L_j^{-2} e^{2t}(D_\theta - A_1)^2 + e^t(D_t - A_2)(e^{-t}(D_t - A_2))$,
  - $\widetilde{\mathbf{b}} = b_j \;=\; L_j^{-1} e^t(\partial_\theta A_2 - \partial_t A_1)$ et $dm = L_j e^{-t} d\theta dt$.
- on a

$$A - \widetilde{A} \;=\; d\varphi \text{ si } \widetilde{A} = (\xi + L_j b_j e^{-t}) d\theta \;,\; (\text{pour une constante } \xi) \;.$$

- $\Longrightarrow$ on peut prendre $A = \widetilde{A}$.

Preuve du lemme 2 (2)

- On définit $Uf = \sqrt{L_j} e^{-t/2} f$,
- $\Longrightarrow P = -U \Delta_A^{M_j} U^\star = L_j^{-2} e^{2t} (D_\theta - A_1)^2 + D_t^2 + \frac{1}{4}$.

Preuve du lemme 2 (2)

- On définit $Uf = \sqrt{L_j} e^{-t/2} f$,
- $\Longrightarrow P = -U \Delta_A^{M_j} U^\star = L_j^{-2} e^{2t} (D_\theta - A_1)^2 + D_t^2 + \dfrac{1}{4}$.
- $\Longrightarrow \mathrm{sp}(-\Delta_A^{M_j}) = \mathrm{sp}(P) = \bigcup_{\ell \in \mathbb{Z}} \mathrm{sp}(P_\ell)$

  $$P_\ell = D_t^2 + \frac{1}{4} + \left(e^t \frac{(\ell + \xi)}{L_j} + b_j \right)^2 ,$$

  avec les conditions de Dirichlet sur $L^2(I; dt)$; $I =]\alpha_j^2, +\infty[$.

Preuve du lemme 2 (2)

- On définit $Uf = \sqrt{L_j}e^{-t/2}f$,
- $\Longrightarrow P = -U\Delta_A^{M_j}U^\star = L_j^{-2}e^{2t}(D_\theta - A_1)^2 + D_t^2 + \frac{1}{4}$.
- $\Longrightarrow \mathrm{sp}(-\Delta_A^{M_j}) = \mathrm{sp}(P) = \bigcup_{\ell\in\mathbb{Z}} \mathrm{sp}(P_\ell)$

  $$P_\ell = D_t^2 + \frac{1}{4} + \left(e^t\frac{(\ell+\xi)}{L_j} + b_j\right)^2 ,$$

  avec les conditions de Dirichlet sur $L^2(I;dt)$; $I =]\alpha_j^2, +\infty[$.
- Quand $\ell + \xi \neq 0$, le spectre de P_ℓ est discret.
- Plus précisément : $\mathrm{sp}(P_\ell) = \mathrm{sp}(P^\pm)$ $\qquad P^\pm = D_t^2 + \frac{1}{4} + (\pm e^t + b_j)^2$

  pour les cond. de Dirichlet sur

  $L^2(I_{j,\ell};dt)$; $I_{j,\ell} =]\alpha_j^2 + \ln(|\ell+\xi|/L_j), +\infty[$, and $\pm = \frac{\ell+\xi}{|\ell+\xi|}$.

Preuve du lemme 2 (3)

- $\Longrightarrow$ si $\ell + \xi \neq 0 \ \forall \ell \in \mathbb{Z}$, $\lim_{|\ell| \to \infty} \inf \mathrm{sp}(P_\ell) = +\infty$,
- $\Longrightarrow$ le spectre de $-\Delta_A^{M_j}$ est discret.

Preuve du lemme 2 (3)

- $\Longrightarrow$ si $\ell + \xi \neq 0 \; \forall \ell \in \mathbb{Z}$, $\lim_{|\ell| \to \infty} \inf \mathrm{sp}(P_\ell) = +\infty$,
- $\Longrightarrow$ le spectre de $-\Delta_A^{M_j}$ est discret.
- Que signifie cette condition ? On a
  - $A = (\xi + L_j b_j e^{-t}) d\theta$,
  - $[\mathbf{A}]_{\mathbf{M_j}} = \lim_{d(z) \to +\infty} \int_{\mathcal{C}_{j,z}} A$

    $\Longrightarrow [\mathbf{A}]_{\mathbf{M_j}} = \lim_{t \to +\infty} \int_0^{2\pi} (\xi + L_j b_j e^{-t}) d\theta = 2\pi\xi$, donc
- $\ell + \xi \neq 0 \; \forall \ell \in \mathbb{Z} \iff [\mathbf{A}]_{\mathbf{M_j}} \notin 2\pi\mathbb{Z} \iff J_1^A = \emptyset$.

