SYSTEMES DIFFERENTIELS NON LINEAIRES

Françoise Truc

October 21, 2010

1 Définitions et propriétés

Définition 1.1 *On appelle système différentiel non linéaire tout système de la forme*

$$\dot{X}\ (t) = F[X(t)]\ . \tag{1}$$

t désigne une variable réelle ,

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ ... \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ ... \\ f_n(x) \end{pmatrix} \quad ,$$

les f_i sont des fonctions de la variable x définies et continues sur un ouvert E de $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Le point au dessus de $X(t)$ est une notation pour la dérivée première .

Définition 1.2 *Soit*

$$X\ : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$t \longrightarrow x(t)\ .$$

On dit que X est solution du système (1) sur l'intervalle I dans E si

1) X est continue et dérivable sur I

2) pour tout $t \in I$, $X(t) \in E$

3) $\dot{X}\ (t) = F[X(t)]$.

Si $0 \in I$ on peut également faire appel à une forme intégrale pour écrire le système :

Proposition 1.3 *Si $0 \in I$, dire que X vérifie (1) revient à dire qu'il vérifie*

$$X(t) - X(0) = \int_0^t F[X(s)]\ ds\ , \tag{2}$$

ou encore

$$x_i(t) - x_i(0) = \int_0^t f_i[(x_1(s), ...x_n(s)]\ ds\ , \quad 1 \le i \le n \tag{3}$$

Remarque 1.4 *On utilisera souvent la norme suivante :*

$$N(x_1, ...x_n) := \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|) \ .$$

2 Unicité de la solution

2.1 Lemme de Gronwall

Theorème 2.1 *On considère une fonction*

$$u : I = [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

telle que

$$u(t) \leq a + b \int_{t_0}^{t} u(s) ds \ ,$$

(a réel quelconque et b réel strictement positif). Alors

$$u(t) \leq a e^{b(t-t_0)}, \quad \forall t \in [t_0, t_1] \ .$$

Définition 2.2 *On appelle condition initiale un point de* $I \times \mathbf{R^n}$ *de la forme :* (t_0, X_0) *avec* $X_0 = (y_1, ..., y_n)$*. Résoudre le système pour une condition initiale donnée c'est chercher une solution* $X(t)$ *telle que :* $\forall i \in \{1, n\}$ *:* $x_i(t_0) = y_i$*.*

2.2 Unicité de la solution

Theorème 2.3 *Supposons F continument dérivable sur un ouvert E de* $\mathbb{R}^n$*. Alors pour tout choix de conditions initiales tel que* $t_0 \in I$ *et* $X_0 \in E$*, la solution du système (1) sur I dans E est unique si elle existe.*

Ce théorème s'obtient en utilisant le lemme de Gronwall.

3 Existence de la solution

3.1 Existence locale de la solution

Theorème 3.1 *Soient* $t_0 = \in \mathbb{R}$ *et* $X_0 \in \mathbb{R}^n$ *. Si F est continument dérivable sur un voisinage de* X_0*, il existe* $h > 0$ *tel que la solution du système (1) vérifiant* $X(t_0) = X_0$ *existe sur l'intervalle* $[t_0, t_0 + h]$ *.*

3.2 Existence globale de la solution

Theorème 3.2 *Si F est continument dérivable sur* $\mathbb{R}^n$ *et si la solution dans* $\mathbb{R}^n$ *du système (1) vérifiant* $X(0) = X_0$ *reste bornée sur tout intervalle borné où elle existe, alors cette solution existe sur* $I = [0, +\infty]$*.*

Theoreme 3.3 *Soit F continument dérivable sur un ouvert E de $\mathbb{R}^n$ et soit A un compact de $\mathbb{R}^n$ inclus dans E. Si la solution dans $\mathbb{R}^n$ du système (1) vérifiant $X(0) = X_0$ reste dans A sur tout intervalle borné où elle existe, alors cette solution existe sur $I = [0, +\infty]$ et appartient à A pour tout $t > 0$.*

3.3 Critères d'existence globale

Theoreme 3.4 (Critère 1) *Soient a et b deux réels. Si F est continument dérivable sur $\mathbb{R}^n$ et vérifie*

$$\forall X = (x_1, ...x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i f_i(X) \leq a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \ , \tag{4}$$

alors pour tout $X_0 \in \mathbb{R}^n$, la solution du système (1) vérifiant $X(0) = X_0$ existe sur $I = [0, +\infty]$.

Theoreme 3.5 (Critère 2) *Soient a et b deux réels positifs. Si F est continument dérivable sur $\mathbb{R}^n$ et vérifie*

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, \quad N(F(X)) \leq aN(X) + b \ , \tag{5}$$

alors pour tout $X_0 \in \mathbb{R}^n$, la solution du système (1) vérifiant $X(0) = X_0$ existe sur $I = [0, +\infty]$.

Solutions positives

Dans de nombreux modèles économiques seules les solutions dans $(\mathbb{R}_+^*)^n$ sont admissibles , ce qui rend intéressant le critère suivant :

Theoreme 3.6 (Critère 3) *Soient a, b, $\alpha_1, ...\ \alpha_n$ des réels positifs. Si F est continument dérivable sur $(\mathbb{R}_+^*)^n$ et vérifie*

$$\forall X = (x_1, ...x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i f_i(X) \leq a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \ , \tag{6}$$

$$\forall X = (x_1, ...x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n, \quad f_i(X) \leq -\alpha_i x_i \quad i = 1, ...n \ , \tag{7}$$

alors pour tout $X_0 \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, la solution du système (1) vérifiant $X(0) = X_0$ existe sur $I = [0, +\infty]$ et vérifie $X(t) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, pour tout $t \leq 0$.