Séminaire BOURBAKI
47ème année, 1994-95, n° 792

Novembre 1994

LA RENAISSANCE DES OPÉRADES

par **Jean-Louis LODAY**

INTRODUCTION

Soit V un espace vectoriel de base $\{x_1, \ldots, x_n\}$, $S(V)$ l'algèbre symétrique sur V (i.e. algèbre de polynômes en les x_i) et $\Lambda(V)$ l'algèbre extérieure sur V (i.e. $x_i x_j = -x_j x_i$), considérée comme une algèbre graduée. On sait que l'espace vectoriel gradué $S(V) \otimes \Lambda(V^*)$ peut être muni d'une différentielle de degré -1 qui en fait un complexe de chaînes acyclique. C'est l'exemple le plus simple d'un complexe de Koszul. En 1972 S. Priddy [P] a montré que certaines algèbres associatives quadratiques A avaient, comme $S(V)$, un dual $A^!$ ($= \Lambda(V^*)$ dans notre exemple), tel que sur $A \otimes A^!$ il existe une différentielle qui en fait un complexe acyclique. Ce sont les *algèbres de Koszul*.

Une telle dualité était déjà bien connue pour les algèbres de Lie et les algèbres commutatives : c'est la dualité de Quillen (qui échange algèbres commutatives différentielles graduées et algèbres de Lie différentielles graduées) employée avec succès en homotopie rationnelle [Q]. Stimulés par les travaux de Maxim Kontsevich [K], V. Ginzburg et M. Kapranov viennent de montrer qu'on peut construire une telle dualité pour d'autres types d'algèbres. Comme dans le cas des algèbres de Lie et des algèbres commutatives l'algèbre duale est, en général, d'un autre type que l'algèbre de départ.

Il faut donc expliciter ce qu'on entend par “type d'algèbres” et se donner les moyens de travailler avec. C'est ici que la notion d'*opérades* intervient.

Bien qu'on en trouve déjà trace dans l'article de Lazard [La] sur les groupes formels, l'idée de base a surtout été développée à Chicago dans les années 70 par les topologues algébristes (S. MacLane [McL], J. Stasheff [St], J.P. May [May], J.M. Boardmann, R. Vogt [BV], F.R. Cohen [Coh]) pour étudier les espaces de lacets. Au lieu de décrire un type d'algèbre par ses générateurs (les “opérations”) et ses relations (les “identités fondamentales”), on se donne a priori *toutes* les opérations que l'on peut faire sur un nombre fini de variables et *toutes* les relations entre ces opérations. Cette structure a été baptisée par J.P. May : une *opérade*. Le principal intérêt de ce point de vue est de pouvoir comparer entre eux des types d'algèbres de nature a priori différente. En d'autres termes on a une notion de *morphisme d'opérades.*

C'est dans ce contexte que V. Ginzburg et M. Kapranov ont étendu la dualité de Koszul : une opérade quadratique $\mathcal{P}$ admet une opérade duale $\mathcal{P}^!$ et, lorsque le "bar-complexe" de $\mathcal{P}$ est quasi-isomorphe à $\mathcal{P}^!$, l'opérade est dite *de Koszul.* Le dual d'une $\mathcal{P}$-algèbre quadratique est une $\mathcal{P}^!$-algèbre et on peut alors faire une théorie de la dualité de Koszul pour ces algèbres. Pour les opérades **As**, **Lie** et **Com** correspondant respectivement aux algèbres associatives, aux algèbres de Lie et aux algèbres commutatives, on trouve

$$\mathbf{As}^! = \mathbf{As}, \quad \mathbf{Lie}^! = \mathbf{Com}, \quad \mathbf{Com}^! = \mathbf{Lie}.$$

Les résultats de Priddy et de Quillen s'insèrent donc dans un cadre général.

L'intérêt de la dualité de Koszul pour les opérades dépasse la simple généralisation du cas des algèbres associatives. Toute étude des $\mathcal{P}$-algèbres pour une opérade de Koszul $\mathcal{P}$ fait immanquablement intervenir l'opérade duale $\mathcal{P}^!$. Par exemple la cohomologie $H^*_{\mathcal{P}}(A)$ d'une $\mathcal{P}$-algèbre A est munie d'une structure de $\mathcal{P}^!$-algèbre graduée. Ainsi plusieurs résultats récents, par exemple ceux de E. Getzler et J.D.S. Jones [GeJ], ont pour point principal la démonstration qu'une certaine opérade est de Koszul (cf. aussi [Ge1, 2, 3], [GeK2], [Lo2]). On devrait voir plusieurs autres résultats de ce type dans un proche avenir.

L'article de Ginzburg et Kapranov se présente comme une analogie par rapport à la théorie de Priddy. Mais on peut voir une opérade comme une algèbre associative dans une certaine catégorie monoïdale. Donc en fait ces deux théories sont des cas particuliers d'une théorie de la dualité de Koszul dans une catégorie monoïdale.

Signalons que la notion d'opérade joue un rôle primordial dans de nombreux autres domaines : en topologie algébrique bien sûr, mais aussi dans l'étude des espaces de modules (en liaison avec la théorie quantique des champs), dans l'étude des algèbres d'opérateurs vertex, en géométrie algébrique, en combinatoire, etc (voir la liste des références).

Dans le premier paragraphe on présente la notion d'opérade (linéaire) et on en donne des exemples. Dans le second paragraphe (indépendant du premier) on rappelle très succinctement la théorie de la dualité de Koszul pour les algèbres associatives. Dans les paragraphes 3 et 4 on expose une partie des résultats de [GK] sur la dualité de Koszul des opérades. Le paragraphe 5 indique quelques autres résultats et sujets d'actualité liés aux opérades linéaires.

Notations. Dans cet exposé $\mathbb{K}$ désigne un corps que l'on supposera de caractéristique zéro. La catégorie des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ est notée $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$, et $\otimes_{\mathbb{K}} = \otimes$. On note $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$, et le groupe des automorphismes de $[n]$ est le groupe de permutations S_n. Si V est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une action de S_n son dual linéaire $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$

est aussi un S_n-module. On note $V^\vee$ le tensorisé de V^* par la représentation signature de $S_n : V^\vee = V^* \otimes (\mathrm{sgn})$.

1. OPÉRADES $\mathbb{K}$-LINÉAIRES.

Étant donné un "type d'algèbres" $\mathcal{P}$ on considère l'espace vectoriel $\mathcal{P}(n)$ des opérations sur n variables $x_1, \ldots, x_n$. Donc pour tout $\mu \in \mathcal{P}(n)$ et tout $x_1, \ldots, x_n \in A$, où A est une algèbre de type $\mathcal{P}$, on a un élément $\mu(x_1, \ldots, x_n) \in A$. Plus précisément on a une application linéaire

$$\varphi : \mathcal{P}(n) \otimes A^{\otimes n} \longrightarrow A,\ \varphi_n(\mu; x_1, \ldots, x_n) = \mu(x_1, \ldots, x_n). \tag{1.0}$$

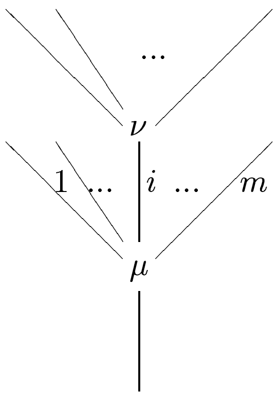
Puisque le groupe symétrique S_n opère (à gauche) sur $A^{\otimes n}$ on peut le faire opérer (à droite) sur $\mathcal{P}(n)$ de façon à ce que φ soit compatible à ces actions :

$$\mu(\sigma.(x_1, \ldots, x_n)) = \mu^\sigma(x_1, \ldots, x_n).$$

On peut *composer* les opérations de la manière suivante. Donnons nous deux opérations $\mu \in \mathcal{P}(m)$ et $\nu \in \mathcal{P}(n)$, et un entier i, $1 \leq i \leq m$. A partir des $m + n - 1$ variables $x_1, \ldots, x_{m+n-1}$ on effectue ν sur $(x_i, \ldots, x_{i+n-1})$, puis μ sur

$$(x_1, \ldots, x_{i-1}, \nu(x_i, \ldots, x_{i+n-1}), x_{i+n}, \ldots, x_{m+n-1}).$$

Ceci nous donne une nouvelle opération notée $\mu \circ_i \nu \in \mathcal{P}(m + n - 1)$.

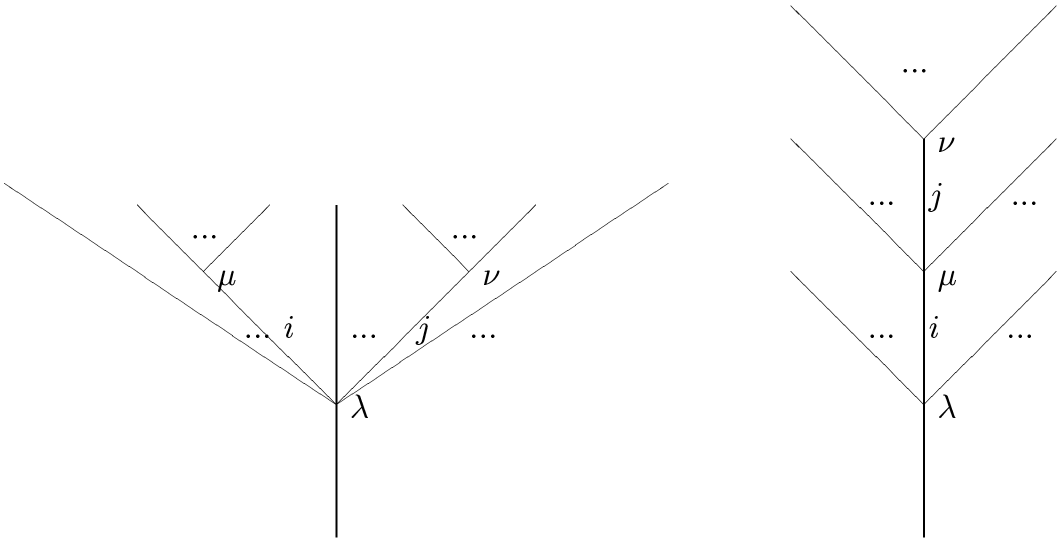


Par action sur les "feuilles"de l'arbre ci-dessus, les permutations $\pi \in S_m$ et $\rho \in S_n$ définissent $\sigma := \pi \circ_i \rho \in S_{m+n-1}$.

