

Devoir surveillé du 9 novembre 2015, durée : 2 heures

Les calculatrices, téléphones portables et documents ne sont pas autorisés.
Sujet sur feuille recto-verso.

Questions de cours :

1. Soit f une fonction réelle de domaine de définition \mathcal{D} et J un intervalle de \mathbb{R} . Donner la définition de l'image réciproque $f^{-1}(J)$ de J par f .
2. Soit t un nombre réel quelconque. Donner l'expression de x^t faisant intervenir la fonction exponentielle. Pour quelles valeurs de x cette expression a-t-elle un sens ?
3. Donner la définition des fonctions sinus, cosinus, et tangente hyperboliques \sinh , \cosh et \tanh . Vous spécifierez leurs domaines de définition. Tracer l'allure des graphes de ces 3 fonctions.
4. Donner la solution de l'équation différentielle $y'' - 16y = 0$ avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Exercice 1. On définit la fonction fraction rationnelle $f : x \mapsto \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2}$.

1. Donner le domaine de définition de f . La fonction f est-elle continue (justifiez votre réponse)?
2. Montrer que f est minorée et que son infimum vaut $\inf(f) = \frac{1}{2}$.
3. Montrer que f est majorée et que son supremum vaut $\sup(f) = 1$.

Exercice 2. Soit u un nombre réel compris entre -1 et 1 . On note \log_b le logarithme en base b . Simplifier les expressions suivantes :

$$\log_2\left(\frac{1}{32}\right), \quad \frac{81^{\frac{3}{4}}}{9^{\frac{3}{2}}}, \quad e^{3 \ln 3}, \quad \sin(\arccos u).$$

Exercice 3. 1. Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $\ln(x+2)$, $\ln(x+3)$ et $\ln|x-3|$ sont définies.

2. Résoudre l'équation

$$\ln(x+2) + \ln(x+3) = 2 \ln|x-3|.$$

Exercice 4. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(t) = 2^{(t-1)^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. Calculer la dérivée de f .
2. f est-elle paire/impaire ? Est-elle périodique ? Justifiez vos réponses.

3. Donner le tableau de variation de f .

Exercice 5. On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par

$$g(\theta) = \sin \theta - \sin^3 \theta .$$

1. La fonction g est-elle paire/impaire? Est-elle périodique? Justifiez vos réponses.
2. Montrer que $g(\pi - \theta) = g(\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.
3. Calculer la dérivée de g .
4. Déterminer tous les réels $\theta \in [0, \pi/2]$ pour lesquels la dérivée de g s'annule.
5. Donner le tableau de variation de g sur l'intervalle $[0, \pi/2]$.
Indication : $\arcsin(1/\sqrt{3}) \simeq 0,6155$ (en radians), $\pi/2 \simeq 1,5708$.
6. Tracer l'allure du graphe de g sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.