Licence économie et gestion AEM

Modélisation macroéconomique

3ème année
Examen du 18 Mai 2009

Exercice 1

On considère le système différentiel (S) suivant :

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t)\, y(t) - 3 \\ y'(t) &= x^2(t) - 9\, y(t) \end{cases}$$

Quel est l'équilibre ? Etudier sa stabilité , donner sa nature.

Exercice 2

On étudie une économie "de pure accumulation" comportant 2 biens 1 et 2 dont les fonctions de production $Y_1(t)$ et $Y_2(t)$ sont données par :

$$Y_1(t) = 0,2\ K_1(t)^{1/2}\ K_2(t)^{1/4}\ ,$$

$$Y_2(t) = 0,3\ K_1(t)^{1/3}\ K_2(t)^{1/3}\ .$$

$Y_i(t)$ représente la quantité produite de bien i, alors que $K_i(t)$ est la quantité de bien i entrant comme capital dans la production.

L'évolution de $Y_i(t)$ et celle de $K_i(t)$ sont reliées par :

$$K_i'(t) = Y_i(t) - c_i\ K_i(t)\ ,$$

où les c_i sont les coefficients de dépréciation du capital pour le bien i.

On suppose $c_1 = 0,2$ et $c_2 = 0,3$.

1) Ecrire le système décrivant l'évolution des $K_i(t)$ en éliminant les $Y_i(t)$.

2) Quels sont les équilibres ?

3) Etudier la stabilité et la nature (foyer, centre,noeud, col) de chacun de ces équilibres.

Exercice 3

On considère une version simplifiée du modèle de Ramsey-Cass-Koopman (1965) qui est la suivante :

$$\begin{cases} k'(t) &= a\sqrt{k(t)} - c(t) \\ c'(t) &= c(t)[\ b - \frac{1}{\sqrt{k(t)}}\ ] \end{cases}$$

$k(t)$ est le capital par tête, $c(t)$ la consommation par tête, a et b sont des coefficients strictement positifs.

1) Montrer qu'il existe un équilibre unique A, dont on donnera les coordonnées en fonction de a et b.

2) Montrer que A est instable (en utilisant un critère)

3) Ecrire la condition sur a pour laquelle cet équilibre est un foyer.

Exercice 4, FACULTATIF, hors barême

Une entreprise qui détient le monopole sur un marché, fait varier la production du bien qu'elle produit selon la règle :

$$q'(t) \; = k[\Pi'(q)] \; (t) \quad \text{avec} \quad \mathrm{k} > 0 \; .$$

(Par exemple, si $\Pi(q)$ était la fonction $q - q^2$, l'équation ci-dessus deviendrait :

$$q'(t) \; = k[1 - 2q(t)] \;).$$

$\Pi(q)$ est le profit procuré par la production q , et on suppose que $\Pi(q)$ est une fonction deux fois dérivable, de dérivée seconde continue.

Montrer que s'il existe une production $q*$ donnant un profit maximum strict, alors $q*$ est un équilibre localement stable.