On a évidemment

$$(a) \qquad \mu^{\pi} \circ_{\pi(i)} \nu^{\rho} = (\mu \circ_i \nu)^{\sigma}.$$

Si on effectue deux compositions, deux cas peuvent se produire :



Dans chacun de ces cas il y a deux manières d'effectuer successivement les compositions. Chacune de ces deux manières va donner le même résultat, on a donc une propriété d' *associativité* de la composition :

pour $\lambda \in \mathcal{P}(l), \mu \in \mathcal{P}(m), \nu \in \mathcal{P}(n)$ on a

$$(b) \qquad (\lambda \circ_i \mu) \circ_{j+m-1} \nu = (\lambda \circ_j \nu) \circ_i \mu \quad \text{si} \quad 1 \leq i < j \leq l,$$

$$(c) \qquad (\lambda \circ_i \mu) \circ_{i-1+j} \nu = \lambda \circ_i (\mu \circ_j \nu) \quad \text{si} \quad 1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq m.$$

Ces propriétés indiquent qu'un parenthésage (i.e. un arbre) quelconque d'opérations donne naissance à une seule opération quelque soit l'ordre dans lequel les compositions prescrites sont effectuées.

1.1. Définitions. Une *opérade* $\mathbb{K}$-*linéaire* (sans unité) $\mathcal{P}$ est la donnée pour tout $n \geq 1$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{P}(n)$ muni d'une action de S_n, et d'applications de composition $\circ_i$ vérifiant les relations (a), (b) et (c) ci-dessus (voir 1.4 pour une définition équivalente).

La définition donnée ici est celle d'une opérade sans unité. On peut aussi définir la notion d'opérade avec unité et la notion d'opérade augmentée. Comme dans le cas des algèbres, il y a une équivalence entre opérades sans unité $\mathcal{P}$ et opérades augmentées $\mathcal{P}^+$. On a $\mathcal{P}^+(n) = \mathcal{P}(n)$ pour $n \neq 1$, et $\mathcal{P}^+(1) = \mathbb{K} \oplus \mathcal{P}(1)$.

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. L'*opérade des endomorphismes* $\mathcal{E}_V$ consiste en les espaces

$$\mathcal{E}_V(n) := \mathrm{Hom}(V^{\otimes n}, V), n \geq 1,$$

où l'action de S_n et la composition sont évidentes.

Par définition une *$\mathcal{P}$-algèbre* est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel A muni d'un morphisme d'opérade de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{E}_A$ (voir 1.0).

Par définition un *module* sur la $\mathcal{P}$-algèbre A est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel M muni, pour tout n, d'une application linéaire

$$\psi : \mathcal{P}(n) \otimes A^{\otimes n-1} \otimes M \longrightarrow M$$

compatible à l'action de $S_{n-1} \subset S_n$ et aux compositions. Une $\mathcal{P}$-algèbre est évidemment un module sur elle-même.

Pour une opérade $\mathcal{P}$ donnée les espaces $\mathcal{P}(n)$ sont reliés aux $\mathcal{P}$-algèbres libres de la manière suivante. Soit $F_{\mathcal{P}}(x_1, \ldots, x_n)$ la $\mathcal{P}$-algèbre libre sur n variables. Alors $\mathcal{P}(n)$ est, en tant que S_n-modules, la partie n-multilinéaire de $F_{\mathcal{P}}(x_1, \ldots, x_n)$.

1.2. Exemples : Voici quelques exemples d'opérades unitaires augmentées.

(a) *Algèbres associatives.* On travaille ici avec les algèbres associatives *sans* unité. L'algèbre libre sur V est l'algèbre tensorielle (sans unité)

$$T(V) = V \oplus V^{\otimes 2} \oplus \cdots \oplus V^{\otimes n} \oplus \cdots$$

Si $\dim V = n$ la partie n-multilinéaire (engendrée par les monômes à n éléments où chaque vecteur de base x_i de V apparaît une fois et une seule) de $T(V)$ a pour base les $\sigma.(x_1 \cdots x_n) = x_{\sigma^{-1}(1)} \cdots x_{\sigma^{-1}(n)}$. Ainsi l'espace $\mathbf{As}(n)$ de l'opérade $\mathbf{As}$ est isomorphe à la représentation régulière de S_n soit $\mathbf{As}(n) \cong \mathbb{K}[S_n]$. Un module au sens précédent est un bimodule au sens classique.

(b) *Algèbres commutatives* (associatives sans unité). L'opérade associée $\mathbf{Com}$ est telle que $\mathbf{Com}(n) = \mathbb{K}$ est la représentation triviale de S_n. En effet l'algèbre de polynômes sur $x_1, \ldots, x_n$ n'a qu'un générateur en dimension n ; c'est le monôme $x_1 x_2 \ldots x_n$ sur lequel S_n opère trivialement.

(c) *Algèbre de Lie.* Le crochet de Lie $[-,-]$ est une opération binaire qui vérifie

$$[x, y] = -[y, x]$$
$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0.$$

On note **Lie** l'opérade des algèbres de Lie. L'espace $\mathbf{Lie}(n)$ est le sous-espace de l'algèbre de Lie libre sur n générateurs $\{x_1, \ldots, x_n\}$ engendré par les crochets monomiaux contenant x_i une fois et une seule. La représentation de S_n ainsi obtenue est de dimension $(n-1)!$ et a fait l'objet de nombreux travaux (*cf.* [Re], [GeJ], et *cf.* 5.2.).

(d) *Algèbres de Leibniz.* Ces algèbres sont munies d'une opération $[-,-]$ (on ne suppose pas que le crochet est antisymétrique) vérifiant l'identité de Leibniz :

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] - [[x,z],y].$$

Les algèbres de Leibniz sont aux algèbres de Lie ce que les algèbres associatives sont aux algèbres commutatives. On peut montrer (*cf.* [L-P]) que l'algèbre de Leibniz libre sur V a pour espace vectoriel sous-jacent $T(V)$. On a donc $\mathbf{Leib}(n) \cong \mathbb{K}[S_n]$ (représentation régulière). La différence entre les opérades **As** et **Leib** est donc dans la composition. Ainsi, si on désigne par 1_n la permutation identique dans S_n, on a

$$1_2 \circ_2 1_2 = 1_3 \quad \text{pour} \quad \mathbf{As} \text{ et } 1_2 \circ_2 1_2 = 1_3 - (23) \quad \text{pour} \quad \mathbf{Leib}.$$

(e) *Algèbres de Poisson.* Une algèbre de Poisson a deux opérations génératrices. L'une, notée ab, est associative et commutative, l'autre, notée $[a,b]$, est un crochet de Lie. De plus ces deux opérations sont reliées par l'identité

$$[a,bc] = b[a,c] + [a,b]c.$$

L'opérade **Pois** associée est telle que

$$\mathbf{Pois}(1) = \mathbf{1}\ ,\ \mathbf{Pois}(2) = \mathbf{1} \oplus (\mathrm{sgn})$$

où (sgn) est la représentation signature de S_2, et $\mathbf{1}$ la représentation triviale de dimension 1.

Pour une description de l'opérade associée aux algèbres de Poisson graduées on pourra consulter [GeK1] qui traite aussi des algèbres de Batalin-Vilkovisky.

(f) *Algèbres de Lie k-aires.* On se fixe un entier $k \geq 1$. Pour tout $(k+1)$-uple $\{x_0, \ldots, x_k\}$ on se donne un nouvel élément $[x_0 x_1 \ldots x_k]$, auquel on impose les relations

- $\sigma.[x_0 \ldots x_k] := [x_{\sigma^{-1}(0)} \ldots x_{\sigma^{-1}(k)}] = \mathrm{sgn}(\sigma)[x_0 \ldots x_k], \forall \sigma \in S_{k+1}$,
- $\sum_{\sigma \in S_{2k+1}} \sigma.[[x_0 \ldots x_k] x_{k+1} \ldots x_{2k}] = 0$.

On vérifie que pour $k=1$ on a la notion d'algèbre de Lie. Les algèbres de Lie k-aires libres apparaissent naturellement dans des questions combinatoires liées au réseau de partition (*cf.* [H-W]). Ici les opérations génératrices ne sont plus binaires (sauf pour $k=1$). En fait on a

$$\mathbf{Lie}^k(n) = 0 \text{ pour } 1 < n < k+1.$$

On trouvera dans [Gn] d'autres exemples d'algèbres k-aires.

1.3. Catégories monoïdales et opérades. Le but de ce paragraphe est de montrer qu'une opérade peut s'interpréter comme une algèbre associative dans une certaine catégorie monoïdale. Ce point de vue est dû à M. Markl [Mr1,2].

Par définition une *catégorie monoïdale* est une catégorie $\mathcal{C}$, stable par colimites, munie d'un foncteur

$$\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$$

et, pour tout triple d'objets U, V, W de $\mathcal{C}$, d'un isomorphisme naturel

$$\varphi(U,V,W) : (U \otimes V) \otimes W \to U \otimes (V \otimes W)$$

satisfaisant à l'axiome de cohérence suivant : le pentagone de MacLane est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & U \otimes (V \otimes (W \otimes Z)) & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ & & & & U \otimes ((V \otimes W) \otimes Z) \\ (U \otimes V) \otimes (W \otimes Z) & & & & \downarrow \\ & & & & (U \otimes (V \otimes W)) \otimes Z \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & ((U \otimes V) \otimes W) \otimes Z & & \end{array}$$

On dit que la catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ est *symétrique* si pour tout U et V on se donne un isomorphisme $\psi : U \otimes V \xrightarrow{\sim} V \otimes U$ satisfaisant à certaines conditions de compatibilité (*cf.* [McL]). Ces conditions assurent que pour toute famille $X_1, \ldots, X_n$ d'objets de $\mathcal{C}$ et toute permutation $\sigma \in S_n$ on a un isomorphisme canonique $\sigma_* = X_1 \otimes \cdots \otimes X_n \xrightarrow{\sim} X_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes X_{\sigma^{-1}(n)}$ tel que $\sigma_* \circ \tau_* = (\sigma\tau)_*$.