Preuve du lemme 2 (3)

- $\Longrightarrow$ si $\ell + \xi \neq 0 \; \forall \ell \in \mathbb{Z}$, $\lim_{|\ell|\to\infty} \; \inf \mathrm{sp}(P_\ell) \; = \; +\infty$,
- $\Longrightarrow$ le spectre de $-\Delta_A^{M_j}$ est discret.

- Que signifie cette condition ? On a
  - $A = (\xi + L_j b_j e^{-t}) d\theta$,
  - $$[\mathbf{A}]_{\mathbf{M_j}} \; = \; \lim_{d(z)\to+\infty} \int_{\mathcal{C}_{j,z}} A$$

  $$\Longrightarrow [\mathbf{A}]_{\mathbf{M_j}} = \lim_{t\to+\infty} \int_0^{2\pi} (\xi + L_j b_j e^{-t}) d\theta = 2\pi\xi,$$ donc
- $\ell + \xi \neq 0 \; \forall \ell \in \mathbb{Z} \quad \Longleftrightarrow \quad [\mathbf{A}]_{\mathbf{M_j}} \notin 2\pi\mathbb{Z} \quad \Longleftrightarrow \quad J_1^A \; = \; \emptyset$.

- Si $\ell + \xi = 0$, le spectre de P_ℓ est absolument continu :

$$\mathrm{sp}(P_{-\xi}) \; = \; \mathrm{sp}_{ess}(P_{-\xi}) \; = \; \mathrm{sp}_{ac}(P_{-\xi}) \; = \; [\frac{1}{4} + b_j^2 \; , \; +\infty[\; ;$$

- $\Longrightarrow$ si $[A]_{M_j} \; \in \; 2\pi\mathbb{Z}$, $\quad \mathrm{sp}_{ess}(-\Delta_A^{M_j}) \; = \; [\frac{1}{4} + b_j^2 \; , \; +\infty[$.

loi de Weyl pour 1 cusp (1)

- $M = \mathbb{S}\times]\alpha^2, +\infty[$ cusp
  $ds^2 = L^2 e^{-2t} d\theta^2 + dt^2$ la métrique sur M ($\alpha > 0$ et $L > 0$).
- $A = (\xi + Lbe^{-t})d\theta$, (pour une constante ξ) .
- $N(\lambda, -\Delta_A^M) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} N(\lambda, P_\ell)$
  avec $P_\ell = D_t^2 + \frac{1}{4} + \left(e^t \frac{(\ell + \xi)}{L} \pm b \right)^2$,
  pour les Cond. de Dirichlet sur $L^2(I; dt)$; $I =]\alpha^2, +\infty[$.

loi de Weyl pour 1 cusp (1)

- $M = \mathbb{S}\times]\alpha^2, +\infty[$ cusp
  $ds^2 = L^2 e^{-2t} d\theta^2 + dt^2$ la métrique sur M ($\alpha > 0$ et $L > 0$).
- $A = (\xi + Lbe^{-t})d\theta$, (pour une constante ξ) .
- $$N(\lambda, -\Delta_A^M) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} N(\lambda, P_\ell)$$
  avec $P_\ell = D_t^2 + \frac{1}{4} + \left(e^t \frac{(\ell+\xi)}{L} \pm b\right)^2$,
  pour les Cond. de Dirichlet sur $L^2(I; dt)$; $I =]\alpha^2, +\infty[$.
- On pose $Q_\ell = D_t^2 + \frac{1}{4} + \frac{(\ell+\xi)^2}{L^2} e^{2t}$, pour les C. D. sur $L^2(I; dt)$.
- Alors $Q_\ell - C\sqrt{Q_\ell} \leq P_\ell \leq Q_\ell + C\sqrt{Q_\ell}$.

loi de Weyl pour 1 cusp (1)

