

Examen du 5 janvier.

*Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.
Durée : 1 heure 30.*

Exercice 1.

Écrire la décomposition en facteurs premiers de 231. Énumérer tous les diviseurs de 231.

Exercice 2.

On sait que $16\,135\,407 = 4\,548 \times 3\,547 + 3\,651$. En utilisant uniquement cette information, donner :

1. le quotient et le reste de la division euclidienne de 16 135 407 par 4 548;
2. le quotient et le reste de la division euclidienne de 16 135 407 par 3 547.

Exercice 3.

1. Écrire 282 828 comme un produit de 28 par un nombre entier.
Le nombre 282 828 est-il un multiple de 7 ? Justifiez votre réponse.
2. Donner sans poser la division le reste de la division euclidienne de 282 799 par 7.

Exercice 4.

On veut paver une cour rectangulaire de longueur 1386 cm et de largeur 490 cm par des dalles identiques carrées, de manière à couvrir complètement la cour. Quelle est la longueur en centimètres du côté de la dalle la plus grande que l'on peut utiliser ? Justifiez votre réponse.

Exercice 5.

Trouver tous les entiers naturels n et m dont le PGCD vaut 4 et la somme vaut $n + m = 48$. Justifiez votre réponse.

Exercice 6. (Les trois questions sont indépendantes).

1. Voici deux propriétés concernant des nombres écrits en base dix (écritures décimales). Dire pour chacune d'elle si elle est vraie ou fausse. Vous justifierez vos réponses.

Propriété 1 : *Si l'écriture d'un nombre entier se termine par 2 alors l'écriture du carré de ce nombre se termine par 4.*

Propriété 2 : *Si l'écriture d'un nombre entier se termine par 4 alors l'écriture du carré de ce nombre se termine par 16.*

2. Soit n un entier s'écrivant $a5$ en base dix, où le chiffre des dizaines a est compris entre 1 et 9.
 - (a) Montrer que l'écriture décimale de n^2 comporte au plus quatre chiffres.
 - (b) Montrer que l'écriture décimale de n^2 se termine par 25 (2 étant le chiffre des dizaines et 5 celui des unités) et que les chiffres des milliers et des centaines sont donnés par l'écriture décimale du nombre $a^2 + a$.
3. Par quel chiffre se termine le nombre 3^{11} en base dix ? Justifiez votre réponse.

Exercice 7.

1. Écrire en base deux le nombre qui s'écrit 44 en base dix.
Écrire également ce nombre en base quatre.
2. Poser et résoudre la multiplication en base deux du nombre de la question 1 et du nombre qui s'écrit 1110 en base deux.

Exercice 8.

On donne les valeurs suivantes : $2^9 = 512$ et $3^9 = 19683$. Simplifier et donner les valeurs des nombres suivants :

$$4^5 + 2^9; \quad (-8)^5 + 2^5 \times 4^5; \quad 27^3 - (-3)^{10}; \quad 2^9 \times 5^8.$$

Exercice 9.

Les deux suites de nombres données par les deux rangées du tableau ci-dessous sont-elles proportionnelles ? Justifiez votre réponse.

5	8	13	85	170
6	9,6	15,6	102	204

Exercice 10.

À midi, l'ombre sur le sol d'un poteau vertical de 5,5 mètres de haut mesure 4,5 mètres.

1. Quelle est la mesure de l'ombre sur le sol d'un poteau vertical de 2,2 mètres de haut ?
2. Quelle est, au centimètre près, la taille d'un homme debout dont l'ombre sur le sol mesure 1,5 mètres ?
3. On dispose *horizontalement* une tige rectiligne de 6,6 mètres de long à 2 mètres du sol. Quelle est la mesure de la longueur de son ombre sur le sol ?

Exercice 11.

Un éléphant a un régime spécial et mange chaque jour une portion de carottes égale à celle que mange un lapin en un an (365 jours). Ensemble, ils mangent 111 kilos de carottes chaque jour. Combien de kilos de carottes mange le lapin par jour ?

$$\text{a) } \frac{11}{165} \quad \text{b) } \frac{37}{122} \quad \text{c) } \frac{19}{61} \quad \text{d) } \frac{22}{73} \quad \text{e) } \frac{75}{365}$$