Exemples. La catégorie des espaces topologiques munie du produit cartésien est monoïdale symétrique. La catégorie $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$ des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ avec $\otimes = \otimes_{\mathbb{K}}$ est monoïdale symétrique. Sur la catégorie des espaces vectoriels gradués il y a deux structures symétriques différentes : soit $\psi(u \otimes v) = v \otimes u$, soit $\psi(u \otimes v) = (-1)^{|u||v|}(v \otimes u)$. On les note respectivement $g\,\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}^{+}$ et $g\,\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}^{-}$. On peut enrichir les objets de $g\,\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}^{-}$ d'une différentielle, on obtient alors la catégorie monoïdale symétrique des complexes de chaînes sur $\mathbb{K}$ notée $dg\,\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$.

Par définition un *monoïde* (sans unité) dans une catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ est un objet C muni d'un morphisme

$$\gamma : C \otimes C \to C$$

qui est associatif :

$$\gamma \circ (1_C \otimes \gamma) \circ \varphi(C, C, C) = \gamma \circ (\gamma \otimes 1_C).$$

Un monoïde dans $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$ n'est rien d'autre qu'une $\mathbb{K}$-algèbre associative. Plus généralement un monoïde dans une catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ dont les objets sont des espaces vectoriels est appelé une *algèbre associative* de $\mathcal{C}$.

On note par $\mathbb{S}$ la réunion des groupes symétriques S_n, $n \geq 0$. C'est un groupoïde. Un $\mathbb{S}$-module $\mathcal{P}$ est donc la donnée pour tout $n \geq 1$ d'un S_n-module $\mathcal{P}(n)$ sur $\mathbb{K}$. Dans cet exposé on supposera *toujours* que les $\mathcal{P}(n)$ sont de dimension finie. Un $\mathbb{S}$-module est en fait équivalent à la donnée d'un foncteur de la catégorie des ensembles finis munis des bijections dans $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$. En effet pour tout ensemble fini à n éléments E on peut poser

$$(1.3.1). \qquad \mathcal{P}(E) := \Big(\bigoplus_{f \in \mathrm{Iso}([n], E)} \mathcal{P}(n)\Big)_{S_n}$$

Inversement on a $\mathcal{P}(n) = \mathcal{P}([n])$.

La donnée d'un S_n-module de dimension finie M est équivalente à la donnée d'un foncteur $F^M : \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}} \to \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$ (appelé foncteur de Schur), qui est polynomial de degré n et qui commute aux limites inductives :

$$F^M(V) := V^{\otimes n} \otimes_{S_n} M.$$

Qualifions d'analytique un foncteur qui est somme de tels foncteurs polynomiaux (de divers degrés). On constate que le composé de deux foncteurs analytiques est encore analytique. Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux $\mathbb{S}$-modules et $F^{\mathcal{P}}$, resp. $F^{\mathcal{Q}}$, les foncteurs analytiques correspondants. On note $\mathcal{P} \boxtimes \mathcal{Q}$ le $\mathbb{S}$-module tel que

$$F^{\mathcal{Q}} \circ F^{\mathcal{P}} = F^{\mathcal{P} \boxtimes \mathcal{Q}}.$$

Explicitement on obtient :

$$(1.3.2) \qquad (\mathcal{P} \boxtimes \mathcal{Q})(n) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}(k) \otimes_{S_k} \Big(\bigoplus_{\pi \in \mathrm{Ens}([n],[k])} \mathcal{Q}(\pi)\Big)$$

Ici $\mathrm{Ens}([n], [k])$ désigne l'ensemble des applications de $[n]$ dans $[k]$ et on prend $\mathcal{Q}(\emptyset) = \mathbb{K}$.

Le produit tensoriel $\boxtimes$ munit alors la catégorie $\mathbb{S} - mod$ d'une structure monoïdale.

1.4. Proposition (Smirnov [S1]). *Une opérade (resp. opérade unitaire) sur* $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$ *est une algèbre associative (resp. algèbre associative unitaire) dans la catégorie monoïdale* $(\mathbb{S} - mod, \boxtimes)$.

Un *morphisme d'opérades* est un homomorphisme d'algèbres dans la catégorie $\mathbb{S}-mod$. Une *coopérade* est une cogèbre dans la catégorie $\mathbb{S}-mod$. On étend de manière évidente la notion d'opérade aux espaces vectoriels gradués et aux complexes de chaînes sur $\mathbb{K}$. Notons qu'alors des signes s'introduisent dans la formule (b) de la première définition d'une opérade. Ce point de vue, apparemment compliqué, sur les opérades permet de transposer aux opérades bon nombre de constructions et de résultats sur les algèbres associatives. Il faut néanmoins remarquer une différence essentielle entre les deux catégories monoïdales $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$ et $\mathbb{S}-mod$: la première est *symétrique*, pas la seconde.

2. DUALITÉ DE KOSZUL DANS LES ALGÈBRES ASSOCIATIVES (cf. [P]), (très résumé et simplifié).

On se place dans la catégorie des algèbres associatives sans unité, ou plus pompeusement, dans la catégorie des monoïdes sans unité de la catégorie monoïdale $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$.

2.1. Algèbres quadratiques. L'algèbre associative libre sur l'espace vectoriel V a pour espace vectoriel (gradué) sous-jacent le module tensoriel

$$T(V) = V \oplus V^{\otimes 2} \oplus \cdots \oplus V^{\otimes n} \oplus \cdots,$$

et le produit est donné par la concaténation. Une *algèbre quadratique* est une algèbre de la forme $A = T(V)/(R)$ où (R) est l'idéal bilatère engendré par un sous-espace vectoriel $R \subset V^{\otimes 2}$. On note $A := A(V, R)$. Par exemple, si V est engendré par les x_i et que R est engendré par les $x_i \otimes x_j - x_j \otimes x_i$, on obtient l'algèbre symétrique (sans unité) $S(V)$. On remarque qu'une algèbre quadratique est graduée et que $A_1 = V$, $A_2 = V^{\otimes 2}/R$.

2.2. Dual quadratique. Par définition le *dual quadratique* de $A = A(V, R)$ est l'algèbre quadratique

$$A^! := A(V^*, R^\perp),$$

où V^* est le dual linéaire de V et où $R^\perp$ est l'orthogonal de R dans $V^* \otimes V^* = (V \otimes V)^*$. Notons que l'on a $(A^!)^! = A$ lorsque V est de dimension finie, ce que l'on supposera systématiquement. On voit immédiatement que le dual de l'algèbre symétrique est l'algèbre extérieure : $S(V)^! = \Lambda(V^*)$.

2.3. Constructions de Manin [Ma1], [Ma2]. On définit deux produits $\circ$ et $\bullet$ sur les algèbres quadratiques de la façon suivante :

$$A(V, R) \circ A(W, S) = A(V \otimes W, (23)(R \otimes W^{\otimes 2} + V^{\otimes 2} \otimes S))$$
$$A(V, R) \bullet A(W, S) = A(V \otimes W, (23)(R \otimes S)).$$

La présence de la permutation (23) signifie que l'on doit échanger les facteurs 2 et 3. Notons que l'on utilise ici l'homomorphisme de symétrie dans la catégorie $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$. Ces constructions ont les propriétés suivantes :

$$(A \circ B)^! = A^! \bullet B^!, \qquad (A \bullet B)^! = A^! \circ B^!,$$
$$\mathrm{Hom}(A \bullet B, C) = \mathrm{Hom}(A, B^! \circ C).$$

L'algèbre de polynômes $t\mathbb{K}[t]$ est une unité pour le produit $\circ$ et l'algèbre des nombres duaux $\mathbb{K}\varepsilon \quad (\varepsilon^2 = 0)$ est une unité pour le produit $\bullet$.

Posons $\mathrm{hom}(B, C) := B^! \circ C$. On a ainsi défini un “hom-interne” dans la catégorie des algèbres quadratiques munie du produit tensoriel $\bullet$ car

$$\mathrm{hom}(A, \mathrm{hom}(B, C)) = \mathrm{hom}(A \bullet B, C).$$

2.4. Bar-complexe. La cogèbre libre sur l'espace vectoriel V a pour espace vectoriel sous-jacent le module tensoriel $T(V)$. La comultiplication est donnée par

$$\Delta(v_1, \dots v_n) = \sum_{p=1}^{n-1} v_1 \dots v_p \otimes v_{p+1} \dots v_n.$$

Si A est une algèbre associative, il existe sur la cogèbre graduée $T(A)$ une *unique* coderivation d de degré -1 qui coïncide sur $A^{\otimes 2}$ avec la multiplication de A (cf. [Bbki]).

Explicitement on a $d(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} (a_1, \dots, a_i a_{i+1}, \dots, a_n)$. On vérifie que d est une différentielle, i.e. $d^2 = 0$. On a ainsi construit le bar-complexe $\mathbf{B}(A)$, qui est une cogèbre différentielle graduée. Son dual linéaire $\mathbf{D}(A) := \mathbf{B}(A)^*$ est donc une algèbre différentielle graduée.

Supposons que A soit une algèbre graduée de dimension finie en chaque degré (avec $A_0 = 0$). On étend le foncteur $\mathbf{D}$ aux algèbres graduées en posant

$$\mathbf{D}(A) := (T((sA)^*), d).$$

Ici sV désigne la suspension de l'espace vectoriel gradué V, i.e. $(sV)_n = V_{n+1}$. En particulier on a $\mathbf{D}(A)_0 = T(A_1^*) = \bigoplus_{n \geq 1} (A_1^*)^{\otimes n}$.

