Espaces de lacets itérés et groupes symétriques

Clemens Berger

Ecole d'été, 16 juin - 4 juillet 1997, Grenoble

Table des matières

1 Reconnaître et reconstruire un espace de lacets itéré

1.1 Les petits cubes de Boardman-Vogt

Soit $Y = \Omega^n X = \mathrm{Top}_*(S^n, X)$ un espace de lacets n-fois itéré. La puissance k-ème de cet espace est alors également un espace fonctionnel, en effet :

$$Y^k = \mathrm{Top}_*(S^n, X)^k \cong \mathrm{Top}_*(\overbrace{S^n \vee S^n \vee \cdots \vee S^n}^{k \text{ fois}}, X)$$

Il s'ensuit que la composition définit une action

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Top}_*(S^n, \overset{k}{\bigvee} S^n) & \times & \mathrm{Top}_*(\overset{k}{\bigvee} S^n, X) & \to & \mathrm{Top}_*(S^n, X) \\
\| & & \| & & \| \\
Q_k^{(n)} & \times & Y^k & \to & Y \\
 & & & & \\
(\gamma & ; & y_1, \ldots, y_k) & \mapsto & (y_1 \vee \cdots \vee y_k) \circ \gamma
\end{array}$$

Les éléments de $Q_k^{(n)} = \mathrm{Top}_*(S^n, \overset{k}{\bigvee} S^n)$ définissent donc des opérations k-aires $Y^k \to Y$ sur tout espace de lacets n-fois itéré Y.

La famille $Q^{(n)} = (Q_k^{(n)})_{k \geq 1}$ constitue en particulier une *opérade* de sorte que l'ensemble des actions $Q_k^{(n)} \times Y^k \to Y$ munit l'espace de lacets n-fois itéré Y d'une structure de $Q^{(n)}$-*espace.*

Précisons les définitions que nous adopterons dans la suite :

Définition 1.1. Soit Λ la catégorie dont les objets sont les entiers naturels non nuls et dont les morphismes $\phi \in \Lambda(k, l)$ sont les applications *injectives*

$$\phi : \{1 \ldots, k\} \to \{1, \ldots, l\}.$$

Une *préopérade* est alors un foncteur contravariant $\mathcal{O} : \Lambda \to \mathrm{Top}$. Une *opérade* est une préopérade munie d'une *unité* $1 \in \mathcal{O}_1$ et d'une *multiplication*

$$\begin{array}{rcl}
\mu_{i_1 \ldots i_k} : \mathcal{O}_k \times \mathcal{O}_{i_1} \times \cdots \times \mathcal{O}_{i_k} & \to & \mathcal{O}_{i_1 + \cdots + i_k} \\
(z; z_1, \ldots, z_k) & \mapsto & z(z_1, \ldots, z_k)
\end{array}$$

telles que les axiomes suivants de naturalité, d'associativité et d'unitarité soient satisfaits :

(a) pour $(\phi;\phi_1,\ldots,\phi_k)\in\Lambda(k,l)\times\Lambda(i_1,j_{\phi(1)})\times\cdots\times\Lambda(i_k,j_{\phi(k)})$ le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_k\times\mathcal{O}_{i_1}\times\cdots\times\mathcal{O}_{i_k} \arrow[r, "\mu_{i_1\cdots i_k}"] & \mathcal{O}_{i_1+\cdots+i_k} \\
\mathcal{O}_l\times\mathcal{O}_{j_1}\times\cdots\times\mathcal{O}_{j_l} \arrow[r, "\mu_{j_1\cdots j_l}"] \arrow[u, "\phi^*\times\phi_1^*\times\cdots\times\phi_k^*"] & \mathcal{O}_{j_1+\cdots+j_l} \arrow[u, "\phi(\phi_1,\ldots,\phi_k)^*"']
\end{tikzcd}$$

(b) pour $(z,z_i,z_{ij})\in\mathcal{O}_k\times\prod_{i=1}^k\mathcal{O}_{s_i}\times\prod_{i=1}^k\prod_{j=1}^{s_i}\mathcal{O}_{s_{ij}}$:

$$\begin{aligned}&z(z_1(z_{11},\ldots,z_{1s_1}),\ldots,z_k(z_{k1},\ldots,z_{ks_k}))\\ =\;&(z(z_1,\ldots,z_k))(z_{11},\ldots,z_{1s_1},\ldots,z_{k1},\ldots,z_{ks_k})\end{aligned}$$

(c) pour $z\in\mathcal{O}_k$: $1(z)=z=z(\overbrace{1,\ldots,1}^{k\text{ fois}})$

Un *morphisme de préopérades* $f:\mathcal{O}\to\mathcal{O}'$ est une transformation naturelle de foncteurs. Nous dirons que f est une Λ-*équivalence* si, pour tout p, l'application induite $f_p:\mathcal{O}_p\to\mathcal{O}'_p$ est une équivalence d'homotopie. Deux préopérades sont dites *équivalentes* si elles sont reliées par une suite finie de Λ-équivalences. Deux opérades sont dites équivalentes si elles sont reliées par une suite finie de Λ-équivalences *multiplicatives*.

Pour tout $\phi\in\Lambda(k,l)$, l'opération *contravariante* $\phi^*:\bigvee^l S^n\to\bigvee^k S^n$ définie par $\phi^*(s_1\vee\cdots\vee s_l)=(s_{\phi(1)}\vee\cdots\vee s_{\phi(k)})$ induit une Λ-structure sur $Q^{(n)}$; l'unité $1\in Q_1^{(n)}$ est donnée par id_{S^n} et la multiplication

$$Q_k^{(n)}\times Q_{i_1}^{(n)}\times\cdots\times Q_{i_k}^{(n)}\to Q_{i_1+\cdots+i_k}^{(n)}$$

s'obtient comme ci-dessus par composition $\gamma(\gamma_1,\ldots\gamma_k)=(\gamma_1\vee\cdots\vee\gamma_k)\circ\gamma$. L'*action* $Q_k^{(n)}\times Y^k\to Y$ de l'opérade $Q^{(n)}$ sur un espace de lacets n-fois itéré Y vérifie alors des axiomes de naturalité, d'associativité et d'unitarié compatibles avec (a), (b) et (c) ci-dessus.

La *suspension* définit un morphisme d'opérades $Q^{(n)}\to Q^{(n+1)}$. Par passage à la limite inductive, cela définit une opérade que nous noterons Q et qui opère sur des *espaces de lacets infinis*. En particulier

$$Q_1=\varinjlim{}_n Q_1^{(n)}=\varinjlim{}_n\Omega^nS^n=\Omega^\infty S^\infty.$$

L'opérade $Q^{(n)}$ contient toute la structure interne d'un espace de lacets n-fois itéré, mais elle est (dans un premier temps) trop grande pour donner des renseignements concrets. C'était l'idée de Boardman-Vogt et de May qu'une sous-opérade relativement petite de $Q^{(n)}$ reflétait bien mieux les symétries inhérentes à un espace de lacets n-fois itéré. Considérons pour cela le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
S^n & \xrightarrow{\gamma} & \bigvee^k S^n \\
\| & & \| \\
[0,1]^n/\partial[0,1]^n & \xrightarrow{\gamma} & \bigvee^k\big([0,1]^n/\partial[0,1]^n\big) \\
\cup & & \cup \\
\coprod_{i=1}^k \gamma^{-1}(]0,1[^n_{(i)}) & \xrightarrow{\gamma} & \coprod_{i=1}^k]0,1[^n_{(i)}
\end{array}$$

L'application $\gamma \in Q_k^{(n)}$ est uniquement déterminée par sa restriction aux préimages $\gamma^{-1}(]0,1[^n_{(i)})$ des k intérieurs du n-cube standard $[0,1]^n$.

L'*opérade* $\mathcal{C}^{(n)}$ *des petits n-cubes* de Boardman-Vogt est alors définie comme étant la sous-opérade de $Q^{(n)}$ formée par tous les γ qui sont *affines* en restriction à $\coprod_{i=1}^k \gamma^{-1}(]0,1[^n_{(i)})$ de sorte que chaque préimage $\gamma^{-1}(]0,1[^n_{(i)})$ soit un *petit n-cube* inclus dans $]0,1[^n$ avec des axes parallèles au repère canonique (mais des côtés de longueur éventuellement differente). Il s'agit de vérifier que toute la structure d'opérade de $Q^{(n)}$ se restreint à $\mathcal{C}^{(n)}$. Cela est immédiat pour la Λ-structure et l'unité. Quant à la multiplication, il s'agit de vérifier que pour $(\gamma;\gamma_1,\dots,\gamma_k) \in \mathcal{C}_k^{(n)} \times \mathcal{C}_{i_1}^{(n)} \times \cdots \times \mathcal{C}_{i_k}^{(n)}$ la composition $\gamma(\gamma_1,\dots,\gamma_k) \in Q^{(n)}_{i_1+\cdots+i_k}$ correspond à la configuration des $i_1+\cdots+i_k$ petits n-cubes dans $]0,1[^n$ obtenue en *substituant* aux k petits n-cubes de γ les k *configurations* associées à $\gamma_1,\dots,\gamma_k$. Géométriquement, la multiplication de l'opérade des petits n-cubes est donc un produit de substitution.