- $M = \mathbb{S}\times]\alpha^2,+\infty[$ cusp
  $ds^2 = L^2 e^{-2t} d\theta^2 + dt^2$ la métrique sur M ($\alpha > 0$ et $L > 0$).
- $A = (\xi + Lbe^{-t})d\theta$, (pour une constante ξ) .
- $N(\lambda, -\Delta_A^M) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} N(\lambda, P_\ell)$

  avec $P_\ell = D_t^2 + \frac{1}{4} + \left(e^t \frac{(\ell+\xi)}{L} \pm b\right)^2$,

  pour les Cond. de Dirichlet sur $L^2(I; dt)$; $I =]\alpha^2, +\infty[$.
- On pose $Q_\ell = D_t^2 + \frac{1}{4} + \frac{(\ell+\xi)^2}{L^2} e^{2t}$, pour les C. D. sur $L^2(I; dt)$.
- Alors $Q_\ell - C\sqrt{Q_\ell} \leq P_\ell \leq Q_\ell + C\sqrt{Q_\ell}$.
- $\Longrightarrow$ $\exists$ une constante $C(b)$, t.q. pour tout $\lambda >> 1$,

$$N(\lambda - \sqrt{\lambda}C(b), Q_\ell) \leq N(\lambda, P_\ell) \leq N(\lambda + \sqrt{\lambda}C(b), Q_\ell) \ ;$$

- Lemme

  $\exists C > 1$ t. q. $\forall \mu >> 1$ and $\forall \ell \in X_\mu$,

  $$w_\ell(\mu) - \pi \ \leq \ \pi N(\mu - \frac{1}{4}, Q_\ell) \ \leq \ w_\ell(\mu) + \frac{1}{12} \ln \mu + C$$

Lemme

$\exists C > 1$ t. q. $\forall \mu >> 1$ and $\forall \ell \in X_\mu$,

$$w_\ell(\mu) - \pi \ \leq \ \pi N(\mu - \frac{1}{4}, Q_\ell) \ \leq \ w_\ell(\mu) + \frac{1}{12} \ln \mu + C$$

$$w_\ell(\mu) \ = \ \int_{\alpha^2}^{+\infty} \left[\mu - \frac{(\ell + \xi)^2}{L^2} e^{2t} \right]_+^{1/2} dt$$

$$X_\mu = \{ \ell \ / \ e^{\alpha^2} \frac{|\ell + \xi|}{L} < \sqrt{\mu - 1/4} - b \ \} \ .$$

- Lemme

  $\exists C > 1$ t. q. $\forall \mu >> 1$ and $\forall \ell \in X_\mu$,

  $$w_\ell(\mu) - \pi \ \leq \ \pi N(\mu - \frac{1}{4}, Q_\ell) \ \leq \ w_\ell(\mu) + \frac{1}{12} \ln \mu + C$$

$$w_\ell(\mu) \ = \ \int_{\alpha^2}^{+\infty} \left[\mu - \frac{(\ell+\xi)^2}{L^2} e^{2t} \right]_+^{1/2} dt$$

$$X_\mu = \{ \ell \ / \ e^{\alpha^2} \frac{|\ell + \xi|}{L} < \sqrt{\mu - 1/4} - b \ \} \ .$$

- Preuve du Lemme (méthode de Titchmarsh)
  - $V_\ell := \frac{(\ell+\xi)^2}{L^2} e^{2t}$. ϕ_μ^ℓ : solution de $Q_\ell \phi = (\mu - \frac{1}{4})\phi$.
  - On considère x_ℓ and y_ℓ t.q. $V_\ell(x_\ell) = \mu$ et $V_\ell(y_\ell) = \nu$, $0 < \nu < \mu$ à déterminer.
  - n (resp. m): nombre de zeros de ϕ_μ^ℓ sur $]\alpha^2, x_\ell[$ (resp. sur $]\alpha^2, y_\ell[$)
  - rappel: $n = N(\mu - \frac{1}{4}, Q_\ell)$.

(Lemme de Titchmarsh)

$$m\pi = \int_{\alpha^2}^{y_\ell} [\mu - V_\ell]^{1/2}\, dt + R_\ell$$

avec $\quad R_\ell \leq \frac{1}{4}\ln(\mu - V_\ell(\alpha^2)) - \frac{1}{4}\ln(\mu - V_\ell(y_\ell)) + \pi$,

$$\Longrightarrow \left|n\pi - \int_{\alpha^2}^{x_\ell} [\mu - V_\ell]^{1/2}\, dt\right| \leq (x_\ell - y_\ell)(\mu - \nu)^{1/2} + R_\ell + (n - m)\pi$$

(Lemme de Titchmarsh)

$m\pi = \int_{\alpha^2}^{y_\ell} [\mu - V_\ell]^{1/2}\, dt + R_\ell$

avec $\quad R_\ell \leq \frac{1}{4}\ln(\mu - V_\ell(\alpha^2)) - \frac{1}{4}\ln(\mu - V_\ell(y_\ell)) + \pi$,

$$\Longrightarrow |n\pi - \int_{\alpha^2}^{x_\ell} [\mu - V_\ell]^{1/2}\, dt| \leq (x_\ell - y_\ell)(\mu - \nu)^{1/2} + R_\ell + (n-m)\pi$$

th. de comparaison de Sturm $\Longrightarrow (n-m)\pi \ \leq\ (x_\ell - y_\ell)(\mu - \nu)^{1/2} + \pi$