On peut étendre de manière évidente le foncteur $\mathbf{D}$ aux algèbres associatives différentielles graduées et on montre que l'homomorphisme naturel

$$\mathbf{D}(\mathbf{D}(\mathbf{A})) \to \mathbf{A}$$

est un quasi-isomorphisme.

2.5. Algèbre de Koszul. Supposons maintenant que $A = A(V, R)$ soit une algèbre quadratique. En basses dimensions le complexe $\mathbf{D}(A)$ est

$$\cdots \to \sum_{i,j} (V^*)^{\otimes i} \otimes (V^{\otimes 2}/R)^* \otimes (V^*)^{\otimes j} \to T(V^*)$$

et donc le conoyau de la dernière flèche est précisément $H_0(\mathbf{D}(A)) = A^!$ car $(V^{\otimes 2}/R)^* = R^\perp$.

Par définition, on dit que l'algèbre quadratique A est *de Koszul* si $\mathbf{D}(A) \to A^!$ est un quasi-isomorphisme, c'est-à-dire si $H_i(\mathbf{D}(A)) = 0$ pour tout $i > 0$.

Si A est de Koszul, alors $A^!$ est aussi de Koszul. C'est une conséquence de $\mathbf{D}(\mathbf{D}(A)) \xrightarrow{\sim} A$.

Exemple. L'algèbre symétrique $S(V)$ (et donc aussi $\Lambda(V)$) est de Koszul.

2.6. Quelques propriétés des algèbres de Koszul.

a) *Complexe de Koszul.* Puisque $\mathbb{K}\varepsilon$ est élément neutre pour l'opération $\bullet$ on a :

$$\mathrm{Hom}(A, A) = \mathrm{Hom}(\mathbb{K}\varepsilon \bullet A, A) = \mathrm{Hom}(\mathbb{K}\varepsilon, A^! \circ A).$$

Ainsi l'image de id_A fournit un homomorphisme, qui, appliqué à ε, donne un élément $\xi \in A^! \circ A \subset A^! \otimes A$ de carré nul (puisque $\varepsilon^2 = 0$). Par définition le *complexe de Koszul* de A est $(A^! \otimes A, d_\xi)$, où d_ξ est la multiplication par ξ (comparer avec [Bbki]).

On peut montrer que ce complexe est acyclique si et seulement si $\mathbf{D}(A)$ est acyclique, c'est-à-dire si et seulement si A est de Koszul.

b) *Série de Poincaré d'une algèbre de Koszul.* Pour toute algèbre graduée A de dimension finie en chaque degré on pose

$$f_A(t) = 1 + \sum_{n \geq 1} \dim A_n t^n.$$

Si A est de Koszul on a

$$f_A(t) f_{A^!}(-t) = 1.$$

Exemples : si $\dim V = n$, $f_{S(V)}(t) = \dfrac{1}{(1-t)^n}$ et $f_{\Lambda(V)}(t) = (1+t)^n$.

Soit $q_1, q_2 \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_4]$ des polynômes définissant une intersection complète de deux quadriques (courbe elliptique), et posons $A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_4]/(q_1, q_2)$. On a alors $f_A(t) = \left(\frac{1+t}{1-t}\right)^2$.

c) On peut montrer que les catégories dérivées de modules sur A et sur $A^!$ sont équivalentes lorsque A est de Koszul.

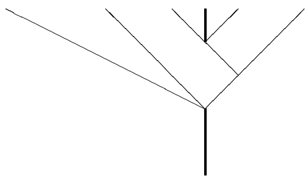
Pour plus de détails, d'information et d'applications des algèbres de Koszul on pourra consulter [P], [Lö], [M1,2], [BGSc], [BGSo].

3. DUAL D'UNE OPÉRADE QUADRATIQUE

Le principe de ce paragraphe et du suivant est de refaire le paragraphe 2 en remplaçant la catégorie monoïdale $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$ par la catégorie monoïdale $\mathbb{S}-mod$. On obtiendra ainsi des résultats sur les opérades. Ensuite on examinera brièvement les conséquences pour les algèbres sur ces opérades.

Explicitons tout d'abord la notion d'arbre étiqueté, que nous avons déjà implicitement utilisée. Elle va nous permettre de décrire les opérades et les coopérades libres.

3.1. Arbres. Un *arbre* est un graphe orienté non vide, sans lacet, tel que chaque sommet ait un seul côté sortant et au moins un rentrant.



Un morphisme d'arbres $T \to T'$ est une application continue surjective préservant la structure et telle que l'image inverse d'un sommet de T' est un sous-arbre connexe de T. Si e est un côté interne de T sa contraction donne un nouvel arbre T/e. Tout morphisme est le composé de morphismes élémentaires du type $T \to T/e$.

Arbres étiquetés. Soit I un ensemble d'indice fini de même cardinal que le nombre de feuilles de T. Une bijection entre I et les feuilles de T donne un I-arbre. On parlera de n-arbre si $I = [n] = \{1, 2, \ldots, n\}$.

On dit qu'un arbre est *binaire* si chaque sommet n'a que deux côtés rentrants. Il y a $(2n-3)!! = 1.3.5.\ldots.(2n-3)$ arbres binaires n-étiquetés.

Greffe d'arbres. Soient I_1 et I_2 deux ensembles d'indices et $i \in I_2$. Soit T_1 un I_1-arbre et T_2 un I_2-arbre. La *greffe* $T = T_1 \circ_i T_2$ de T_1 et T_2 via i est l'arbre obtenu en identifiant la racine de T_1 à la feuille i de T_2 (cf. fig. 1). Le nouvel ensemble d'indice est $I_1 \bigcup (I_2 - i)$.

3.2. Opérade libre sur un $\mathbb{S}$-module. Le foncteur oubli des opérades dans les $\mathbb{S}$-modules admet un adjoint à gauche, qui associe à un $\mathbb{S}$-module E son opérade libre $\mathbb{T}(E)$. Rappelons que $\mathbb{T}(E)$ est caractérisée par la propriété universelle suivante. Pour tout morphisme de

$\mathbb{S}$-modules de E dans une opérade $\mathcal{P}$ il y a un unique morphisme d'opérades $\mathbb{T}(E) \to \mathcal{P}$ le prolongeant. En utilisant l'interprétation d'une opérade comme une algèbre associative dans $\mathbb{S} - mod$ on voit que $\mathbb{T}(E)$ est le module tensoriel

$$\mathbb{T}(E) = E \oplus E^{\boxtimes 2} \oplus ... \oplus E^{\boxtimes n} \oplus ...,$$

muni de la structure d'algèbre donnée par la concaténation. Voici une description plus explicite de l'algèbre tensorielle $\mathbb{T}(E)$ obtenue à partir de la propriété universelle. Pour tout arbre T on pose

$$E(T) := \bigotimes_{v \in T} E(\mathrm{In}(v))$$

où v est un sommet de T et $\mathrm{In}(v)$ est l'ensemble (fini) des côtés rentrants de v (voir 1.3.1 pour l'extension de E aux ensembles finis). Pour tout n on a

$$\mathbb{T}(E)(n) = \bigoplus_{n-\text{arbres } T} E(T),$$

où la somme porte sur les classes d'isomorphismes de n-arbres T. C'est donc l'espace de toutes les opérations sur n variables que l'on peut construire à partir des opérations élémentaires, c'est à dire des éléments de E. On notera que la composante $E(T)$ de $\mathbb{T}(E)$ est dans $E^{\boxtimes p}$ lorsque T a p sommets (i.e. $(p-1)$ côtés internes).

La greffe d'arbres permet de construire la composition

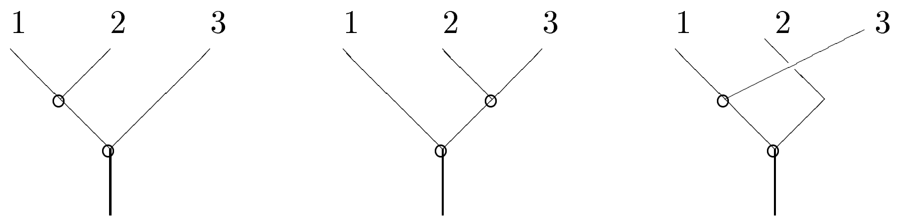
$$\circ_i : \mathbb{T}(E)(m) \otimes \mathbb{T}(E)(n) \to \mathbb{T}(E)(m+n-1).$$

Dans cet article on va se limiter aux opérades n'ayant pas d'opérations unaires, i.e. $\mathcal{P}(1) = 0$. Pour le cas général on renvoie à [GK].

Soit $E = \{E(n) | n \geq 1\}$ une famille de S_n-modules telle que $E(1) = 0$. En basses dimensions on trouve

$$\begin{aligned} \mathbb{T}(E)(1) &= E(1) = 0, \\ \mathbb{T}(E)(2) &= E(2), \\ \mathbb{T}(E)(3) &= E(3) \oplus (3\, E(2) \otimes E(2)), \end{aligned}$$

où chaque copie $E(2) \otimes E(2)$ correspond à l'un des diagrammes



Ces dessins permettent de voir l'action de S_3 sur $3\ E(2) \otimes E(2)$ à partir de l'action de S_2 sur $E(2)$:

$$3\ E(2) \otimes E(2) = \mathrm{Ind}_{S_2}^{S_3}(E(2) \otimes E(2)),$$

où S_2 opère seulement sur la deuxième copie de $E(2)$.

Idéal d'une opérade. Un idéal J d'une opérade $\mathcal{P}$ est une sous-opérade telle que la composition dans $\mathcal{P}$ est à valeur dans J dès que l'une des variables est dans J. La famille quotient $\mathcal{P}(n)/J(n)$ forme une opérade notée $\mathcal{P}/J$.

Une *présentation* d'une opérade $\mathcal{P}$ est la donnée d'un $\mathbb{S}$-module E et d'un sous-$\mathbb{S}$-module R de $\mathbb{T}(E)$. L'opérade $\mathcal{P}$ est le quotient $\mathbb{T}(E)/(R)$, où (R) est l'idéal engendré par R.