En choisissant convenablement l'homéomorphisme $S^n \cong [0,1]^n/\partial[0,1]^n$, la suspension $Q^{(n)} \to Q^{(n+1)}$ induit une *inclusion* $\mathcal{C}^{(n)} \hookrightarrow \mathcal{C}^{(n+1)}$ associant à la configuration de petits n-cubes $\gamma \in \mathcal{C}_k^{(n)}$ la configuration de petits $(n+1)$-cubes $\gamma \times id_{]0,1[} \in \mathcal{C}_k^{(n+1)}$.

Le *type d'homotopie* $\mathfrak{S}_k$*-équivariante* de $\mathcal{C}_k^{(n)}$ se détermine le mieux à travers l'équivalence de *préopérades*

$$\mathcal{C}_k^{(n)} \to F(]0,1[^n,k) \cong F(\mathbb{R}^n,k)$$

qui fait correspondre à une configurations de k petits n-cubes (2-à-2 disjoints) la configuration des *barycentres* de ces petits cubes. L'inverse homotopique s'obtient par le "remplissage optimal" de $]0,1[^n$ par des "boules ouvertes" centrées en la configuration de points donnée pour la norme l^∞. La seule information perdue dans ce passage aux espaces de configurations $F(\mathbb{R}^n, k)$ est donc la structure *multiplicative* de l'opérade des petits n-cubes.

1.2 Complétion en groupe d'un H-espace associatif

Nous visons une réciproque au fait que tout espace de lacets n-fois itéré est un $Q^{(n)}$-espace et donc (par restriction de l'action) un $\mathcal{C}^{(n)}$-espace. Pour cela, il s'avère nécessaire de bien comprendre le cas des espaces de lacets simples. Tout espace de lacets X est un *H-espace associatif* en ce sens que la composition de lacets munit X d'un produit qui est *à homotopie près* unitaire et associatif; les travaux fondamentaux de Stasheff montrent comment rendre rigoureux le descriptif "à homotopie près" pour en déduire la structure précise qui permette de contruire le délacement cherché, i.e. l'espace *classifiant* de X. Les *$\mathcal{C}^{(1)}$-espaces* représentent une version opéradique des *A_∞-espaces* de Stasheff et ce sont eux qui nous serviront de H-espaces associatifs dans tout ce qui suit.

Les *composantes connexes* $\pi_0(\mathcal{C}^{(1)})$ de l'opérade $\mathcal{C}^{(1)}$ des petits intervalles dans $]0,1[$ définissent une opérade discrète, dite l'*opérade des permutations* et notée $\mathfrak{S} = (\mathfrak{S}_k)_{k\geq 1}$, où $\mathfrak{S}_k$ désigne le groupe symétrique $\Lambda(k,k)$.

Sa Λ-structure découle de la *factorisation unique* des morphismes $\psi \in \Lambda(k,l)$ en le composé d'une bijection $\psi^\natural \in \Lambda(k,k)$ suivi d'un morphisme croissant $\psi^{cr} \in \Lambda(k,l)$ (vérifiant $\psi^{cr}(i) < \psi^{cr}(j)$ si $i<j$). En effet, pour $\phi \in \Lambda(k,l)$ on obtient $\phi^* : \mathfrak{S}_l \to \mathfrak{S}_k : \sigma \mapsto (\sigma\phi)^\natural$. La multiplication $\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{i_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{i_k} \to \mathfrak{S}_{i_1+\cdots+i_k}$ est donnée par

$$\sigma(\sigma_1, \ldots, \sigma_k) = \sigma(i_1, \ldots, i_k) \circ (\sigma_1 \oplus \cdots \oplus \sigma_k),$$

où $\sigma(i_1,\ldots,i_k) \in \mathfrak{S}_{i_1+\cdots+i_k}$ permute les k blocs successifs de taille $i_1, i_2, \ldots, i_k$ selon σ.

Lemme 1.2. *La catégorie des $\mathfrak{S}$-espaces s'identifie à la catégorie des monoïdes topologiques.*

Preuve. – Étant donnée une structure multiplicative sur un espace X, l'action de l'opérade des permutations est définie par $\mathfrak{S}_k \times X^k \to X$:

$(\sigma; x_1, \ldots, x_k) \mapsto x_{\sigma^{-1}(1)} x_{\sigma^{-1}(2)} \cdots x_{\sigma^{-1}(k)}$. Étant donnée une $\mathfrak{S}$-action sur X, le produit est défini par $x_1 x_2 = id_2(x_1, x_2)$. L'associativité du produit correspond en particulier à l'égalité $id_2(id_2, id_1) = id_2(id_1, id_2)$ dans $\mathfrak{S}_3$. □

Comme le foncteur π_0 commute avec le produit cartésien, les composantes connexes d'un $\mathcal{C}^{(1)}$-espace admettent une $\mathfrak{S}$-action, i.e. pour tout $\mathcal{C}^{(1)}$-espace X, l'ensemble $\pi_0(X)$ est un monoïde ! Mais la structure de $\mathcal{C}^{(1)}$-espace est plus riche. En effet, le morphisme d'opérades $\pi_0 : \mathcal{C}^{(1)} \to \mathfrak{S}$ est une *équivalence d'opérades*, ce qui nous permet d'appliquer le lemme suivant :

Lemme 1.3. (Segal's pushdown lemma, cf. Hollender-Vogt)
Soit X un $\mathcal{O}$-espace et soit $f : \mathcal{O} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}'$ une équivalence d'opérades. Il existe alors un $\mathcal{O}'$-espace X' et une équivalence d'homotopie $\tilde{f} : X \xrightarrow{\sim} X'$ qui soit un morphisme de $\mathcal{O}$-espaces.

Preuve. – Toute opérade $\mathcal{O}$ définit un endofoncteur $\mathcal{O}(-)$ de la catégorie Top_* associant à l'espace pointé $(X, *)$ le $\mathcal{O}$-espace libre $\mathcal{O}(X)$ engendré par $(X, *)$, cf. 1.10. La structure multiplicative de l'opérade $\mathcal{O}$ induit alors une unité $\eta_X : X \to \mathcal{O}(X)$ et un produit $\mu_X : \mathcal{O}^2(X) \to \mathcal{O}(X)$ qui font de l'endofoncteur $\mathcal{O}(-)$ ce qu'on appelle une *monade* (i.e. un monoïde de la catégorie des endofoncteurs de Top_*). Il existe en particulier une construction bar généralisée (une sorte de résolution fonctorielle de tout espace pointé par un espace simplicial), dont la réalisation géométrique est notée $\mathcal{B}(\mathcal{O}, \mathcal{O}, X)$ d'après May. Cette construction est contravariante dans le premier argument et covariante dans les deux derniers arguments. Modulo quelques précautions quant aux opérateurs de dégénérescence, l'équivalence d'homotopie f induit alors une équivalence d'homotopie

$$\tilde{f} = \mathcal{B}(f, \mathcal{O}', X) : \mathcal{B}(\mathcal{O}', \mathcal{O}', X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(\mathcal{O}, \mathcal{O}', X) = X'.$$

La source de cette équivalence d'homotopie contient X comme rétracte de déformation (cela correspond a l'existence de l'opérateur de contraction dans la constrution bar acyclique). □

Corollaire 1.4. *Tout $\mathcal{C}^{(1)}$-espace X admet une $\mathcal{C}^{(1)}$-approximation $\tilde{f} : X \xrightarrow{\sim} X'$ par un monoïde topologique X'.* □

La structure monoïdale sur X' permet la construction de l'espace *classifiant* BX' et d'une application canonique $X' \to \Omega BX'$ induisant la *complétion en groupe universelle* du monoïde $\pi_0(X')$ en le groupe $\pi_0(\Omega BX')$; en outre, si

$\pi_0(X')$ est déjà un groupe, alors $X' \to \Omega BX'$ est une équivalence d'homotopie faible. Il s'agit donc ici d'une "complétion topologique en groupe". Il n'est cependant pas facile de donner un sens précis à ce terme. Nous suivons en cela la terminologie de May :

Définition 1.5. Soit $f : X \to Y$ un morhisme de $\mathcal{C}^{(1)}$-espaces. L'application f est une *complétion en groupe* si $\pi_0(f) : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ identifie $\pi_0(Y)$ à la complétion en groupe universelle du monoïde $\pi_0(X)$ et si pour tout anneau de coefficients A, le morphisme d'homologie $H_*(f;A) : H_*(X;A) \to H_*(Y;A)$ identifie $H_*(Y;A)$ à la localisation de l'algèbre d'homologie $H_*(X;A)$ par rapport au système multiplicatif $\pi_0(X)$.