Donc $\quad$ puisque $x_\ell - y_\ell = \ (1/2)\ln(\frac{\mu}{\nu})$

$$|n\pi - \int_{\alpha^2}^{x_\ell} [\mu - V_\ell]^{1/2}\, dt| \leq \ln(\frac{\mu}{\nu})(\mu - \nu)^{1/2} + \frac{1}{4}\ln\mu - \frac{1}{4}\ln(\mu - \nu) + 2\pi$$

On prend $\nu = \mu - \mu^{2/3}$ et on obtient le Lemme.

- Il reste à calculer $\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} w_\ell(\mu)$ avec

$$w_\ell(\mu) = \int_{\alpha^2}^{+\infty} \left[\mu - \frac{(\ell+\xi)^2}{L^2} e^{2t}\right]_+^{1/2} dt.$$

- Il reste à calculer $\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} w_\ell(\mu)$ avec

$$w_\ell(\mu) \;=\; \int_{\alpha^2}^{+\infty} \left[\mu - \frac{(\ell+\xi)^2}{L^2} e^{2t}\right]_+^{1/2} dt.$$

- $\Longrightarrow$ il suffit d'estimer $\mathcal{I} = \displaystyle\int_{\alpha^2}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \left[\mu - \frac{(x+\xi)^2}{L^2} e^{2t}\right]_+^{1/2} dx dt$,
- $\mathcal{I}$ est équivalent à $\mu L e^{-\alpha^2} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left[1 - x^2\right]_+^{1/2} dx$
- On utilise $|M| = 2\pi L e^{-\alpha^2}$ pour conclure.

Preuve des théorèmes 4-5

- $\mathrm{sp}_{\mathrm{ess}}(-\Delta_A) = \bigcup_{j=1}^{J} \mathrm{sp}_{\mathrm{ess}}(-\Delta_A^{M_j, D})$ (Le spectre essentiel d'un opérateur elliptique sur une variété est invariant par perturbation compacte)
  - $-\Delta_A^{M_j, D}$: l' opérateur auto-adjoint sur $L^2(M_j)$ associé à $-\Delta_A$ avec les conditions de Dirichlet sur la frontière ∂M_j de M_j.

Preuve des théorèmes 4-5

- $\mathrm{sp}_{\mathrm{ess}}(-\Delta_A) = \bigcup_{j=1}^{J} \mathrm{sp}_{\mathrm{ess}}(-\Delta_A^{M_j,D})$ (Le spectre essentiel d'un opérateur elliptique sur une variété est invariant par perturbation compacte)
  - $-\Delta_A^{M_j,D}$: l' opérateur auto-adjoint sur $L^2(M_j)$ associé à $-\Delta_A$ avec les conditions de Dirichlet sur la frontière ∂M_j de M_j.

- On considère $M_j = X_j \times]a_j^2, +\infty[$ muni de la métrique $ds_j^2 = y^{-2\delta_j}(\mathbf{h}_j + dy^2) \; ; \quad (1/n < \delta_j \leq 1)$.
  - Alors pour tout $u \in C^2(M_j)$, $-\Delta_A^{M_j,D} u = -y^{2\delta_j} \Delta_{A_j}^{X_j} u - y^{n\delta_j} \partial_y (y^{(2-n)\delta_j} \partial_y u)$,
  - $\Delta_{A_j}^{X_j}$ est le laplacien magnétique sur X_j :
  - si en coordonnées locales $\mathbf{h}_j = \sum_{k,\ell} G_{k\ell}\, dx_k dx_\ell$ et $A_j = \sum_{k=1}^{n-1} a_{j,k}\, dx_k$, alors $-\Delta_{A_j}^{X_j} = \frac{1}{\sqrt{det(G)}} \sum_{k,\ell} (i\partial_{x_k} + a_{j,k}) \left(\sqrt{det(G)} G^{k\ell} (i\partial_{x_\ell} + a_{j,\ell}) \right)$.

