

Devoir surveillé du mardi 7 octobre 2015, durée : 1 heure

Les calculatrices, téléphones portables et documents ne sont pas autorisées.

Autour du cours :

1. Donner les définitions de :
 - (a) l'image réciproque par la fonction f d'un intervalle $J \subset \mathbb{R}$;
 - (b) une fonction périodique;
 - (c) le supremum d'une fonction majorée.
2. Parmi les affirmations ci-dessous, donner celles qui impliquent que la fonction $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ est injective.
 - (a) tout $y \in \mathbb{R}$ a au moins un antécédent;
 - (b) $\forall x, x' \in \mathcal{D}, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$;
 - (c) $\exists x, x' \in \mathcal{D}$ tel que $f(x) = f(x')$;
 - (d) $\forall x, x' \in \mathcal{D}, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$;
 - (e) \mathcal{D} est un intervalle I de \mathbb{R} et f est strictement décroissante sur I .
3. Énoncez le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 1. Tracer les allures des graphes des fonctions suivantes (il n'est pas nécessaire de dériver) :

1. $f : x \in \mathbb{R} \mapsto (x + 1)^3$;
2. la fonction réciproque f^{-1} de la fonction f ci-dessus;
3. $g : \theta \in \mathbb{R} \mapsto \sqrt{(\sin \theta)^2}$.

Vous spécifierez le cas échéant si ces fonctions sont paires/impaires et si elles sont périodiques.

Exercice 2. 1. Donner le (plus grand) domaine de définition de la fonction tangente \tan .

2. Donner l'image par \tan de l'intervalle $[0, \frac{\pi}{4}]$.
3. Donner l'image réciproque $\tan^{-1}([0, 1])$ par \tan de l'intervalle $[0, 1]$.
4. **(Points bonus)** Justifiez rigoureusement à l'aide des théorèmes du cours vos réponses aux questions 2 et 3.

Exercice 3. Donner le plus grand domaine de définition \mathcal{D} et déterminer le tableau de variation de la fonction :

$$f : \begin{cases} \mathcal{D} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{3x^2 + x + 7}{x^2 - 1} \end{cases}$$

La fonction f est-elle bornée? Tracer l'allure du graphe de f .

Valeurs numériques indicatives : $-10 + 3\sqrt{11} \simeq -0,05$ et $-10 - 3\sqrt{11} \simeq -19,95$
 $f(-10 + 3\sqrt{11}) \simeq -6,97$ et $f(-10 - 3\sqrt{11}) \simeq 2,97$.