Si $E(n) = 0$ sauf pour un entier $k+1$ fixé ($k \geq 1$), on parlera d'opérade $(k+1)$-aire (binaire si $k = 1$).

3.3. Opérade quadratique (avec $\mathcal{P}(1) = 0$). Soit E un S_2-module et R un sous-espace de $\mathrm{Ind}_{S_2}^{S_3}(E \otimes E) = 3\ E \otimes E$ stable sous l'action de S_3.

On construit tout d'abord l'opérade libre $\mathbb{T}(E)$ sur $\{E(2) = E, E(n) = 0 \text{ pour } n \neq 2\}$, puis on quotiente par l'idéal (R) de $\mathbb{T}(E)$ engendré par $R \subset 3\ E \otimes E = \mathbb{T}(E)(3)$.

L'opérade $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbb{K}, E, R)$ ainsi définie est appelée une *opérade quadratique.* On remarquera que les opérades $\mathbf{As}, \mathbf{Com}, \mathbf{Lie}, \mathbf{Leib}$ et $\mathbf{Pois}$ sont quadratiques et binaires.

3.4. Opérade quadratique duale. Soit V un S_n-module. On note $V^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$ le dual de V muni de l'action de S_n duale *tensorisée* par la représentation signature.

Par définition l'*opérade quadratique duale* de $\mathcal{P}$ est

$$\mathcal{P}^! := \mathcal{P}(\mathbb{K}, E^\vee, R^\perp)$$

où $R^\perp \subset F(E^\vee)(3) = F(E)(3)^\vee$ est le sous-espace vectoriel orthogonal de R.

On vérifie immédiatement que

$$(\mathcal{P}^!)^! = \mathcal{P}\,.$$

3.5. Exemples. On désigne respectivement par $\mathbf{1}$, sgn et V_2 les représentations irréductibles de S_3 : triviale, signature, hyperplan $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

(a) $\mathbf{As}$. L'espace $E = \mathbf{As}(2)$ est de dimension 2 engendré par x_1x_2 et x_2x_1 (représentation régulière de S_2). Donc $\mathbb{T}(\mathbf{As}(2))(3)$ est de dimension 12 engendré par les expressions $(x_ix_j)x_k$ et $x_i(x_jx_k)$ pour toutes les permutations $\{i,j,k\}$ de $\{1,2,3\}$. Le sous-espace S_3-invariant $R_{\mathbf{As}}$ est engendré par les 6 associateurs $(x_ix_j)x_k - x_i(x_jx_k)$. On constate que $R_{\mathbf{As}}^\perp = R_{\mathbf{As}}$ et donc l'opérade associative est auto-duale :

$$\mathbf{As}^! = \mathbf{As}\,.$$

(b) **Com**. L'espace E est de dimension 1 engendré par x_1x_2 (représentation triviale de S_2). On voit aisément que $\mathbb{T}(\mathbf{Com}(2))(3) = \mathbf{1} \oplus V_2$ et que $R_{\mathbf{Com}} = V_2$. On a donc $\mathbf{Com}^! = \mathcal{P}(\mathbb{K}, \mathrm{sgn}, \mathrm{sgn})$. Or cette opérade est précisément l'opérade **Lie**. En effet $\mathbf{Lie}(2) = \mathrm{sgn}$ (antisymétrie du crochet), $\mathbb{T}(\mathrm{Lie}(2))(3) = \mathrm{sgn} \oplus V_2$ et $R_{\mathbf{Lie}} = \mathrm{sgn}$ (c'est l'identité de Jacobi). Donc on a

$$\mathbf{Com}^! = \mathbf{Lie}.$$

(c) **Lie**. On vient de voir que

$$\mathbf{Lie}^! = \mathbf{Com}.$$

(d) **Leib**. Une *algèbre de Leibniz duale* (cf. [Lo2]) est un espace vectoriel R muni d'une opération binaire $R \otimes R \to R, (r, s) \mapsto rs$, vérifiant $(rs)t = r(st) + r(ts)$ pour tout $r, s, t \in R$. Ce type d'algèbre définit une opérade $\mathbf{Leib}^!$ qui est précisément l'opérade quadratique duale de **Leib**. On pourra vérifier élémentairement que si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Leibniz et R une algèbre de Leibniz duale, $\mathfrak{g} \otimes R$, muni du crochet, $[a \otimes r, b \otimes s] := [a, b] \otimes rs - [b, a] \otimes sr$ est une algèbre de Lie, voir proposition 3.7 ci-dessous.

Plus généralement les algèbres définies par une opération binaire et une relation quadratique du type

$$x(yz) = \sum_{\sigma \in S_3} \alpha_\sigma \sigma.((xy)z), \quad \alpha_\sigma \in \mathbb{K},$$

ont pour duales les algèbres définies par une opération binaire et la relation quadratique

$$(xy)z = \sum_{\sigma \in S_3} \alpha_\sigma \, \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma^{-1}(x(yz)).$$

Les algèbres associatives et les algèbres de Leibniz en sont deux cas particuliers.

3.6. Morphismes d'opérades. Il est clair qu'on a une notion de morphisme d'opérades, et qu'un tel morphisme $\alpha : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ donne naissance à un foncteur entre catégories d'algèbres $(\mathcal{Q} - \mathrm{alg}) \to (\mathcal{P} - \mathrm{alg})$. Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont quadratiques on a évidemment un nouveau morphisme $\alpha^! : \mathcal{Q}^! \to \mathcal{P}^!$.

Les exemples précédents sont reliés par les foncteurs

$$(\mathbf{Leib}^! - alg) \xrightarrow{+} (\mathbf{Com} - alg) \overset{i}{\hookrightarrow} (\mathbf{As} - alg) \xrightarrow{-} (\mathbf{Lie} - alg) \overset{u}{\hookrightarrow} (\mathbf{Leib} - alg).$$

Le foncteur i est l'inclusion évidente. Le foncteur $-$ associe à toute algèbre associative A l'algèbre de Lie ayant pour crochet $[a, b] = ab - ba$. On a en fait $i^! = -$. Le foncteur u

est l'inclusion naturelle, son dual $u^! = +$ est le foncteur qui associe a une $\mathbf{Leib}^!$-algèbre R l'algèbre associative et commutative $(R, .)$, $a \cdot b = ab + ba$ (vérifier que c'est bien défini).

Pour toutes opérades quadratiques $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ on peut définir, comme dans le cas des algèbres associatives, des produits $\mathcal{P} \circ \mathcal{Q}$ et $\mathcal{P} \bullet \mathcal{Q}$. On peut alors définir un hom-interne par $\hom(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \mathcal{P}^! \circ \mathcal{Q}$. Le rôle de l'unité pour $\circ$ est joué par l'opérade **Lie**, donc

$$\mathcal{P}^! = \hom(\mathcal{P}, \mathbf{Lie}).$$

Au niveau des algèbres, ce résultat a la conséquence suivante (que l'on peut vérifier directement) :

3.7. Proposition. *Soit $\mathcal{P}$ une opérade quadratique et $\mathcal{P}^!$ son opérade quadratique duale. Pour toute $\mathcal{P}$-algèbre A et toute $\mathcal{P}^!$-algèbre B, le produit tensoriel $A \bigotimes_{\mathbb{K}} B$ est muni d'une structure d'algèbre de Lie.*

Si $\{\mu_i\}$ est une base de E et $\{\mu_i^\vee\}$ est la base duale, le crochet de Lie est donné par

$$[a \otimes b, a' \otimes b'] = \sum_i \mu_i(a, a') \otimes \mu_i^\vee(b, b') - \mu_i(a', a) \otimes \mu_i^\vee(b', b).$$

3.8. Algèbre quadratique sur une opérade quadratique. Soit $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbb{K}, E, R)$ une opérade quadratique (on suppose toujours $\mathcal{P}(1) = 0$), V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et S un sous-espace de l'espace des coinvariants $(E \otimes V^{\otimes 2})_{S_2}$. Par définition la *$\mathcal{P}$-algèbre quadratique* $A(V, S)$ est le quotient de la $\mathcal{P}$-algèbre libre $F_{\mathcal{P}}(V)$ sur V par l'idéal (S) engendré par $S \subset F_{\mathcal{P}}(V)_2 = (E \otimes V^{\otimes 2})_{S_2}$. Comme $F_{\mathcal{P}}(V)$ est naturellement graduée et que (S) est homogène, $A(V, S)$ peut être considérée comme une $\mathcal{P}$-algèbre dans $g\,\mathrm{Vect}^+$.

On peut faire la même construction, mais dans la catégorie $g\,\mathrm{Vect}^-$. Il faut alors remplacer E par $E \otimes (\mathrm{sgn})$. On note $A(V, S)^-$ l'algèbre ainsi obtenue.

Par définition l'*algèbre quadratique duale* $A^!$ de $A = A(V, S)$ est la $\mathcal{P}^!$-algèbre dans $g\,\mathrm{Vect}^-$ construite de la manière suivante. On pose $V^\vee = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$ et $S^\perp =$ orthogonal de S dans $((E \otimes V^{\otimes 2})_{S_2})^\vee = (E^\vee \otimes (\mathrm{sgn}) \otimes (V^\vee)^{\otimes 2})_{S_2}$. On a $A^! := A(V^\vee, S^\perp)^-$.