Remarque 1.6. Si $\pi_0(X)$ est déja un groupe, alors $H_*(f;A)$ est un isomorphisme d'algèbres graduées, ce qui implique (par une version du théorème de Whitehead adaptée aux H-espaces) que f est une équivalence d'homotopie faible. Si $\pi_0(X)$ n'est pas un groupe, mais appartient au *centre* de l'algèbre d'homologie $H_*(X;A)$, alors la localisation par rapport à $\pi_0(X)$ s'identifie à l'extension $H_*(X;A)\otimes_{A[\pi_0(X)]} A[\widehat{\pi_0(X)}]$ où $\widehat{\pi_0(X)}$ est la complétion en groupe universelle de $\pi_0(X)$. La composante neutre de cette extension s'écrit alors comme une limite inductive de copies de $H_*(X;A)$ par rapport à l'action d'un système générateur de $\pi_0(X)$. Ceci permet de décrire l'homologie de la composante neutre Y_e de l'espace complété Y comme l'homologie d'une limite inductive analogue X_∞ de copies de X. On dispose en particulier d'un morphisme *acyclique* $X_\infty \to Y_e$ qui (du fait que Y est un H-espace) identifie Y_e à la *construction plus* X_∞^+ de Quillen. En définitif, on obtient une équivalence d'homotopie faible

$$\widehat{\pi_0(X)} \times X_\infty^+ \xrightarrow{\sim} Y$$

exprimant le type d'homotopie du complété Y uniquement en fonction de X.

Théorème 1.7. (Stasheff, Barratt-Priddy, MacDuff-Segal)
Tout $\mathcal{C}^{(1)}$-espace X admet un classifiant BX et un morphisme de $\mathcal{C}^{(1)}$-espaces $X \to \Omega BX$ qui est une équivalence d'homotopie faible si $\pi_0(X)$ est un groupe, et une complétion en groupe si le monoïde $\pi_0(X)$ appartient au centre de l'algèbre d'homologie $H_*(X;\mathbb{Z})$.

Remarque 1.8. Le théorème de complétion en groupe ne peut pas être valide sans restriction sur le $\mathcal{C}^{(1)}$-espace X, comme le montre le théorème surprenant de Dusa McDuff, qui dit que tout espace connexe a le type d'homotopie faible du classifiant d'un monoïde *discret* convenablement choisi.

1.3 Théorèmes de détection et d'approximation

Tout $\mathcal{C}^{(n)}$-espace est un $\mathcal{C}^{(1)}$-espace et de ce fait muni d'une structure de H-espace associatif. S'y ajoutent cependant (avec n croissant) des relations de commutativité à homotopie près qui sont difficiles à "discrétiser" et dont la trace visible est le fait bien connu que les composantes connexes d'un espace de lacets n-fois itéré forment un groupe abélien dès que $n \geq 2$. Le théorème fondamental ci-dessous montre que la structure de $\mathcal{C}^{(n)}$-espace non seulement suffit pour *reconnaître* (à complétion en groupe près) un espace de lacets n-fois itéré, mais également sert à *reconstruire* les objets libres parmi les espaces de lacets n-fois itérés. Les preuves montrent en effet que la détection passe par l'approximation des objets libres.

Théorème 1.9. (May, Cohen, Segal, Smith). – *Soit* $1 \leq n \leq \infty$.

(a) Pour tout espace pointé X*, il existe une* $\mathcal{C}^{(n)}$*-complétion en groupe*

$$\mathcal{C}^{(n)}(X) \to \Omega^n S^n X.$$

(b) Tout $\mathcal{C}^{(n)}$*-espace* X *admet un* n*-classifiant* $B_n X$ *et un* $\mathcal{C}^{(n)}$*-morphisme* $X \to \Omega^n B_n X$ *qui est une complétion en groupe pour* $n \geq 2$. □

Remarque 1.10. La construction du $\mathcal{C}^{(n)}$-espace libre

$$\begin{aligned}\mathcal{C}^{(n)}(X) &= \mathcal{C}^{(n)} \otimes_\Lambda X^- \\ &= \Big(\coprod_{k\geq 1} \mathcal{C}_k^{(n)} \times X^k\Big)/\big((\phi^*(y), x) \sim (y, \phi_*(x))\big)_{x\in X^k, y\in\mathcal{C}_l^{(n)}, \phi\in\Lambda(k,l)},\end{aligned}$$

n'utilise que la structure de préopérade de $\mathcal{C}^{(n)}$. La propriété d'approximation ne dépend donc pas de la structure multiplicative de l'opérade et s'étend à toute préopérade équivalente à $\mathcal{C}^{(n)}$ (en particulier aux espaces de configurations $F(\mathbb{R}^n, -)$).

Si l'on veut étendre le théorème de détection à d'autres opérades, bien plus de précautions sont de mise. En effet, la preuve de $(a) \Rightarrow (b)$ utilise que l'approximation $\mathcal{C}^{(n)}(X) \to \Omega^n S^n X$ transforme la multiplication des petits n-cubes en la multiplication de l'adjonction entre les foncteurs S^n et Ω^n (bref: $\mathcal{C}^{(n)} \to \Omega^n S^n$ est une transformation de monades). Ceci est une propriété tout-à-fait propre à l'opérade des petits n-cubes et il est difficile d'exhiber pour d'autres opérades même équivalentes à $\mathcal{C}^{(n)}$ une approximation analogue. La stratégie qu'on adopte est de remplacer l'*espace* sur lequel agit une opérade $\mathcal{O}$ équivalente à $\mathcal{C}^{(n)}$. Le pushdown-lemma de Segal montre en effet qu'on peut remplacer chaque $\mathcal{O}$-espace X par un $\mathcal{C}^{(n)}$-espace X' qui lui soit (faiblement) équivalent, donc le théorème de détection s'applique à X par l'intermédiaire de X'. Ceci rend raisonnable la définition suivante :

Définition 1.11. Une *E_n-opérade* est une opérade équivalente à l'opérade des petits n-cubes de Boardman-Vogt.

Le chapitre suivant servira à donner une description combinatoire de la structure cellulaire d'une E_n-opérade qui soit à la fois assez précise pour qu'on puisse l'utiliser et assez large pour qu'elle comprenne la plupart des E_n-opérades connues.

1.4 Trois exemples : $\Omega S, \Omega^2 S^2$ et $\Omega^\infty S^\infty$

(a) Le modèle de James.

On obtient les équivalences faibles suivantes, où $(-)\hat{}$ désigne la complétion en groupe :

$$\Omega S^1 = \Omega S(S^0) \sim \mathcal{C}^{(1)}(S^0)\hat{} \sim \big((\coprod_{k\geq 1} F(\mathbb{R},k) \times (S^0)^k)/\sim\big)\hat{}$$

$$= \big(* \sqcup \coprod_{k\geq 1} F(\mathbb{R},k)/\mathfrak{S}_k\big)\hat{} \sim \mathbb{N}\hat{} = \mathbb{Z}$$

Un calcul analogue donne pour un espace pointé quelconque $(X,*)$ que ΩSX a le même type d'homotopie faible que le complété du modèle de James $J(X)$, i.e. du monoïde libre engendré par $(X,*)$. En particulier, si X est connexe (donc $\pi_0(X)$ est un groupe !), alors on n'a pas besoin d'une complétion en groupe et l'algèbre d'homologie $H_*(\Omega SX;\mathbb{Z})$ s'identifie à l'algèbre tensorielle $T\tilde{H}_*(X;\mathbb{Z})$ sur l'homologie réduite de X.

(b) Le classifiant du groupe de tresses infini.

Nous noterons B_k le groupe des tresses à k brins et nous rappelons que l'espace des configurations de k points non ordonnés du plan constitue un espace classifiant pour le groupe de tresses B_k. Il s'ensuit que

$$\Omega^2 S^2 = \Omega^2 S^2(S^0) \sim \mathcal{C}^{(2)}(S^0)\hat{} \sim \big((\coprod_{k\geq 1} F(\mathbb{R}^2,k) \times (S^0)^k)/\sim\big)\hat{}$$

$$= \big(* \sqcup \coprod_{k\geq 1} F(\mathbb{R}^2,k)/\mathfrak{S}_k \big)\widehat{\ } = \big(* \sqcup \coprod_{k\geq 1} BB_k \big)\widehat{\ } \sim \mathbb{Z} \times BB_\infty^+$$

Pour la dernière équivalence voir la remarque 1.8; en effet, la complétion homologique de la composante neutre se fait par une limite inductive $BB_\infty = \varinjlim_n BB_n$. En particulier, nous obtenons l'isomorphisme d'algèbres

$$H_*(\Omega^2 S^2_{(e)}; \mathbb{Z}) \cong H_*(B_\infty; \mathbb{Z}),$$

un résultat classique dû à G. Segal et F. Cohen.

(c) L'ESPACE CLASSIFIANT DU GROUPE SYMÉTRIQUE INFINI.

L'espace des configurations $F(\mathbb{R}^n,k)$ est $(n-2)$-connexe puisqu'il s'identifie au complémentaire d'un arrangement de sous-espaces vectoriels de codimension n dans $\mathbb{R}^{nk}$. Cela implique en particulier que $F(\mathbb{R}^\infty,k)$ est un espace contractile muni d'une $\mathfrak{S}_k$-action libre, donc l'espace des configurations de k points non ordonnés de $\mathbb{R}^\infty$ est un espace classifiant pour le groupe symétrique $\mathfrak{S}_k$. Il s'ensuit que

$$\Omega^\infty S^\infty = \Omega^\infty S^\infty(S^0) \sim \mathcal{C}^{(\infty)}(S^0)\widehat{\ } \sim \big((\coprod_{k\geq 1} F(\mathbb{R}^\infty,k) \times (S^0)^k)/\sim \big)\widehat{\ }$$

$$= \big(* \sqcup \coprod_{k\geq 1} F(\mathbb{R}^\infty,k)/\mathfrak{S}_k \big)\widehat{\ } = \big(* \sqcup \coprod_{k\geq 1} B\mathfrak{S}_k \big)\widehat{\ } \sim \mathbb{Z} \times B\mathfrak{S}_\infty^+$$

Cette équivalence est connue comme *théorème de Barratt-Priddy-Quillen.* Nous obtenons en particulier l'isomorphisme d'algèbres

$$H_*(\Omega^\infty S^\infty_{(e)}; \mathbb{Z}) \cong H_*(\mathfrak{S}_\infty; \mathbb{Z})$$

dont il sera question au troisième chapitre.