- on fait le changement de variables $y = e^t$,
- on définit l'opérateur unitaire $U : L^2(X_j \times]2\ln(a_j), +\infty[) \longrightarrow L^2(M_j)$ $U(f) := y^{(n\delta_j - 1)/2} f$.
- $-U^\star \Delta_A^{M_j, D} U f =$
$$-e^{2\delta_j t} \Delta_{A_j}^{X_j} f + \frac{(n\delta_j - 1)[3 + \delta_j(n-4)]}{4} e^{2t(\delta_j - 1)} f - \partial_t(e^{2t(\delta_j - 1)} \partial_t f) \; .$$

- on fait le changement de variables $y = e^t$,
- on définit l'opérateur unitaire $U : L^2(X_j \times]2\ln(a_j), +\infty[) \;\rightarrow\; L^2(M_j)$ $U(f) := y^{(n\delta_j - 1)/2} f$.
- $-U^\star \Delta_A^{M_j,D} U f =$
$$-e^{2\delta_j t} \Delta_{A_j}^{X_j} f + \frac{(n\delta_j - 1)[3 + \delta_j(n-4)]}{4} e^{2t(\delta_j - 1)} f - \partial_t(e^{2t(\delta_j-1)} \partial_t f) \; .$$

- $(\mu_\ell(j))_{\ell \in \mathbb{N}}$: la suite croissante de v.p. de $-\Delta_{A_j}^{X_j}$
- $\mathrm{sp}(-\Delta_A^{M_j,D}) \;=\; \mathrm{sp}(\bigoplus_{\ell=0}^{+\infty} L_{j,\ell}^D) \; ,$
- $L_{j,\ell}^D$: l'opérateur de Dirichlet sur $L^2(]2\ln(a_j), +\infty[)$ associé à $L_{j,\ell} \;=\; e^{2\delta_j t} \mu_\ell(j) \;+\; \frac{(n\delta_j - 1)}{4}[3 + \delta_j(n-4)] e^{2t(\delta_j-1)} \;-\; \partial_t(e^{2t(\delta_j-1)} \partial_t) \; .$

- Si $\mu_\ell(j) = 0$ alors $\mathrm{sp}(L^D_{j,\ell}) = \mathrm{sp}_{\mathrm{ess}}(L^D_{j,\ell}) = [\alpha_n, +\infty[$,
  - $\alpha_n = 0$ si $\delta_j < 1$,
  - $\alpha_n = (n-1)^2/4$ si $\delta_j = 1$.
- $A = 0, \Longrightarrow \mu_0(j) = 0 \Longrightarrow \mathrm{sp}_{\mathrm{ess}}(-\Delta_0) = [\alpha_n, +\infty[$.

- Si $\mu_\ell(j) = 0$ alors $\mathrm{sp}(L^D_{j,\ell}) = \mathrm{sp}_{\mathrm{ess}}(L^D_{j,\ell}) = [\alpha_n, +\infty[$,
  - $\alpha_n = 0$ si $\delta_j < 1$,
  - $\alpha_n = (n-1)^2/4$ si $\delta_j = 1$.
- $A = 0, \Longrightarrow \mu_0(j) = 0 \Longrightarrow \mathrm{sp}_{\mathrm{ess}}(-\Delta_0) = [\alpha_n, +\infty[$.
- Si $\mu_\ell(j) > 0$ alors $\mathrm{sp}(L^D_{j,\ell}) = \mathrm{sp}_d(L^D_{j,\ell}) = \{\mu_{\ell,k}(j);\ k \in \mathbb{N}\}$,
  - $(\mu_{\ell,k}(j))_{k\in\mathbb{N}}$ la suite croissante des v.p. de $L^D_{j,\ell}$, $\lim\limits_{k\to+\infty} \mu_{\ell,k}(j) = +\infty$.
- Si A satisfait aux hyp. précédentes, alors $0 < \mu_0(j) \leq \mu_\ell(j)$ pour tout j et ℓ, , $\Longrightarrow$
  - $\mathrm{sp}(-\Delta_A^{M_j,D}) = \{\mu_{\ell,k}(j);\ (\ell,k) \in \mathbb{N}^2\}$.
  - $\lim\limits_{\ell\to+\infty} \mu_{\ell,k}(j) = +\infty, \Longrightarrow$ les $\mu_{\ell,k}(j)$ sont des v.p. de $-\Delta_A^{M_j,D}$ de multiplicité finie
    $\Longrightarrow \mathrm{sp}(-\Delta_A^{M_j,D}) = \mathrm{sp}_d(-\Delta_A^{M_j,D}) \Longrightarrow \mathrm{sp}_{\mathrm{ess}}(-\Delta_A) = \emptyset$ $\square$

Preuve du Th 6

$\Longrightarrow$ on veut prouver la formule de Weyl pour M_j, avec $-\Delta_A^{M_j,D}$ à la place de $-\Delta_A$.