4. DUALITÉ DE KOSZUL DES OPÉRADES.

4.1. Bar-construction sur les opérades. Le bar-complexe d'une algèbre associative dans une catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ est une cogèbre graduée dans $\mathcal{C}$ construite de la manière suivante. On prend la cogèbre libre (qui est graduée) sur l'objet de $\mathcal{C}$ sous-jacent et on la munit de l'unique différentielle qui, en degré 2, coïncide avec la structure d'algèbre associative. Appliquée à l'opérade $\mathcal{P}$, considérée comme une algèbre associative dans $\mathbb{S} - mod$, on obtient le bar-complexe de $\mathcal{P}$, noté $(\mathbf{B}(\mathcal{P}), \delta)$. Le dual linéaire de cette cogèbre différentielle graduée dans $\mathbb{S} - mod$ nous donne une algèbre associative graduée dans $\mathbb{S} - mod$, c'est-à-dire une opérade différentielle graduée. On la note $\mathbf{D}(\mathcal{P})$. Cette construction étant fonctorielle on l'étend aux opérades graduées en posant :

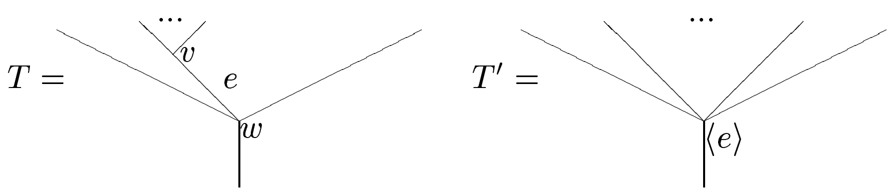
$$\mathbf{D}(\mathcal{P}) := (\mathcal{T}((s\,\mathcal{P})^{\vee}), d) \ ,$$

où $(s\,\mathcal{P})(n) = s^n(\mathcal{P}(n))$. Puis on l'étend aux opérades différentielles graduées pour obtenir un endofoncteur :

$$\mathbf{D} : (dg - Op_{\mathbb{K}}) \to (dg - Op_{\mathbb{K}}).$$

Explicitons la différentielle d de $\mathbf{D}(\mathcal{P})$ en utilisant la description de $\mathcal{T}(E)$ donnée en 3.2. Le complexe de chaînes $\mathbf{D}(\mathcal{P})$ est une somme d'espaces vectoriels du type $\mathcal{P}(T)^*$ où T est un arbre. La différentielle d est alors une matrice dont la composante $d_{T',T} : \mathcal{P}(T')^* \to \mathcal{P}(T)^*$ est la suivante.

On a $d_{T',T} = 0$ sauf si $T' = T/e$ pour un certain côté interne e de T. On note v et w les sommets de e et $< e >$ le nouveau sommet de T'.



La composition dans $\mathcal{P}$ définit un homomorphisme

$$\circ_e = \mathcal{P}(\mathrm{In}\, v) \otimes \mathcal{P}(\mathrm{In}\, w) \to \mathcal{P}(\mathrm{In}\langle e\rangle).$$

Comme il y a une bijection entre les autres sommets de T et de T' cet homomorphisme s'étend en un homomorphisme

$$\mathcal{P}(T) = \bigotimes_{v} \mathcal{P}(\mathrm{In}\, v) \to \bigotimes_{v'} \mathcal{P}(\mathrm{In}\, v') = \mathcal{P}(T').$$

C'est le dual linéaire de $d_{T',T}$.

4.2. Théorème (Ginzburg-Kapranov [GK]). *Soit $\mathcal{P}$ une opérade sur $\mathbb{K}$ telle que $\mathcal{P}(n)$ soit de type fini pour tout n. Alors*

$$\mathbf{D}(\mathbf{D}(\mathcal{P})) \to \mathcal{P}$$

est un quasi-isomorphisme.

Remarque. L'hypothèse de finitude nous a permis de transformer le bar-complexe en un endofoncteur $\mathbf{D}$. Dans le cas général il faut travailler avec les *dg*-algèbres *et* les *dg*-cogèbres de la catégorie monoidale $\mathcal{C}$. On a alors deux foncteurs

$$\mathbf{B} : \{dg - alg \text{ de } \mathcal{C}\} \longleftrightarrow \{dg - cog \text{ de } \mathcal{C}\} : \Omega\ ,$$

qui sont adjoints l'un de l'autre et induisent des équivalences entre les catégories homotopiques.

4.3. Bar-complexe pour une opérade quadratique. Supposons maintenant que l'opérade $\mathcal{P}$ soit quadratique (*cf.* 3.3). Comme dans le cas des algèbres associatives dans $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$, on a un homomorphisme naturel

$$\mathbf{D}(\mathcal{P}) \to \mathcal{P}^!$$

qui est un isomorphisme en H_0.

4.4. Définition. L'opérade $\mathcal{P}$ est dite de *Koszul* si $H_n(\mathbf{D}(\mathcal{P})) = 0$ pour tout $n > 0$, en d'autres termes si la suite de modules

$$\cdots \to \mathbf{D}(\mathcal{P})_n \to \mathbf{D}(\mathcal{P})_{n-1} \to \cdots \to \mathbf{D}(\mathcal{P})_0 \to \mathcal{P}^! \to 0$$

est exacte.

4.5. Proposition. *Si l'opérade $\mathcal{P}$ est de Koszul, il en est de même de l'opérade $\mathcal{P}^!$.*

C'est une conséquence immédiate du théorème 4.2.

4.6. Homologie d'une $\mathcal{P}$-algèbre. Avant de passer aux exemples on va énoncer un critère pratique pour vérifier qu'une opérade quadratique $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbb{K}, E, R)$ est de Koszul.

Introduisons l'*homologie d'une $\mathcal{P}$-algèbre* A. On pose

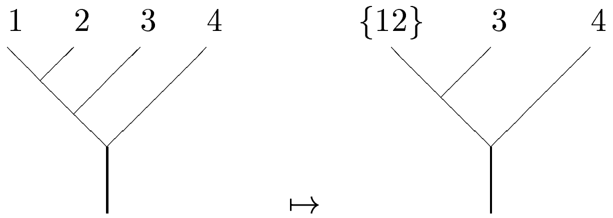
$$C_n^{\mathcal{P}}(A) := A^{\otimes n} \otimes_{S_n} \mathcal{P}^!(n)^\vee.$$

Par construction $\mathcal{P}^!(n)^\vee$ est un sous-espace de $\bigoplus_T E(T)$ (somme sur les n-arbres binaires T). On construit une application

$$\overline{d}_n : A^{\otimes n} \otimes_{S_n} (\bigoplus_T E(T)) \to A^{\otimes n-1} \otimes_{S_{n-1}} (\bigoplus_S E(S)),$$

où la seconde somme est sur les $(n-1)$-arbres binaires, de la façon suivante. Qualifions d'*extrémal* un sommet v de l'arbre T possédant des feuilles. Si on remplace l'ensemble $\mathrm{In}(v)$

des étiquettes de ses feuilles par un seul élément, on obtient un nouvel ensemble noté $[n]/v$. L'arbre T/v est le $[n]/v$-arbre obtenu en enlevant v et en le remplaçant par une feuille :



L'action de l'opérade $\mathcal{P}$ sur l'algèbre A détermine une application

$$A^{\otimes n} \otimes E(T) \longrightarrow A^{\otimes [n]/v} \otimes E(T/v).$$

L'application $\bar{d}_n$ est la matrice ayant pour éléments les applications précédentes. Remarquons qu'a priori il y a une ambiguïté sur l'étiquetage des feuilles, mais celle-ci disparaît lorsqu'on quotiente par l'action du groupe symétrique.

4.7. Proposition (Ginzburg-Kapranov [GK]). *Pour tout n l'application $\bar{d}_n$ envoie $C_n^{\mathcal{P}}(A)$ dans $C_{n-1}^{\mathcal{P}}(A)$ et l'application d_n qui en résulte vérifie $d_{n-1} \circ d_n = 0$.*

L'homologie de la $\mathcal{P}$-algèbre A est alors définie par

$$H_*^{\mathcal{P}}(A) := H_*(C_*^{\mathcal{P}}(A), d).$$

La même méthode permet de définir l'homologie de A à coefficients dans un A-module M, notée $H_*^{\mathcal{P}}(A, M)$. La cohomologie $H^*_{\mathcal{P}}(A)$ est définie par

$$H^*_{\mathcal{P}}(A) = H^*(\mathrm{Hom}(C_*^{\mathcal{P}}(A), \mathbb{K})).$$

Remarque. Examinons le complexe $C_*^{\mathcal{P}}(A)$ en basses dimensions :

$$\cdots \to A^{\otimes 3} \otimes_{S_3} \mathcal{P}^!(3)^\vee \xrightarrow{d_3} A^{\otimes 2} \otimes_{S_2} \mathcal{P}^!(2)^\vee \xrightarrow{d_2} A.$$

Puisque $\mathcal{P}^!(2)^\vee = (E^\vee)^\vee = E$ on constate que $C_2^{\mathcal{P}}(A)$ est un quotient d'autant de copies de $A^{\otimes 2}$ que d'opérations génératrices et que d_2 consiste à *effectuer* ces opérations. De même $C_3^{\mathcal{P}}(A)$ est un quotient d'autant de copies de $A^{\otimes 3}$ que de relations de définitions, le composé $d_2 \circ d_3$ donnant précisément ces relations. Le complexe $C_*^{\mathcal{P}}(A)$ donne donc une réponse à la détermination des “relations entre les relations”, etc... (problème des syzygies supérieures).

L'un des critères effectifs pour déterminer si une opérade est de Koszul est le suivant

4.8. Théorème ([GK]). *Soit $\mathcal{P}$ une opérade quadratique. Alors $\mathcal{P}$ est de Koszul si et seulement si pour toute $\mathcal{P}$-algèbre libre $F_{\mathcal{P}}(V)$ on a $H_i^{\mathcal{P}}(F_{\mathcal{P}}(V)) = 0$, $i > 0$.*

4.9. Exemples.

a) $\mathcal{P} = \mathbf{As}$. On a vu que $\mathcal{P}^! = \mathbf{As}$. Le complexe $C_*^{\mathbf{As}}(A)$ de l'algèbre associative A est alors

$$\cdots \to A^{\otimes n+1} \xrightarrow{b'} A^{\otimes n} \to \cdots \to A \otimes A \to A$$

où $b'(a_0, \ldots, a_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i (a_0, \ldots, a_i a_{i+1}, \ldots, a_n)$.