2 Structure cellulaire des E_n-opérades

2.1 Décomposition cellulaire des espaces de configurations réels

Fixons $n \geq 1$ et considérons la préopérade des espaces de configurations $F(\mathbb{R}^n, k)$. Pour $1 \leq i < j \leq k$, on a les morphismes structurels

$$\phi_{ij}^* : F(\mathbb{R}^n, k) \to F(\mathbb{R}^n, 2) : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_i, x_j)$$

qui nous ramènent dans un premier temps à l'étude de l'espace des configurations $F(\mathbb{R}^n, 2)$ (qui est important puisqu'il correspond à $\mathcal{C}_2^{(n)}$, l'espace des structures multiplicatives d'un espace de lacets n-fois itéré !) Or, on dispose d'une rétraction par déformation $\mathfrak{S}_2$-équivariante :

$$\begin{array}{ccc} F(\mathbb{R}^n, 2) & \xrightarrow{\rho} & S^{n-1} \\ (x_1, x_2) & \mapsto & \frac{x_2 - x_1}{\|x_2 - x_1\|} \end{array}$$

La $(n-1)$-sphère admet une décomposition $\mathfrak{S}_2$-équivariante en hémisphères $S^{n-1} = S^0_+ \cup S^0_- \cup \cdots \cup S^{n-1}_+ \cup S^{n-1}_-$ induisant par ρ^{-1} la décomposition suivante de l'espace de configurations :

$$F(\mathbb{R}^n, 2) = \bigcup_{(\mu,\sigma) \in \mathcal{K}_2^{(n)}} F_2^{(\mu,\sigma)}, \text{ où}$$

$$\mathcal{K}_2^{(n)} = \{0, 1, \ldots, n-1\} \times \mathfrak{S}_2,$$

$$F_2^{(\mu,\sigma)} = \{(x_1, x_2) \in F(\mathbb{R}^n, 2) \mid x_{\sigma^{-1}(2)} - x_{\sigma^{-1}(1)} \in \mathbb{R}^\mu \times \mathbb{R}_+ \times 0 \times \cdots \times 0\}.$$

Comme pour les hémisphères, on a l'équivalence

$$F_2^{(\mu,\sigma)} \subseteq F_2^{(\nu,\tau)} \Leftrightarrow \mu < \nu \text{ ou } (\mu, \sigma) = (\nu, \tau).$$

En outre, toute "cellule" $F_2^{(\mu,\sigma)}$ forme un sous-espace *fermé* et *contractile* de $F(\mathbb{R}^n, 2)$. Ceci nous amène à poser la définition suivante :

Définition 2.1. Soit A un ensemble partiellement ordonné indexant une famille $(c_\alpha)_{\alpha \in A}$ de sous-espaces fermés et contractiles de l'espace topologique X. Nous dirons que $(c_\alpha)_{\alpha \in A}$ forme une A-decomposition cellulaire de X si

1. $c_\alpha \subseteq c_\beta \Leftrightarrow \alpha \leq \beta$;

2. les inclusions de cellules sont des cofibrations ;

3. l'espace X s'identifie à la limite inductive $\varinjlim_{\alpha\in A} c_\alpha$.

Lemme 2.2. *Si un espace topologique X admet une A-décomposition cellulaire, alors X a le même type d'homotopie "cellulaire" que $|\mathcal{N}A|$.*

Preuve. Le nerf $\mathcal{N}A$ de la catégorie A s'identifie à la colimite homotopique h-$\varinjlim_A *$ du foncteur constant défini sur A. Le diagramme suivant donne alors l'équivalence d'homotopie cherchée :

$$X = \varinjlim_A c_\alpha \xleftarrow{p_1} \text{h-}\varinjlim_A c_\alpha \xrightarrow{p_2} \text{h-}\varinjlim_A |*| = |\mathcal{N}A|.$$

Comme les inclusions de cellules sont des cofibrations, la projection p_1 est une équivalence d'homotopie et comme les cellules c_α sont contractiles, il en est de même de la projection p_2. Par définition même, les deux projections préservent la structure cellulaire ; comme la première est une fibration, elle admet en outre un inverse homotopique qui respecte la structure cellulaire. □

Nous obtenons comme corollaire que la $(n-1)$-sphère a le même type d'homotopie que le nerf de $\mathcal{K}_2^{(n)}$. L'intérêt de cette représentation un peu recherchée du type d'homotopie de $F(\mathbb{R}^n, 2)$ est qu'elle admet une généralisation à tous les espaces de configurations $F(\mathbb{R}^n, k)$:

Définition 2.3. Soit $\mathcal{K}_k^{(n)} = \{0, 1, \ldots, n-1\}^{\binom{k}{2}} \times \mathfrak{S}_k$, où nous noterons les éléments du premier facteur avec un double indice : $\mu = (\mu_{ij})_{1\leq i<j\leq k}$.

$$(\mu,\sigma) \leq (\nu,\tau) \overset{def}{\iff} \forall 1 \leq i < j \leq k : \phi_{ij}^*(\mu,\sigma) \leq \phi_{ij}^*(\nu,\tau)$$

$$F_k^{(\mu,\sigma)} = \{(x_1, \ldots, x_k) \in F(\mathbb{R}^n, k) \mid (x_i, x_j) \in F_2^{\phi_{ij}^*(\mu,\sigma)}, 1 \leq i < j \leq k\}$$
$$\mathcal{K}(F)_k^{(n)} = \{(\mu,\sigma) \in \mathcal{K}_k^{(n)} \mid F_k^{(\mu,\sigma)} \neq \bigcup_{(\nu,\tau)<(\mu,\sigma)} F_k^{(\nu,\tau)}\},$$

les cellules du dernier type étant appelées cellules d'*intérieur non vide.*

Proposition 2.4. *Les cellules d'intérieur non vide de l'espace des configurations $F(\mathbb{R}^n, k)$ forment une $\mathcal{K}(F)_k^{(n)}$-décomposition cellulaire vérifiant :*
(a) L'ensemble partiellement ordonné $\mathcal{K}(F)_k^{(n)}$ peut être caractérisé par

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(F)_k^{(n)} &= \{\alpha \in \mathcal{K}_p \mid \alpha_{ik} = \max(\alpha_{ij}, \alpha_{jk}) \textit{ pour } i < j < k\} \\ &= \{\alpha \in \mathcal{K}_p \mid \alpha_{ij} = \max_{i\leq k<j} \alpha_{kk+1}\},\end{aligned}$$

où pour $\alpha = (\mu, \sigma) \in \mathcal{K}_k^{(n)}$, *on pose* $\alpha_{ij} = \begin{cases} \mu_{\sigma^{-1}(i),\sigma^{-1}(j)} \text{ si } \sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j) \\ \mu_{\sigma^{-1}(j),\sigma^{-1}(i)} \text{ si } \sigma^{-1}(j) < \sigma^{-1}(i) \end{cases}$

(b) La cellule $F_k^{(\mu,\sigma)}$ *pour* $\alpha = (\mu, \sigma) \in \mathcal{K}(F)_k^{(n)}$ *est donnée par*

$$F_k^{(\mu,\sigma)} = \{(x_1, \ldots, x_k) \in F(\mathbb{R}^n, k) \mid x_{\sigma^{-1}(1)} \underset{\alpha_{12}}{\leq} x_{\sigma^{-1}(2)} \underset{\alpha_{23}}{\leq} \cdots \underset{\alpha_{k-1,k}}{\leq} x_{\sigma^{-1}(k)}\}.$$

(c) L'inclusion de $\mathcal{K}(F)_k^{(n)}$ *dans* $\mathcal{K}_k^{(n)}$ *induit une* Λ*-équivalence de préopérades. Toute préopérade intermédiaire* $\mathcal{K}'$ *décompose l'inclusion en deux* Λ*-équivalences* $\mathcal{K}(F)^{(n)} \overset{\sim}{\hookrightarrow} \mathcal{K}' \overset{\sim}{\hookrightarrow} \mathcal{K}^{(n)}$. □

Le point essentiel dans la preuve de la proposition précédente est la contractibilité des cellules d'intérieur non vide; en effet, chaque cellule d'intérieur non vide se contracte sur n'importe lequel de ses points "intérieurs".

