

Examen du 26 juin 2014, seconde session, durée : 3 heures

*Les calculatrices, téléphones portables et documents ne sont pas autorisés.
Vous justifierez soigneusement toutes vos réponses.*

Questions de cours :

1. Donner les primitives des fonctions $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}$, $t \mapsto e^{3t+5}$ et $\theta \mapsto \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta}$.
2. Énoncez le théorème de la bijection.
3. Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 0$ avec les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.
4. Donner la définition du produit vectoriel de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} de l'espace \mathbb{R}^3 .

Exercice 1. 1. Calculer $\sum_{k=1}^n \frac{2^k}{3^{k+1}}$ pour tout entier $n > 0$.

2. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)$ pour tout entier $n > 0$.

Exercice 2. 1. Déterminer tous les nombres complexes z tels que

- (a) $z^3 = 1 - i$
- (b) $z^4 = i$.

2. Calculer les puissances n -ièmes des nombres complexes suivants:

$$z_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i}, \quad z_2 = \frac{1 + i \tan \theta}{1 - i \tan \theta}, \quad z_3 = \exp\left(\frac{4 + 2i}{1 - i}\right)$$

où θ est un réel, $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$. Vous déterminerez les modules et arguments de z_1^n , z_2^n et z_3^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. Exprimez $\cos(4\theta)$ et $\sin(4\theta)$ en fonction de $\cos \theta$ et $\sin \theta$ et de leur puissances.

Exercice 4. Calculer l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \cos^3 \theta \, d\theta.$$

Exercice 5. 1. Trouver les racines réelles et factoriser sur \mathbb{R} le polynôme $X^5 + 2X^4 - X^3 - 2X^2$.

2. Décomposer en éléments simples sur \mathbb{R} la fonction fraction rationnelle

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^5 + 2x^4 - x^3 - 2x^2} .$$

3. Déterminer une primitive de f .

Exercice 6. En utilisant une intégration par parties, calculer pour tout entier $n \geq 0$ et tout réel $x > 0$ la valeur de l'intégrale

$$\int_1^x t^n \ln(t) dt .$$