- $\delta_j = 1 \Longrightarrow$ changement de variables et de fonctions précédent
- $1/n < \delta_j < 1$, $\Longrightarrow$ on pose $y = [(1-\delta_j)t]^{1/(1-\delta_j)}$, et on définit l'opérateur unitaire

  $U\ :\ L^2(X_j \times]\alpha_j, +\infty[)\ \to\ L^2(M_j)$, ($\alpha_j = \frac{a_j^{2(1-\delta_j)}}{1-\delta_j}$)

  $U(f) = y^{(n-1)\delta_j/2} f$.

  - $\mathrm{sp}(-\Delta_A^{M_j,D})\ =\ \mathrm{sp}(\bigoplus_{\ell=0}^{+\infty} L_{j,\ell}^D)$,

Preuve du Th 6

$\Longrightarrow$ on veut prouver la formule de Weyl pour M_j, avec $-\Delta_A^{M_j,D}$ à la place de $-\Delta_A$.

- $\delta_j = 1 \Longrightarrow$ changement de variables et de fonctions précédent
- $1/n < \delta_j < 1$, $\Longrightarrow$ on pose $y = [(1-\delta_j)t]^{1/(1-\delta_j)}$, et on définit l'opérateur unitaire

  $U: L^2(X_j \times]\alpha_j, +\infty[) \rightarrow L^2(M_j)$, ($\alpha_j = \frac{a_j^{2(1-\delta_j)}}{1-\delta_j}$)

  $U(f) = y^{(n-1)\delta_j/2} f$.

  - $\mathrm{sp}(-\Delta_A^{M_j,D}) = \mathrm{sp}(\bigoplus_{\ell=0}^{+\infty} L_{j,\ell}^D)$,

- $L_{j,\ell}^D$: l'opérateur de Dirichlet sur $L^2(]\frac{a^{2(1-\delta_j)}}{1-\delta_j}, +\infty[)$ associé à

$$L_{j,\ell} = V_{j,\ell} - \partial_t^2 .$$

$$V_{j,\ell}(t) = \mu_\ell(j)[(1-\delta_j)t]^{\frac{2\delta_j}{1-\delta_j}} + \frac{(n-1)\delta_j[(n-3)\delta_j+2]}{4(1-\delta_j)^2 t^2}$$

- Méthode de Titchmarsh $\Longrightarrow$ il existe $C > 1$ t.q. $\forall \lambda >> 1$ $\forall \ell \in K_\lambda = \{l \in \mathbb{N};\ \mu_\ell(j) \in [0, \lambda/a_j^2[\}$,
$$|N(\lambda, L^D_{j,\ell})\ -\ \frac{1}{\pi} w_{j,\ell}(\lambda)|\ \leq\ C \ln(\lambda)$$, avec
$$w_{j,\ell}(\mu)\ =\ \int_{\alpha_j}^{+\infty} [\mu - V_{j,\ell}(t)]_+^{1/2}\, dt$$

- Méthode de Titchmarsh $\Longrightarrow$ il existe $C > 1$ t.q. $\forall \lambda >> 1$
  $\forall \ell \in K_\lambda = \{l \in \mathbb{N};\ \mu_\ell(j) \in [0, \lambda/a_j^2[\}$,
  $|N(\lambda, L_{j,\ell}^D) \ - \ \frac{1}{\pi} w_{j,\ell}(\lambda)| \ \leq \ C \ln(\lambda)$, avec
  $w_{j,\ell}(\mu) \ = \ \int_{\alpha_j}^{+\infty} [\mu - V_{j,\ell}(t)]_+^{1/2} \, dt$
- On utilise
  - la formule asymptotique de Weyl de L. Hörmander (SAWFH)
  - + le fait que $N(\lambda, L_{j,\ell}^D) = 0$ quand $\ell \ \notin \ K_\lambda$,
  - + la formule $N(\lambda, -\Delta_A^{M_j, D}) \ = \ \sum_{\ell=0}^{+\infty} N(\lambda, L_{j,\ell}^D)$
- et on obtient
  $|N(\lambda, -\Delta_A^{M_j, D}) \ - \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\pi} w_{j,\ell}(\lambda)| \ \leq \ C \lambda^{(n-1)/2} \ln(\lambda)$.
- (SAWFH) Il existe $C > 0$ t.q. pour tout $\mu >> 1$
  $|N(\mu, -\Delta_{A_j}^{\mathbf{X}_j}) \ - \ \frac{\omega_{n-1}}{(2\pi)^{n-1}} |\mathbf{X}_j| \mu^{(n-1)/2}| \ \leq \ C \mu^{(n-2)/2}$.