2.2 L'opérade du graphe complet coloré

Avons-nous perdu la structure multiplicative des E_n-opérades en nous restreignant aux espaces de configurations ? Heureusement non, et ceci grâce à une décomposition cellulaire de l'opérade des petits n-cubes, découverte par *Z. Fiedorowicz*. Signalons d'abord que la famille $\mathcal{K}^{(n)} = (\mathcal{K}_k^{(n)})_{k\geq 1}$ forme une *opérade* dans la catégorie des ensembles partiellement ordonnés que nous appellerons *l'opérade du graphe complet n-coloré*. En effet, les éléments $(\mu, \sigma) \in \mathcal{K}_k^{(n)}$ s'interprètent de manière naturelle comme *colorations des arêtes du graphe complet à k sommets* avec des couleurs μ_{ij} prises dans $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. La permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ s'interprète comme une *orientation acyclique* des arêtes selon l'ordre total $\sigma^{-1}(1) \to \sigma^{-1}(2) \to \cdots \to \sigma^{-1}(k)$. L'ordre partiel sur $\mathcal{K}_k^{(n)}$ prend alors la forme suivante : la coloration orientée (μ, σ) précède (ν, τ) dans $\mathcal{K}_k^{(n)}$ si et seulement si pour toute arête (i, j), on a $\mu_{ij} \leq \nu_{ij}$ avec une inégalité stricte quand les orientations induites par σ et τ diffèrent.

La Λ-structure de $\mathcal{K}^{(n)}$ est donnée par $\phi^*(\mu, \sigma) = (\phi^*(\mu), \phi^*(\sigma))$, où

$$\phi^*(\mu)_{ij} = \begin{cases} \mu_{\phi(i),\phi(j)} \text{ si } \phi(i) < \phi(j), \\ \mu_{\phi(j),\phi(i)} \text{ si } \phi(j) < \phi(i); \end{cases}$$

La multiplication $\mathcal{K}_k^{(n)} \times \mathcal{K}_{i_1}^{(n)} \times \cdots \times \mathcal{K}_{i_k}^{(n)} \to \mathcal{K}_{i_1+\cdots+i_k}^{(n)}$ est donnée par

$$(\mu, \sigma)((\mu_1, \sigma_1), \ldots, (\mu_k, \sigma_k)) = (\mu(\mu_1, \ldots, \mu_k), \sigma(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)),$$

où $\mu(\mu_1,\ldots,\mu_k)$ est la coloration du graphe complet à $i_1+\cdots+i_k$ sommets obtenue de la coloration μ du graphe complet à k sommets en *substituant* à chacun de ses k sommets les graphes complets colorés selon $\mu_1,\ldots,\mu_k$.

Définition 2.5. Pour $\alpha \in \mathcal{K}_k^{(n)}$ soit

$$\mathcal{C}_k^{(\alpha)} = \{\gamma \in \mathcal{C}_k^{(n)} \mid \phi_{ij}^*(\gamma) \in \mathcal{C}_2^{\phi_{ij}^*(\alpha)}, 1 \le i < j \le k\},$$

où $\mathcal{C}_2^{(\mu,\sigma)}$ désigne l'ensemble des couples (c_1,c_2) de petits n-cubes tels qu'il existe un hyperplan séparant c_1 et c_2 perpendiculaire à un des premiers μ axes de coordonnées ou, le cas échéant, un hyperplan$H$ perpendiculaire au $(\mu+1)$-ème axe de coordonnée avec $c_{\sigma^{-1}(1)}$ du côté négatif et $c_{\sigma^{-1}(2)}$ du côté positif de H.

Proposition 2.6. *(Fiedorowicz)*
(a) L'espace $\mathcal{C}_k^{(n)}$ admet une décomposition cellulaire par les cellules $\mathcal{C}_k^{(\mu,\sigma)}$ d'intérieur non vide.
(b) La multiplication des petits n-cubes applique le produit de cellules $\mathcal{C}_k^{(\mu,\sigma)} \times \mathcal{C}_{i_1}^{(\mu_1,\sigma_1)} \times \cdots \times \mathcal{C}_{i_k}^{(\mu_k,\sigma_k)}$ dans la cellule $\mathcal{C}_{i_1+\cdots+i_k}^{(\mu(\mu_1,\ldots,\mu_k),\sigma(\sigma_1,\ldots,\sigma_k))}$ "préscrite" par l'opérade du graphe complet.
(c) La réalisation géométrique de l'opérade du graphe complet n-coloré est une E_n-opérade. □

Théorème 2.7. *(B.)*
Soit $\mathcal{O}$ une opérade dont l'espace $\mathcal{O}_2$ admet une $\mathcal{K}_2^{(n)}$-décomposition cellulaire $\mathfrak{S}_2$-équivariante $(\mathcal{O}_2^{(\alpha)})_{\alpha\in\mathcal{K}_2^{(n)}}$ telle que

1. *pour $\alpha \in \mathcal{K}_k^{(n)}$, la "cellule" $\mathcal{O}_k^{(\alpha)} = \{x \in \mathcal{O}_k \mid \phi_{ij}^*(x) \in \mathcal{O}_2^{\phi_{ij}^*(\alpha)}\}$ soit contractile et pour $\alpha \le \beta$, l'inclusion $\mathcal{O}_k^{(\alpha)} \hookrightarrow \mathcal{O}_k^{(\beta)}$ soit une cofibration;*
2. *toute $\mathfrak{S}_k$-orbite de $\mathcal{O}_k$ contienne un point $x \in \mathcal{O}_k$ vérifiant $\phi_{ij}^*(x) \in Int(\mathcal{O}_2^{(\mu_{ij},id_2)})$ pour $1 \le i < j \le k$;*
3. *la multiplication applique le produit $\mathcal{O}_k^{(\mu,\sigma)} \times \mathcal{O}_{i_1}^{(\mu_1,\sigma_1)} \times \cdots \times \mathcal{O}_{i_k}^{(\mu_k,\sigma_k)}$ dans la cellule $\mathcal{O}_{i_1+\cdots+i_k}^{(\mu(\mu_1,\ldots,\mu_k),\sigma(\sigma_1,\ldots,\sigma_k))}$.*

Alors $\mathcal{O}$ est une E_n-opérade. □

2.3 Trois exemples : $\mathcal{M}^{(n)}, E\mathfrak{S}^{(n)}, J^{(n)}$

(a) L'opérade n-monoïdale $\mathcal{M}^{(n)}$

Observons d'abord que $\mathcal{K}_2^{(n)}$ contient pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$ des éléments $\square_k = (k, id_2)$ vérifiant $\square_k(1, \square_k) = \square_k(\square_k, 1)$. Tout $\mathcal{K}^{(n)}$-objet admet par conséquent n structures monoïdales distinctes partageant la même unité. Soit $\mathcal{M}^{(n)}$ la sous-opérade des éléments *décomposables* de $\mathcal{K}^{(n)}$, où un élément α est dit décomposable si soit $\alpha = 1$ soit $\alpha = \square_k(\beta, \gamma) \stackrel{def}{=} \beta \square_k \gamma$.

Les éléments de $\mathcal{M}_k^{(n)}$ sont donc les images de $(1, \ldots, 1) \in (\mathcal{K}_1)^k$ par toute forme d'application itérée des n produits $\square_k$ de $\mathcal{K}_2^{(n)}$ suivie de l'action d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_k$. Il existe par conséquent une bijection canonique entre $\mathcal{M}_k^{(n)}$ et l'ensemble des expressions algébriques en k générateurs et n lois de composition associatives qui font intervenir chaque générateur exactement une fois.

Le *Théorème de Cohérence* de Balteanu, Fiedorowicz, Schwänzl et Vogt peut alors s'énoncer comme suit : L'ensemble partiellement ordonné $\mathcal{M}_k^{(n)}$ est *isomorphe* à la partie homogène d'une *catégorie n-monoïdale libre à k générateurs*. Les morphismes d'une telle catégorie sont engendrés par une famille d'*unités* et une famille de morphismes d'*échange*

$$\eta_A : U \to A,$$
$$\eta^{ij}_{ABCD} : (A\square_j B)\square_i(C\square_j D) \to (A\square_i C)\square_j(B\square_i D), \quad 0 \leq i < j < n,$$

sujettes aux contraintes d'associativité et d'unitarité naturelles. La partie délicate du théorème est la preuve que les morphismes entre objets de $\mathcal{M}_k^{(n)}$ sont précisément ceux donnés par l'ordre partiel sur $\mathcal{M}_k^{(n)}$. Nous en déduisons que les $\mathcal{M}^{(n)}$-catégories sont exactement les catégories monoïdales n-fois itérées de BFSV. L'inclusion $\mathcal{M}^{(n)} \hookrightarrow \mathcal{K}^{(n)}$ définit une équivalence d'opérades en vertu de 2.4d (car $K(F)^{(n)} \hookrightarrow \mathcal{M}^{(n)}$), ce qui implique le

Théorème 2.8. (BFSV, Stasheff (b), Fiedorowicz (c) et Segal-May (d))
(a) Le nerf d'une catégorie n-monoïdale est à complétion en groupe près un espace de lacets n-fois itéré.
(b) Le nerf d'une catégorie monoïdale est à complétion en groupe près un espace de lacets simple.
(c) Le nerf d'une catégorie monoïdale tressée est à complétion en groupe près un espace de lacets double.