On trouve ainsi l'homologie de Hochschild de A à coefficients dans le module trivial k (*cf.* par exemple [Lo1]). Remarquons que A est une algèbre sans élément unité, et que par module trivial on entend multiplication nulle.

b) $\mathcal{P} = \mathbf{Lie}$. On sait que $\mathcal{P}^! = \mathbf{Com}$. Le complexe $C_*^{\mathbf{Lie}}(\mathfrak{g})$ est alors

$$\cdots \to \Lambda^n \mathfrak{g} \xrightarrow{d} \Lambda^{n-1} \mathfrak{g} \to \cdots \to \Lambda^2 \mathfrak{g} \to \mathfrak{g},$$

$$d(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n) = \sum_{1 \le i < j \le n} (-1)^{i-j-1} [x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge \hat{x}_j \wedge \cdots \wedge x_n .$$

On trouve donc le complexe classique de Chevalley-Eilenberg. Il est bien connu que l'homologie de l'algèbre de Lie libre est triviale, donc **Lie** est une opérade de Koszul, ainsi que **Com** par la proposition 4.5.

c) $\mathcal{P} = \mathbf{Com}$. Pour une algèbre commutative A on peut montrer que $C_*^{\mathbf{Com}}(A)$ s'identifie au sous-complexe du complexe de Hochschild correspondant à l'inclusion $\mathbf{Lie}(n) \subset \mathbb{K}[S_n]$ en dimension n. Ce sous-complexe a pour homologie l'homologie de Harrison de A (*cf.* par exemple [Lo1]).

d) $\mathcal{P} = \mathbf{Leib}$. Puisque $\mathbf{Leib}^!(n) \cong \mathbb{K}[S_n]$, on a, pour toute algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}$,

$$C_*^{\mathbf{Leib}}(\mathfrak{g}) : \qquad \cdots \to \mathfrak{g}^{\otimes n} \xrightarrow{d} \mathfrak{g}^{\otimes n-1} \to \cdots \to \mathfrak{g}^{\otimes 2} \to \mathfrak{g} .$$

Le calcul de la différentielle donne

$$d(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = \sum_{1 \le i < j \le n} (-1)^j x_1 \otimes \cdots \otimes x_{i-1} \otimes [x_i, x_j] \otimes x_{i+1} \otimes \cdots \otimes \hat{x}_j \otimes \cdots \otimes x_n ,$$

c'est-à-dire que ce complexe est précisément celui construit dans [Lo1]. Puisque l'homologie de Leibniz d'une algèbre de Leibniz libre est triviale (*cf.* [LP]), **Leib** est une opérade de Koszul, ainsi que $\mathbf{Leib}^!$.

4.10. Propriétés [GK]. Voici quelques-unes des propriétés des opérades de Koszul.

a) *Série de Poincaré.* Soit $\mathcal{P}$ une opérade telle que $\mathcal{P}^+(1) = \mathbb{K}$ (i.e. $\mathcal{P}(1) = 0$). Par définition la série de Poincaré de $\mathcal{P}$ est

$$g_{\mathcal{P}}(x) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dim \mathcal{P}^+(n) \frac{x^n}{n!}.$$

(Pour $\dim \mathcal{P}(1) > 0$ il faudrait prendre une série à plusieurs variables). Les séries de Poincaré d'une opérade de Koszul $\mathcal{P}$ et de sa duale $\mathcal{P}^!$ sont reliées par (*cf.* [GK]) :

$$(*) \qquad g_{\mathcal{P}}(g_{\mathcal{P}^!}(x)) = x.$$

On peut se servir de ce résultat pour montrer que certaines opérades ne sont pas de Koszul (*cf.* [GeK1]).

Exemples :

$$g_{\mathbf{As}}(x) = \frac{-x}{1+x}, \quad g_{\mathbf{Com}}(x) = e^{-x} - 1, \quad g_{\mathbf{Lie}} = -\log(1+x).$$

On peut affiner ce résultat en remplaçant $\dim \mathcal{P}^+(n)$ par la série dzêta associée à la représentation $\mathcal{P}^+(n)$ de S_n. Dans la formule $(*)$ il faut alors remplacer la composition par le pléthysme (*cf.* Hanlon [Ha], Getzler-Kapranov [GeK2]).

b) *Cohomologie.* A tout type d'algèbres est associée une théorie de cohomologie qui, par exemple, mesure les déformations de ces algèbres. Cette théorie est d'ordinaire construite à partir du bar-complexe. Lorsque l'opérade associée est de Koszul cette théorie de cohomologie est isomorphe à $H^*_{\mathcal{P}}$ définie en 4.6. On voit immédiatement sur cette définition que

pour toute $\mathcal{P}$-algèbre A, $H^*_{\mathcal{P}}(A)$ est un $\mathcal{P}^!$-algèbre graduée.

c) *$\mathcal{P}$-algèbres de Koszul.* Comme annoncé, si $\mathcal{P}$ est une opérade de Koszul, et A une $\mathcal{P}$-algèbre de Koszul, sa duale $A^!$ est une $\mathcal{P}^!$-algèbre de Koszul et il y a sur $A \otimes A^!$ une différentielle qui en fait un complexe acyclique. En fait les constructions et les résultats pour les algèbres associatives de Koszul se généralisent aux $\mathcal{P}$-algèbres de Koszul, à la différence près que la quadratique duale est une $\mathcal{P}^!$-algèbre (et qu'en général $\mathcal{P}^! \neq \mathcal{P}$).

5. APPLICATIONS.

5.1. Algèbres homotopiques. Motivé par l'étude des espaces de lacets, Stasheff a formalisé dans [S] la notion d'"algèbre associative à homotopie près", ce sont les A_∞-algèbres.

Plus tard ont été introduites les "algèbres commutatives à homotopie près" : les E_∞-algèbres (*cf.* [M]), puis les "algèbres de Lie à homotopie près" (*cf.* [HS, LS]).

Il se trouve qu'en fait une A_∞-algèbre est très précisément une $\mathbf{D}(\mathbf{As})$-algèbre où $\mathbf{D}(\mathcal{P})$ est l'opérade différentielle graduée construite au paragraphe 4. Puis on a démontré qu'une E_∞-algèbre est une $\mathbf{D}(\mathbf{Lie})$-algèbre, et une algèbre de Lie homotopique est une $\mathbf{D}(\mathbf{Com})$-algèbre (*cf.* [LS]).

En conclusion pour toute algèbre sur une opérade de Koszul $\mathcal{P}$ on a une notion d'*algèbre homotopique* : ce sont les $\mathbf{D}(\mathcal{P}^!)$-algèbres (voir par exemple [GeJ]).

5.2. Opérades cycliques [GeK1]. Une opérade $\mathcal{P}$ est dite *cyclique* si $\mathcal{P}(n)$ est en fait un S_{n+1}-module dont l'action supplémentaire de l'opérateur cyclique τ_{n+1} vérifie :

$$\tau_{m+n-1}(\mu \circ_m \nu) = \tau_n(\mu) \circ_1 \tau_m(\nu)$$

pour $\mu \in \mathcal{P}(m)$ et $\nu \in \mathcal{P}(n)$. Cette propriété permet de généraliser la notion de $*$-algèbre.

Par exemple **As**, **Lie** et **Com** sont cycliques, mais pas **Leib**. Pour une $\mathcal{P}$-algèbre A on peut alors définir 3 théories d'homologie, notées HA, HB et HC qui sont reliées entre elles par une longue suite exacte :

$$(**) \qquad \cdots \to HA_n(A) \to HB_n(A) \to HC_n(A) \to HA_{n-1}(A) \to \cdots$$

La cyclicité de $\mathcal{P}$ est la propriété qu'il faut pour pouvoir parler de *forme bilinéaire invariante* sur une $\mathcal{P}$-algèbre. La théorie HA est le foncteur dérivé non abélien de la forme bilinéaire invariante universelle.

Lorsque $\mathcal{P}$ est quadratique, la théorie HB s'exprime en fonction de $H_*^{\mathcal{P}}$: on a $HB_n(A) = H_n^{\mathcal{P}}(A, A)$.

Lorsque $\mathcal{P}$ est de Koszul, $HC_n(A)$ peut s'exprimer en fonction de la théorie HA pour $\mathcal{P}^!$. En particulier pour $\mathcal{P} = \mathbf{As}$, HC est l'homologie cyclique de Connes et l'égalité $\mathbf{As} = \mathbf{As}^!$ implique $HA_n = HC_{n-1}$. Ainsi la suite exacte $(**)$ s'identifie à la longue suite exacte de périodicité de Connes (*cf.* [C], [Lo1]) :

$$\cdots \to HC_{n-1} \to HH_n \to HC_n \to HC_{n-2} \to \cdots.$$

Pour $\mathcal{P} = \mathbf{Lie}$, la suite exacte $(**)$ s'identifie à la longue suite exacte d'homologie relative

$$\cdots \to HR_{n-2}(\mathfrak{g}) \to H_n(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \to H_{n+1}(\mathfrak{g}) \to \cdots$$

associée à la surjection $\mathfrak{g} \otimes \Lambda^n \mathfrak{g} \to \Lambda^{n+1} \mathfrak{g}$ (*cf.* [Pi] pour une utilisation de cette suite exacte).

Pour $\mathcal{P} = \mathbf{Com}$, Getzler et Kapranov utilisent la suite exacte $(**)$ pour démontrer les résultats suivants sur la S_n-représentation $\mathbf{Lie}(n)$:

a) $\mathbf{Lie}(n)$ est une S_{n+1}-représentation (*cf.* aussi [Ro], [K]).

b) On a un isomorphisme de S_{n+1}-représentations

$$\mathbf{Lie}(n+1) \cong \mathbf{Lie}(n) \otimes V_{n,1}$$

où $V_{n,1}$ est la représentation de dimension n associée à l'hyperplan $x_0 + x_1 + \cdots + x_n = 0$.

5.3. Espaces de Modules (Moduli spaces). Désignons par $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ l'espace de modules (de Grothendieck-Knudsen) des courbes de genre 0 marquées de n points. La famille $\mathcal{M} = \{\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1},\ n = 2, 3, \ldots\}$ est un $\mathbb{S}$-objet dans la catégorie (monoïdale symétrique) des variétés différentiables. Ginzburg et Kapranov montrent dans [GK] qu'une opérade $\mathbb{K}$-linéaire est un $\mathbb{S}$-faisceau sur $\mathcal{M}$. Pour d'autres liens entre espaces de modules et opérades on consultera [BG], [KM], [KSV].