Estimation de $\Theta_j(\lambda) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\pi} w_{j,\ell}(\lambda)$

- On écrit $V_{j,\ell}(t) = \mu_\ell(j) V_j(t) + W_j(t)$
- $\Longrightarrow \Theta_j(\lambda) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{\alpha_j}^{T_j(\lambda)} V_j^{1/2}(t) R_j\left(\frac{\lambda - W_j(t)}{V_j(t)}\right) dt$. avec
- $R_j(\mu) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} [\mu - \mu_\ell(j)]_+^{1/2}$.

Estimation de $\Theta_j(\lambda) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\pi} w_{j,\ell}(\lambda)$

- On écrit $V_{j,\ell}(t) = \mu_\ell(j) V_j(t) + W_j(t)$
- $\Longrightarrow \Theta_j(\lambda) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{\alpha_j}^{T_j(\lambda)} V_j^{1/2}(t) R_j\left(\frac{\lambda - W_j(t)}{V_j(t)}\right) dt$. avec
- $R_j(\mu) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} [\mu - \mu_\ell(j)]_+^{1/2}$.

- On utilise ensuite
  - (SAWFH) et
  - $R_j(\mu) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^{+\infty} [\mu - s]_+^{-1/2} N(s, -\Delta_{A_j}^{X_j}) ds,$

  et on obtient que
- $\exists\, C > 0$ t.q., pour tout $\mu >> 1$,

  $$|R_j(\mu) - \frac{\omega_{n-1}}{2(2\pi)^{n-1}} |X_j| \int_0^{+\infty} [\mu - s]_+^{-1/2} s^{(n-1)/2} ds| \leq C\mu^{(n-1)/2} .$$
- on conclut en utilisant les expressions de V_j et de W_j.

Preuve du Th 7

- Proposition 1 Si A satisfait les hypothèses (A) and si A_j vérifie la propriété (P) pour tout $j \in \{1, \dots, J\}$, , alors quand $\lambda \to +\infty$,

$$N(\lambda, -\Delta_{(\lambda^{-\rho} A)}) \; = \; |\mathcal{M}| \frac{\omega_n}{(2\pi)^n} \lambda^{n/2} \; + \; \mathbf{O}(r_0(\lambda)) \; ,$$

avec $\rho \; = \begin{cases} 1/2, & \text{if} \quad 2/n \leq \delta \leq 1 \\ (n\delta - 1)/2, & \text{if} \quad 1/n < \delta < 2/n \end{cases}$

Preuve du Th 7

- Proposition 1 Si A satisfait les hypothèses (A) and si A_j vérifie la propriété (P) pour tout $j \in \{1,\ldots,J\}$, , alors quand $\lambda \to +\infty$,

$$N(\lambda, -\Delta_{(\lambda^{-\rho}A)}) \;=\; |\mathcal{M}|\frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\lambda^{n/2} \;+\; \mathbf{O}(r_0(\lambda))\;,$$

avec $\rho \;=\begin{cases} 1/2, & \text{if} \quad 2/n \leq \delta \leq 1 \\ (n\delta - 1)/2, & \text{if} \quad 1/n < \delta < 2/n \end{cases}$

- Propriété (P)
  Il existe $\tau_0 = \tau_0(A_j) > 0$ et $C = C(A_j) > 0$ t.q., si $e(\tau, j)$ désigne la 1ere v.p. de $-\Delta^{X_j}_{\tau A_j}$, alors
  $e(\tau, j) \;\geq\; C\tau^2 \;; \quad \forall\, \tau \in]0, \tau_0]\;.$

- Proposition 2 $\forall j \in \{1,\ldots,J\}$, il existe une 1-forme A_j vérifiant (A) et (P).

Preuve de la Proposition 1

- A satisfait (P) $\Longrightarrow C/\lambda^{2\rho} \leq \mu_0(j) \quad \text{and} \quad C \leq \mu_1(j)$.
  - $(\mu_\ell(j))_{\ell\in\mathbb{N}}$: la suite croissante de v.p. de $-\Delta^{X_j}_{\lambda^{-\rho}A_j}$.
- on adapte la preuve du Th. 6.
  - la méthode de Titchmarsh reste valable pour tout $\ell \in K_\lambda, \ell \neq 0$
  - il reste à prouver que $N(\lambda, L^D_{j,0}) \ = \ \mathbf{O}(r_0(\lambda))$.