(d) Le nerf d'une catégorie monoïdale symétrique est à complétion en groupe près un espace de lacets infini. □

(b) L'OPÉRADE n-SYMÉTRIQUE $E\mathfrak{S}^{(n)}$

Nous rappelons que l'espace classifiant $B\mathfrak{S}_k$ du groupe symétrique $\mathfrak{S}_k$ est la base du $\mathfrak{S}_k$-*fibré universel* $\mathfrak{S}_k \to E\mathfrak{S}_k \to B\mathfrak{S}_k$. L'espace total $E\mathfrak{S}_k$ admet un modèle simplicial qui est le plus simplement décrit comme le nerf de la *catégorie de translations* de $\mathfrak{S}_k$. En particulier, les d-simplexes de $E\mathfrak{S}_k$ ne sont autres que les $(d+1)$-uplets d'éléments de $\mathfrak{S}_k$. Comme le nerf commute avec le produit cartésien, la famille $E\mathfrak{S} = (E\mathfrak{S}_k)_{k\geq 1}$ forme une opérade, en fait une E_∞-opérade, introduite et étudiée par Barratt-Eccles, ensuite filtrée convenablement par J. Smith.

L'ensemble simplicial $E\mathfrak{S}_2$ (i.e. le nerf d'un isomorphisme) représente la sphère de Milnor de dimension infinie et admet donc une $\mathcal{K}_2^{(\infty)}$-décomposition cellulaire avec un simplexe non dégénéré par hémisphère. En particulier,

$$E\mathfrak{S}_2^{(n)} = sk_{n-1}(E\mathfrak{S}_2) = S^{n-1}_{Mi},$$
$$E\mathfrak{S}_k^{(n)} = \{x \in E\mathfrak{S}_k \mid \phi^*_{ij}(x) \in E\mathfrak{S}_2^{(n)} \text{ pour } 1 \leq i < j \leq k\},$$

de sorte que la famille $E\mathfrak{S}^{(n)} = (E\mathfrak{S}_k^{(n)})_{k\geq 1}$ forme une sous-opérade de $E\mathfrak{S}$ vérifiant les hypothses du théorème 2.7. La réalisation géométrique $|E\mathfrak{S}^{(n)}|$ est donc une E_n-opérade; nous retrouvons en particulier l'équivalence d'homotopie $\mathfrak{S}_k$-équivariante $|E\mathfrak{S}_k^{(n)}| \sim F(\mathbb{R}^n, k)$, conjecturée par J. Smith et démontrée pour la première fois par T. Kashiwabara.

Ces modèles de Smith ont plusieurs propriétés attrayantes : Pour tout ensemble simplicial X, le modèle simplicial $E\mathfrak{S}^{(n)}(X)$ du $\mathcal{C}^{(n)}$-espace libre $\mathcal{C}^{(n)}(|X|)$ est un *monoïde simplicial libre* avec une base *explicite* (de surcroît stable par opérateurs de dégénérescence). Ceci permet de donner une démonstration géométrique directe du théorème fondamental de complétion en groupe 1.9. En effet, la complétion en groupe d'un monoïde simplicial libre se fait selon Barratt-Priddy par une complétion en groupe degré par degré, aboutissant donc avec un *groupe simplicial libre* $E\mathfrak{S}^{(n)}(X)\hat{}$ modélisant $\Omega^n S^n|X|$. Ceci est à comparer avec la démostration initiale de F. Cohen, qui utilise des calculs homologiques importants.

Pour $n = 1$, comme $E\mathfrak{S}^{(1)} = \mathfrak{S}$, nous retrouvons le célèbre modèle $\mathfrak{S}(X)\hat{} = FX = GSX$ de Milnor-Kan pour $\Omega S|X|$ généralisant la construction de James aux espaces non connexes.

En outre, comme $E\mathfrak{S}_k^{(n)}$ contient le $(n-1)$-squelette $sk_{n-1}E\mathfrak{S}_k$, nous disposons d'une inclusion *stricte* $sk_{n-1}E\mathfrak{S}_k \hookrightarrow E\mathfrak{S}_k^{(n)}$. La différence entre ces deux espaces est fondamentale : le premier contient les opérations k-aires *stables* d'un espace de lacets n-fois itéré tandis que le second en contient également les *instables*. Le premier donne lieu aux *opérations de Dyer-Lashof* et à permis à ces auteurs de déterminer complètement $H_*(\Omega^\infty S^\infty X;\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ en fonction de $H_*(X;\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$; le second donne lieu aux *opérations de Browder* et a permis à l'auteur de déterminer complètement $H_*(\Omega^n S^n X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ en fonction de $H_*(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$; c'est enfin F. Cohen, en exploitant à fond la structure d'opérade de $\mathcal{C}^{(n)}$ et en mélangeant opérations de Dyer-Lashof et opérations de Browder, qui a su déterminer $H_*(\Omega^n S^n X;\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ en fonction de $H_*(X;\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

(c) L'OPÉRADE n-PERMUTOÉDRALE $J^{(n)}$

Le premier modèle combinatoire de l'endofoncteur $\Omega^n S^n$ est dû à Milgram qui introduit pour cela une famille de polytopes convexes, riches en symétries: les *permutoèdres*. Nous noterons P_n le permutoèdre plongé dans $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire l'enveloppe convexe de l'ensemble des points $(\sigma(1),\ldots,\sigma(n)) \in \mathbb{R}^n$, où σ parcourt le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. Pour tout $n > 0$, il existe une *opérade* $J^{(n)}$ de la forme $J_k^{(n)} = (P_k)^{n-1} \times \mathfrak{S}_k/\sim$ pour une certaine relation d'équivalence cellulaire portant uniquement sur les cellules du bord de $(P_k)^{n-1}$. La monade associée s'identifie à la construction J_k de Milgram et fournit donc un modèle du foncteur $\Omega^n S^n$ si elle est appliquée à un CW-complexe connexe.

L'intérêt de la construction de Milgram est double : d'une part sa structure cellulaire est *minimale* dans ce sens que le nombre de cellules correspond exactement au nombre de générateurs de la construction cobar n-fois itéré, d'autre part la combinatoire du permutoèdre P_k est intimement liée à la combinatoire du groupe symétrique $\mathfrak{S}_k$: le permutoèdre est en fait l'unique *polytope simple* dont le 1-squelette est le graphe défini par l'*ordre de Bruhat faible* du groupe symétrique.

Rappelons que l'ordre de Bruhat faible (à droite resp. à gauche) sur $\mathfrak{S}_k$ correspond au graphe de Cayley de $\mathfrak{S}_k$ par rapport aux translations (à droite resp. à gauche) de l'ensemble T des *transpositions élémentaires* $(ii+1), i = 1,2,\ldots,k-1$. L'ordre de Bruhat faible (à gauche) sur $\mathfrak{S}_k$ peut être caractérisé à l'aide de la Λ-structure de $\mathfrak{S}$ par $\sigma \leq \tau \Leftrightarrow \phi^*_{ij}(\sigma) \leq \phi^*_{ij}(\tau)$ pour $1 \leq i < j \leq k$, où le groupe symétrique $\mathfrak{S}_2$ est ordonné par $[12] < [21]$. Le lemme fondamental ci-dessous permettant d'analyser la structure cellulaire des quotients $J_k^{(n)}$ joue déjà un rôle important dans l'étude de Baues de la structure géométrique de la *construction cobar* :

Lemme 2.9. *Chaque point x de l'espace quotient $J_k^{(n)}$ admet un représentant unique*

$$x_{can} = (x_1, \ldots, x_{n-1}; \sigma) \in (P_k)^{n-1} \times \mathfrak{S}_k,$$

tel que, pour tout i, la cellule minimale c_i dont l'intérieur contient x_i soit l'enveloppe convexe d'un sous-groupe de $\mathfrak{S}_k$ et tel que la suite des cellules soit décroissante : $c_1 \supset c_2 \supset \cdots \supset c_{n-1}$. □

La décomposition cellulaire induite par la famille de ces cellules en drapeau définit l'ensemble partiellement ordonné

$$\mathcal{K}(J)_k^{(n)} = \{(S_1 \supseteq S_2 \supseteq \cdots \supseteq S_{n-1}; \sigma) \,|\, T \supseteq S_1, \sigma \in \mathfrak{S}_k\},$$

où $(S_1 \supseteq S_2 \supseteq \cdots \supseteq S_{n-1}; \sigma) \leq (T_1 \supseteq T_2 \supseteq \cdots \supseteq T_{n-1}; \tau)$ si et seulement si $\tau\sigma^{-1} \in W_{T_i}/W_{S_i}$ pour $i = 1, \ldots, n-1$. ($w \in W_{T_i}/W_{S_i}$ signifie que $T_i \supseteq S_i$, que w appartient au sous-groupe W_{T_i} de $\mathfrak{S}_k$ engendré par T_i, et que w est l'élement initial de la classe résiduelle wW_{S_i} pour l'ordre de Bruhat faible à droite; en d'autres termes : w est un W_{S_i}-battage de W_{T_i}).

