

Devoir surveillé du mardi 1er octobre 2013, durée : 30 minutes

Questions de cours :

1. Donner les définitions de :
 - (a) l'image d'une fonction
 - (b) l'image réciproque d'une fonction
 - (c) une fonction injective.

2. Donner toutes les valeurs réelles de θ pour lesquelles $\sin \theta$ s'annule. Même question pour $\cos \theta$ et $\tan \theta$.

Exercice 1. Donner les domaines de définition, les valeurs de x pour lesquelles les fonctions s'annulent, et tracer les allures des graphes des fonctions suivantes (il n'est pas nécessaire de dériver) :

1. $f : x \mapsto \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
2. $g : x \mapsto |x^2 - 1|$
3. $h : x \mapsto (x^2 - 1)^2$
4. la fonction réciproque $h|_{[1, \infty[}^{-1}$ de la fonction h ci-dessus restreinte à $[1, \infty[$.

Exercice 2. Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? Justifiez vos réponses.

$$g_1 : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 1 \end{cases}$$

$$g_2 : \begin{cases} [0, 2\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \theta & \mapsto & \tan \theta \end{cases}$$

$$g_3 : \begin{cases} [2, \infty[\setminus \{3\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{(x-3)^4} \end{cases} .$$

Bonus : Déterminer graphiquement ou par un calcul les images réciproques de $[1, \infty[$ par g_1 , g_2 et g_3 .

Exercice 3. Les fonctions suivantes sont-elles périodiques ? Si oui, justifier et donner une période.

$$f_1 : t \mapsto \cos(2\pi t) \quad , \quad f_2 : t \mapsto t \cos(\pi t) \quad , \quad f_3 : \theta \mapsto \left[\tan\left(\frac{\theta}{3}\right) \right]^3 .$$