Preuve de la Proposition 1

- A satisfait (P) $\Longrightarrow C/\lambda^{2\rho} \leq \mu_0(j) \quad \text{and} \quad C \leq \mu_1(j)$.
  - $(\mu_\ell(j))_{\ell\in\mathbb{N}}$: la suite croissante de v.p. de $-\Delta^{X_j}_{\lambda^{-\rho}A_j}$.
- on adapte la preuve du Th. 6.
  - la méthode de Titchmarsh reste valable pour tout $\ell \in K_\lambda, \ell \neq 0$
  - il reste à prouver que $N(\lambda, L^D_{j,0}) \; = \; \mathbf{O}(r_0(\lambda))$.

- $\delta_j = 1 \; (\rho = 1/2) \Longrightarrow N(\lambda, L^D_{j,0}) \; \leq \; N(\lambda + C, L^{D,\lambda}) \; \leq \; C\lambda^{1/2}\ln(\lambda)$,
  où $L^{D,\lambda}$ est l' opérateur de Dirichlet sur $]0, +\infty[$ associé à $\dfrac{C}{\lambda}e^{2t} - \partial_t^2$.
- $0 < \delta_j < 1 \Longrightarrow$
  $N(\lambda, L^D_{j,0}) \; \leq \; N((\lambda + C)^{1+2\rho(1-\delta_j)}, L^D) \; \leq \; C\lambda^{(1+2\rho(1-\delta_j))/(2\delta_j)}$, où
  L^D est l' opérateur de Dirichlet sur $]0, +\infty[$ associé à $\dfrac{1}{C^2}t^{\frac{2\delta_j}{1-\delta_j}} - \partial_t^2$.

- On prend une 1-forme A satisfaisant (A) and (P).
- si u est une fonction propre de $-\Delta$ sur $\mathcal{M}$ associée à une v. p. appartenant à $]\inf \mathrm{sp}_{\mathrm{ess}}(-\Delta), +\infty[$, elle vérifie
$$\forall j = 1, \ldots, J, \quad \int_{X_j} u(x_j, y) dx_j = 0 \,, \quad \forall y \in]a_j^2, +\infty[\,,$$
- cela implique que
  - $\|u\|^2_{L^2(X_j)} \leq \dfrac{1}{\mu_1(j)} \|idu\|^2_{L^2(X_j)} \,, \Longrightarrow$
  - $\|idu + \tau u A\|^2_{L^2(\mathcal{M})} \ \leq \ (1 + \tau C_A) \|idu\|^2_{L^2(\mathcal{M})} + C_A \|u\|^2_{L^2(\mathcal{M})} \,.$
- H_λ:= le sous-espace de $L^2(\mathcal{M})$ engendré par les fonctions propres de $-\Delta$ associées aux v.p. appartenant à $]0, +\lambda[$. On pose $\tau = 1/\lambda^\rho$,

- On prend une 1-forme A satisfaisant (A) and (P).
- si u est une fonction propre de $-\Delta$ sur $\mathcal{M}$ associée à une v. p. appartenant à $]\inf \mathrm{sp}_{\mathrm{ess}}(-\Delta), +\infty[$, elle vérifie
$$\forall j = 1, \ldots, J, \quad \int_{X_j} u(x_j, y)dx_j = 0 \, , \quad \forall y \in]a_j^2, +\infty[\, ,$$
- cela implique que
  - $\|u\|^2_{L^2(X_j)} \leq \dfrac{1}{\mu_1(j)} \|idu\|^2_{L^2(X_j)} \, , \Longrightarrow$
  - $\|idu + \tau uA\|^2_{L^2(\mathcal{M})} \ \leq \ (1 + \tau C_A)\|idu\|^2_{L^2(\mathcal{M})} + C_A\|u\|^2_{L^2(\mathcal{M})} \, .$
- H_λ:= le sous-espace de $L^2(\mathcal{M})$ engendré par les fonctions propres de $-\Delta$ associées aux v.p. appartenant à $]0, +\lambda[$. On pose $\tau = 1/\lambda^\rho$,
- $\forall u \in H_\lambda, \quad \|idu + \dfrac{1}{\lambda^\rho} uA\|^2_{L^2(\mathcal{M})} \ \leq \ (1 + \dfrac{C_A}{\lambda^\rho})\|du\|^2_{L^2(\mathcal{M})} + C_A\|u\|^2_{L^2(\mathcal{M})}$
$\Longrightarrow$
$$dim(H_\lambda) \ \leq \ N((1 + \frac{C_A}{\lambda^\rho})\lambda + C_A, -\Delta_{(\lambda^{-\rho} A)}) \, .$$
- on remarque enfin que $\lambda^{n/2}/\lambda^\rho = \mathbf{O}(r_0(\lambda))$