L'ensemble partiellement ordonné $\mathcal{K}(J)_k^{(n)}$ se plonge dans $\mathcal{K}_k^{(n)}$ via

$$(S_1 \supseteq S_2 \supseteq \cdots \supseteq S_{n-1}; \sigma) \mapsto (\mu, \sigma)$$

où $\alpha_{ii+1} = \sigma^{-1*}(\mu)_{ii+1}$ est égal au nombre de transpositions élémentaires $(ii+1)$ dans la suite $S_1 \supseteq S_2 \supseteq \cdots \supseteq S_{n-1}$ et où $\alpha_{ik} = \min_{i \leq j < k} \alpha_{jj+1}$. On constate en particulier que $\mathcal{K}(J)_k^{(n)}$ est *anti-isomorphe* à $\mathcal{K}(F)_k^{(n)}$.

Pour montrer que la famille $J^{(n)} = (J_k^{(n)})_{k \geq 1}$ forme une E_n-opérade, il reste à munir $J^{(n)}$ d'une multiplication et de vérifier que celle-ci est subordonnée à la multiplication du graphe complet n-coloré. Cela se fait en utilisant à nouveau l'ordre de Bruhat faible; il permet d'étendre la multiplication de l'opérade des permutations aux 1-squelettes des permutoèdres, ensuite par extension cubique aux permutoèdres eux-mêmes, et enfin aux modèles de Milgram $J_k^{(n)}$. Nous signalons que tout CW-complexe muni d'une $J^{(n)}$-action est en particulier muni d'une multiplication cellulaire induite par $\overline{(b_2, \ldots, b_2; id_2)} \in J_2^{(n)}$, où b_2 désigne le barycentre de P_2.

La généralisation des modèles $J_k^{(n)}/\mathfrak{S}_k$ à d'autres *groupes d'Artin* (même infinis) est un domaine de recherche actuel, voir les travaux de Salvetti et de Charney-Davis.

2.4 Homologie des E_n-opérades et algèbres de Poisson

L'homologie de tout espace de lacets n-fois itéré porte une structure de n-algèbre de Poisson étroitement liée aux opérations de Browder.

Définition 2.10. Une algèbre (commutative unitaire) A est une *algèbre de Poisson* si elle est munie d'un crochet de Lie $\{-,-\}$ telle que pour tout $a \in A$, le morphisme $\{a,-\}$ soit une dérivation s'annulant en l'unité $1 \in A$.

Une algèbre de Poisson graduée A est une *n-algèbre de Poisson*, si les dérivations $\{a,-\}$ sont graduées de degré n.

Lemme 2.11. *(a) Une algèbre (resp. n-algèbre) de Poisson libre est l'algèbre symétrique sur une algèbre (resp. n-algèbre) de Lie libre.*
(b) Pour n strictement positif, les éléments homogènes de degré maximal d'une n-algèbre de Poisson libre engendrent une n-algèbre de Lie libre. □

Théorème 2.12. (Cohen) *On suppose $n \geq 2$.*

(a) L'homologie entière $H_*(F(R^n,k);\mathbb{Z})$ s'identifie à la partie multilinéaire d'une $(n-1)$-algèbre de Poisson libre à k générateurs de degré nul.. En particulier, l'homologie de degré maximal $H_{(n-1)(k-1)}(F(R^n,k);\mathbb{Z})$ s'identifie à la partie multilinéaire d'une $(n-1)$-algèbre de Lie libre à k générateurs de degré nul. La représentation du groupe symétrique provenant de la structure de préopérade correspond à la permutation des générateurs en tensorisant avec la signature pour n pair.

(b) Les algèbres sur l'opérade $H_*(\mathcal{C}^{(n)};\mathbb{Z})$ sont les $(n-1)$-algèbres de Poisson. En particulier, pour tout anneau de coefficients A, l'homologie d'un espace de lacets n-fois itéré à coefficients dans A est une $(n-1)$-algèbre de Poisson sur A.

(c) Pour tout espace connexe X, l'homologie rationnelle $H_*(\Omega^n S^n X;\mathbb{Q})$ est la $(n-1)$-algèbre de Poisson libre de base l'homologie réduite $\tilde{H}_*(X;\mathbb{Q})$.

Preuve.

(a) On montre d'abord que la cohomologie entière $H^*(F(\mathbb{R}^n,k);\mathbb{Z})$ est la $(n-1)$-*algèbre d'Orlik-Solomon* associée au matroïde des *cliques* du graphe complet à k sommets, ce qui implique en particulier que les espaces de configurations n'ont pas de torsion. On en déduit ensuite par dualisation, en utilisant les techniques combinatoires de Barcelo-Bergeron, que l'homologie entière s'identifie à la partie multilinéaire d'une $(n-1)$-algèbre de Poisson libre à k générateurs.

(b) Le calcul combinatoire de (a) identifie la structure multiplicative de l'opérade des petits n-cubes au produit de substitution de l'opérade des $(n-1)$-algèbres de Poisson. Pour tout anneau de coefficients A, le morphisme composé

$$H_*(\mathcal{C}_k^{(n)};A)\otimes_{A[\mathfrak{S}_k]}\mathrm{C}_*(X;A)^{\otimes k}\xrightarrow{\phi_*}H_*(\mathcal{C}_k^{(n)}\times_{\mathfrak{S}_k}X^k;A)\longrightarrow H_*(X;A)$$

induit une action de l'opérade des $(n-1)$-algèbres de Poisson sur l'homologie de X à coefficients dans A.

(c) Le morphisme ϕ_* ci-dessus est un isomorphisme si A est un corps et si en outre le foncteur $-\otimes_{A[\mathfrak{S}_k]}A : A[\mathfrak{S}_k]{-}Mod\to A{-}Mod$ est exact. C'est le cas si la caractéristique du corps ne divise pas l'ordre du groupe $\mathfrak{S}_k$. Donc pour $A=\mathbb{Q}$ c'est vrai pour tous les k. □

Remarque 2.13. Le crochet de Lie sur l'homologie d'un espace de lacets n-fois itéré X est induit par le générateur de $H_{n-1}(\mathcal{C}_2^{(n)};\mathbb{Z})\cong H_{n-1}(S^{n-1};\mathbb{Z})$. Cette opération qui à deux classes d'homologie x,y dans $H_*(X;\mathbb{Z})$ associe une classe $\lambda_{n-1}(x,y)$ de degré $|x|+|y|+n-1$, s'appelle *opération de Browder.* Ses principales propriétés sont donc l'identité de Jacobi et la propriété de dérivation par rapport au *produit de Pontryagin* de $H_*(X;\mathbb{Z})$, qui est induit par le générateur de $H_0(\mathcal{C}_2^{(n)};\mathbb{Z})$. L'opération de Browder λ_{n-1} est relié au produit de Whitehead de l'espace délacé Y tel que $X\sim\Omega^nY$. En effet, en conjugant le produit de Whitehead $\pi_k(Y)\times\pi_l(Y)\to\pi_{k+l-1}(Y)$ par l'isomorphisme $\pi_*(Y)\cong\pi_{*-n}(X)$ nous obtenons un produit

$$\pi_k(X)\times\pi_l(X)\to\pi_{k+l+n-1}(X)$$

qui se transforme en l'opération de Browder λ_{n-1} sous l'homomorphisme de Hurewicz.

3 Homologie du groupe symétrique infini

Le théorème de Barratt-Priddy-Quillen établit une équivalence d'homotopie faible entre la composante neutre de $\Omega^\infty S^\infty$ et la construction plus de $B\mathfrak{S}_\infty$. En particulier, cela induit un isomorphisme d'homologie

$$H_*(\Omega^\infty S^\infty_{(e)};\mathbb{Z}) \cong H_*(\mathfrak{S}_\infty;\mathbb{Z}).$$

Comme $\Omega^\infty S^\infty$ est l'espace de lacets infini "librement" engendré par S^0, l'homologie du groupe symétrique infini contient en quelque sorte l'ensemble des opérations homologiques pouvant agir sur un espace de lacets infini X. Plus précisément, on note $Q^i : H_*(X;\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to H_{*+i}(X;\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ l'*opération de Dyer-Lashof* définie par

$$\begin{array}{ccc} H_{|x|+i}(E\mathfrak{S}_p \times_{\mathfrak{S}_p} X^p;\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_{|x|+i}(X;\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \\ a_{i-|x|(p-1)} \otimes x^{\otimes p} & \mapsto & Q^i(x) \end{array}$$

où a_k est l'image du générateur de $H_k(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z};\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ dans $H_k(\mathfrak{S}_p;\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. On définit l'*excès* $e(I)$ d'une suite d'entiers positifs $I = (i_1,\ldots,i_k)$ comme l'entier $i_1 - (p-1)(i_2 + \cdots + i_k)$ et on dit que la suite d'entiers $(i_1,\ldots,i_k)$ est *admissible* si $i_1 \leq pi_2 \leq p^2 i_3 \leq \cdots \leq p^{k-1} i_k$ et si $i_s \equiv 0,-1 \mod 2(p-1)$ pour $s = 1,\ldots,k$. Le théorème de Nakaoka, dont nous voudrions donner une esquisse de démonstration, est alors le suivant :

Théorème 3.1. (Nakaoka, Priddy)

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[I; I \textit{ admissible et } e(I) > 0] \cong H_*(\mathfrak{S}_\infty;\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \textit{ où soit}$$

$$(i_1,\ldots,i_k) \mapsto Q^{i_1}Q^{i_2}\cdots Q^{i_k}[1] \star [-p^k] \in H_{i_1+\cdots+i_k}(\Omega^\infty S^\infty_{(e)};\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \textit{ soit}$$

$$(i_1,\ldots,i_k) \mapsto a_{e(i_1,\ldots,i_k)} \int a_{e(i_2,\ldots,i_k)} \int \cdots \int a_{i_k} \in H_{i_1+\cdots+i_k}(\mathfrak{S}_\infty;\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

3.1 Principe de scindage

Théorème 3.2. (Nakaoka, Dold) *Pour tout $k > 0$, l'inclusion $\mathfrak{S}_{k-1} \cong \mathfrak{S}_{k-1} \times \mathfrak{S}_1 \hookrightarrow \mathfrak{S}_k$ induit une suite exacte courte* scindée *:*

$$0 \longrightarrow H_*(\mathfrak{S}_{k-1};\mathbb{Z}) \longrightarrow H_*(\mathfrak{S}_k;\mathbb{Z}) \longrightarrow H_*(\mathfrak{S}_k,\mathfrak{S}_{k-1};\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

Corollaire 3.3.

$$H_*(\mathfrak{S}_\infty;\mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{k\geq 0} H_*(\mathfrak{S}_k,\mathfrak{S}_{k-1};\mathbb{Z}) \overset{def}{=} \bigoplus_{k\geq 0} H_{*,k}(\mathfrak{S}_\infty;\mathbb{Z})$$

L'entier k s'appelle le *rang* de la classe d'homologie considérée.