5.4. Opérades modulaires [GeK2]. Un $\mathbb{S}$-*module stable* est une famille de complexes de chaînes $\{\mathcal{V}((g,n)) | n, g \geq 0\}$ munis d'une action de S_n sur $\mathcal{V}((g,n))$ et telle que $\mathcal{V}((g,n)) = 0$ si $2g + n - 2 \leq 0$. On peut étendre la structure de catégorie monoïdale des $\mathbb{S}$-modules aux $\mathbb{S}$-modules stables.

Par définition une *opérade modulaire* est une algèbre dans $\{\mathbb{S} - \text{mod stables}\}$. Dans la description du foncteur libre les arbres sont alors remplacés par les graphes (d'où l'apparition du "graph-complex" de Kontsevich). Ces opérades modulaires sont intimement reliées aux espaces de modules des courbes de genre > 0.

La connaissance exacte de la bar-construction de **Com** dans ce contexte impliquerait la détermination des dimensions des espaces d'invariants de Vassiliev (théorie des noeuds), *cf.* loc. cit.

5.5. Motifs. L'un des problèmes de la géométrie algébrique arithmétique est la construction de la catégorie des "motifs de Tate mixtes". Les opérades ont été utilisées comme outil fondamental pour construire un modèle de cette catégorie par S. Bloch et I. Kriz (*cf.* [BK]).

5.6. Opérades tressées. La catégorie $\mathbb{S} - mod$ est en fait la catégorie des foncteurs de $\mathbb{S}$ dans $\text{Vect}_{\mathbb{K}}$. On a beaucoup utilisé le fait que la catégorie monoïdale $\text{Vect}_{\mathbb{K}}$ est *symétrique*. Si on relâche cette hypothèse en remplaçant la catégorie monoïdale symétrique par une catégorie monoïdale *tressée* on obtient la notion d'*opérade tressée*. La bar-construction qui en résulte a déjà été étudiée dans [F].

5.7. Biopérades. La notion de co-opérade est assez immédiate par passage au dual linéaire. Par contre si on veut user en même temps d'opérations et de coopérations il faut travailler avec des *biopérations* :

$$\mathcal{P}(n,m) \otimes A^{\otimes m} \to A^{\otimes n}, m, n \geq 1.$$

On laisse le soin au lecteur d'écrire les axiomes de définition d'une *biopérade*.

5.8. Conclusion. Dès le départ on s'est placé sur un corps de caractéristique zéro. Une partie des résultats reste encore valable en caractéristique non nulle (*cf.* par exemple [GeJ], [KriM]), mais si l'on veut travailler avec des théories algébriques moins "linéaires", par exemple les groupes, il faut changer radicalement d'environnement. Dans cette direction on consultera avec profit les travaux de A. Joyal [J] et l'article [JP] de M. Jibladze et T. Pirashvili.

Références

[BG] A. Beilinson, V. Ginzburg, *Infinitesimal structure of moduli spaces of G-bundles*, Intern. Math. Res. Notices (appendix to Duke Math. J.) **66** (1992), 63–74.

[BGSc] A. Beilinson, V. Ginzburg, W. Schechtman, *Koszul Duality*, J. Geom. and Phys. **5** (1988), 317–350.

[BGSo] A. Beilinson, V. Ginzburg, W. Soergel, *Koszul Duality Patterns in Representation Theory*, J. Amer. Math. Soc. (to appear).

[BK] S. Bloch, I. Kriz, *Mixed Tate Motives*, Ann. of Math. 140 (1994), 557-605.

[BV] J.M. Boardman, R. Vogt, *Homotopy invariant algebraic structures on topological spaces*, Springer Lect. Notes in Math. 347, 1973.

[Bbki] N. Bourbaki, “Algèbre homologique”, (Ch. 10 de “Algèbre”), Masson Ed., 1980.

[Coh] F.R. Cohen, *The homology of C_{n+1}-spaces, $n \geq 0$*, Springer Lect. Notes in Math. **533** (1976), 207–351.

[C] A. Connes, *Non-commutative differential geometry*, Publ. Math. IHES **62** (1985) 257–360.

[F] Z. Fiedorowicz, *Symmetric bar-construction*, J. Pure App. Alg., to appear.

[Ge1] E. Getzler, *Batalin-Vilkovisky algebras and two-dimensional topological field theories*, Commun. Math. Phys. **159** (1994), 265–285.

[Ge2] E. Getzler, *Equivariant cohomology and topological gravity*, Commun. Math. Phys. **163** (1994), 473–490.

[Ge3] E. Getzler, *Operads and moduli spaces of genus 0 Riemann surfaces*, Proc. Texel Conf. on moduli spaces of algebraic curves, Prog. in Maths (Birkhäusher), to appear.

[GeJ] E. Getzler, J.D.S. Jones, *Operads, homotopy algebra, and iterated integrals for double loop spaces*, preprint (1994). (hep-th/9403055)

[GeK1] E. Getzler, M.M. Kapranov, *Cyclic operads and cyclic homology*, in “Geometry, Topology and Physics for Raoul”, ed. B. Mazur, Intern. Press, Cambridge MA 1994, to appear.

[GeK2] E. Getzler, M.M. Kapranov, *Modular operads*, preprint (1994). (dg-ga/9408003)

[GK] V. Ginzburg, M.M. Kapranov, *Koszul duality for operads*, Duke Math. J. 76 (1994), 203-272.

[Gn] V.A. Gnedbaye, *Les algèbres k-aires et leurs opérades.* C. R. Acad. Sci. Paris, t. 321, série I (1995), 147-152.

[Ha] P. Hanlon, communication personnelle.

[HW] P. Hanlon, M. Wachs, *On k-ary Lie algebras*, Adv. in Math. 113 (1995), 206-236.

[HS] V.A. Hinich, V.V. Schechtmann, *Homotopy Lie algebras*, in "I.M. Gelfand Seminar", Adv. Soviet. Math. **16**, part 2 (1993), 1–28.

[HL] Y.-Z. Huang, J. Lepowsky, *Vertex operators algebras and operads*, in "The Gelfand Mathematical Seminars, 1990-1992", Birkhauser (1993), 145–161.

[JP] M. Jibladze, T. Pirashvili, *Cohomology of algebraic theories*, J. Algebra **137** (1991), 253–296.

[J] A. Joyal, *Foncteurs analytiques et espèces de structures*, Springer Lect. Notes in Math. **1234** (1986), 126–159.

[KSV] T. Kimura, J.D. Stasheff, A.A. Voronov, *On operad structures on moduli spaces and string theory*, preprint RIMS **936**, 1993.

[K] M. Kontsevich, *Formal (non)commutative symplectic geometry*, in "The Gelfand Mathematical Seminars, 1990-1992", Birkhauser (1993), 173–187.

[KM] M. Kontsevich, Yu. Manin, *Gromov-Witten classes, quantum cohomology and enumerative geometry*, Commun. Math. Phys. **164** (1994), 525–562.

[KriM] I. Kriz, J.P. May, *Operads, algebras, modules and motives*, preprint 1994.

[LS] T. Lada, J. Stasheff, *Introduction to sh Lie algebras for physicists*, Intern. J. Th. Ph. **32** (1993), 1087–1103.

[La] M. Lazard, *Lois de groupes et analyseurs*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. Paris **62** (1955), 299–400.

[Lo1] J.-L. Loday, "Cyclic Homology" Grund. math. Wiss. **301**, Springer Verlag 1992.

[Lo2] J.-L. Loday, *Cup-product for Leibniz cohomology and dual Leibniz algebras*, Math. Scand. (to appear).

[LP] J.-L. Loday, and T. Pirashvili, *Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and (co)homology*, Math. Ann. **296** (1993), 291–338.

[Lö] C. Löfwall, *On the subalgebra generated by one dimensional elements in the Yoneda Ext-algebra*, Springer Lect. Notes in Maths **1183** (1986), 299–400.

[McL] S. MacLane, "Categories for the working mathematician", Springer Graduate Text in Maths **5**, 1971.

[M1] Y.I. Manin, *Some remarks on Koszul algebras and quantum groups*, Ann. Inst. Fourier **37** (1987), 191-205.

[M2] Y.I. Manin, *Quantum groups and non-commutative geometry*, Pub. Centre Rech. Math. Montréal, 1988.

[Mr1] M. Markl, *Models for operads*, preprint, 30 p., 1994.

[Mr2] M. Markl, *Distributive laws and the Koszulness*, preprint, 24 p., 1994.

[May] J.P. May, "The geometry of iterated loop spaces", Springer Lecture Notes in Math. **271**, 1972.

[Pi] T. Pirashvili, *On Leibniz homology*, Ann. Inst. Fourier **44** (1994), 401-411.

[P] S.B. Priddy, *Koszul resolutions*, Trans. AMS **152** (1970), 39–60.

[Q] D. Quillen, *Rational homotopy theory*, Ann. of Maths **90** (1969), 205–295.

[Re] C. Reutenauer, "Free Lie algebras", Oxford University Press, 1993.

[Ro] A. Robinson, *The space of fully-grown trees*, preprint Bielefeld (1992).

[S1] V.A. Smirnov, *Cohomology of B and $co - B$ construction*, preprint.

[S2] V.A. Smirnov, *Secondary operations in the homology of the operad E*, Russian Acad. Sci. Izv. Math. **40** (1993), 425–442.

[St] J.D. Stasheff, *Homotopy associativity of H-spaces, I., II*, Trans. Amer. Math. Soc. **108** (1963), 275–312.

Jean-Louis LODAY

Institut de Recherche Mathématique Avancée,
Université Louis Pasteur et CNRS,
7 rue René-Descartes,
F-67084 STRASBOURG, France

e-mail : loday@math.u-strasbg.fr