3.2 Structure d'algèbre de Hopf

L'homologie du groupe symétrique infini à coefficients dans un corps est une *algèbre de Hopf* connexe, cocommutative et commutative, dont la comultiplication est induite par la diagonale $\mathfrak{S}_\infty \to \mathfrak{S}_\infty \times \mathfrak{S}_\infty$ et dont la multiplication est induite par $\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_l \to \mathfrak{S}_{k+l}$. Pour montrer que la multiplication est associative et commutative, on utilise le fait que la conjugaison induit l'identité en homologie.

Théorème 3.4. (Milnor-Moore)
Soit H une algèbre de Hopf cocommutative et connexe sur un corps de caractéristique $p > 0$. Alors H s'identifie à l'algèbre enveloppante de sa partie primitive, qui est une algèbre de Lie restreinte.

Puisque dans notre cas, la structure d'algèbre est commutative, le crochet de Lie sur la partie primitive est trivial. Pour établir le théorème de structure de Nakaoka, il suffit alors d'exhiber une base linéaire de la partie primitive de $H_*(\mathfrak{S}_\infty; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ qui soit *stable par le Frobenius* $(-)^p$. L'algèbre enveloppante s'identifiera alors à l'algèbre symétrique sur les éléments de la base non contenus dans l'image du Frobenius et il restera juste à identifier ces générateurs.

3.3 Les coinvariants de Dickson-Mui

Le calcul effectif de $H_*(\mathfrak{S}_\infty; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ se ramène grâce aux paragraphes précédents à l'etude des inclusions de groupes

$$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^k \hookrightarrow \mathfrak{S}_{p^k,p} \hookrightarrow \mathfrak{S}_{p^k}$$

où $\mathfrak{S}_{p^k,p}$ désigne un p-groupe de Sylow de $\mathfrak{S}_{p^k}$ qu'on choisira comme étant le produit en couronne k fois itéré de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Pour toute inclusion de groupes $E \hookrightarrow G$, le groupe de Weyl $W_G(E) = N_G(E)/E$ agit sur l'homologie $H_*(E; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ de sorte que le morphisme en homologie se factorise par les *coinvariants* du groupe de Weyl $W_G(E)$:

$$H_*(E; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_{W_G(E)} \xrightarrow{\phi_E^G} H_*(G; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}).$$

Si E est un p-groupe élémentaire inclus dans un p-groupe de Sylow G_1 de G_2 de sorte que la classe de conjugaison de E sous l'action de G_1 soit la même que celle sous l'action de G_2, alors d'après le (dual du) théorème de Cardenas-Kuhn, les deux noyaux $ker(\phi_E^{G_1})$ et $ker(\phi_E^{G_2})$ sont canoniquement isomorphes. Les hypothèses sont satisfaites pour $E = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^k, G_1 = \mathfrak{S}_{p^k,p}, G_2 = \mathfrak{S}_{p^k}$; Mui a montré que dans ce cas $\phi_E^{G_1}$ est injectif, donc $\phi_E^{G_2}$ l'est également. De plus, les groupes de Weyl sont bien connus :

$$W_{G_1}(E) = U_k(p), \quad W_{G_2}(E) = Gl_k(p)$$

avec l'action canonique sur $H_*((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^k; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, ce qui nous permet d'utiliser le théorème suivant :

Théorème 3.5. (Dickson-Mui)

L'algèbre de Hopf des invariants $H^*((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^k; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{Gl_k(p)}$ admet une base d'indécomposables donnée par des générateurs "polynomiaux" de degré $p^k - p^j$ et, si $p \neq 2$, des générateurs "extérieurs" de degré $p^k - p^j - 1$ pour $j = 0, 1, \ldots, k-1$.

L'algèbre de Hopf duale des coinvariants $H_*((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^k; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_{Gl_k(p)}$ admet donc une base d'éléments primitifs ayant les mêmes degrés.

Esquissons une preuve du théorème de Nakaoka (cf. Mui, Turner):
Le but est de montrer que l'image de $\phi_E^{G_2}$ s'identifie au sous-espace des éléments primitifs de rang p^k de $H_*(\mathfrak{S}_\infty; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ non contenus dans l'image du Frobenius $(-)^p$. Notons $d_{*,k}$ la dimension en degré $*$ de ce sous-espace. Du fait que $\phi_E^{G_2}$ est un morphisme de coalgèbres injectif on a :

$$c_{*,k} = \dim H_*((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^k; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_{Gl_k(p)} \leq d_{*,k}.$$

Du fait que $\mathfrak{S}_{p^k,p}$ est un p-groupe de Sylow de $\mathfrak{S}_{p^k}$, on a un morphisme de coalgèbres surjectif $H_*(\mathfrak{S}_{p^k,p}; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \twoheadrightarrow H_*(\mathfrak{S}_{p^k}; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Or, le p-groupe de Sylow $\mathfrak{S}_{p^k,p}$ est un produit en couronnes k-fois itéré de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ dont l'homologie mod p contient entre autre des éléments $a_{j_1} \int \cdots \int a_{j_k}$ en degré $j_1 + pj_2 + \cdots + p^{k-1}j_k$. Les images de ces éléments engendrent précisément le complémentaire de l'image du Frobenius. Grâce à l'associativité du produit en couronnes, les images vérifient en outre des *relations d'Adem* qui permettent de se restreindre aux classes $a_{e(i_1,\ldots,i_k)} \int a_{e(i_2,\ldots,i_k)} \int \cdots \int a_{i_k}$ pour $(i_1, \ldots, i_k)$ admissible. Il s'ensuit que

$$d_{*,k} \leq e_{*,k}$$

où $e_{*,k}$ est le nombre de suites admissibles de longueur k et de degré $i_1 + i_2 + \cdots + i_k = *$. Une bijection combinatoire montre enfin que $c_{*,k} = e_{*,k}$. □

Références

[1] C. Balteanu, Z. Fiedorowicz, R. Schwänzl et R. Vogt – *Iterated monoidal categories*, preprint (1995).

[2] H. Barcelo et N. Bergeron – *The Orlik-Solomon Algebra on the Partition Lattice and the Free Lie Algebra*, J. Comb. Theory (A) 55 (1990), 80-92.

[3] M. G. Barratt et P. J. Eccles – Γ^+*-Structures I,II,III,* Topology 13 (1974), p. 25-45, 113-126, 199-207.

[4] M. G. Barratt et S. Priddy – *On the homology of non-connected monoids and their associated groups*, Comm. Math. Helv. 47 (1972), p. 1-14.

[5] H.-J. Baues – *Geometry of loop spaces and the cobar-construction,* Mem. of the Amer. Math. Soc. 230 (1980).

[6] C. Berger – *Opérades cellulaires et espaces de lacets itérés,* Annales Inst. Fourier 46 (1996), p. 1125-1157.

[7] C. Berger – *Combinatorial models for real configuration spaces and* E_n*-operads,* Contemp. Math. 202 (1997), p. 37-52.

[8] J. M. Boardman et R. M. Vogt – *Homotopy invariant algebraic structures on topological spaces,* Lecture Notes in Math. 347, Springer Verlag (1973).

[9] W. Browder – *Homology operations and loop spaces,* Illinois J. Math. 4 (1960), p. 347-357.

[10] R. Charney et M. W. Davies – *Finite* $K(\pi,1)$*'s for Artin groups,* Annals of Math. Studies 138 (1995), p. 110-124.

[11] F. R. Cohen – *The homology of* C_{n+1}*-spaces,* Lecture Notes in Math. 533, Springer Verlag (1976), p. 207-351.

[12] F. R. Cohen – *On configuration spaces, their homology and Lie algebras,* J. Pure Applied Algebra 100 (1995), p. 19-42.

[13] A. Dold – *Decomposition theorems for* $\mathfrak{S}_n$*-complexes,* Annals of Math. 75 (1962), p. 8-16.

[14] D. MacDuff – *On the classifying spaces of discrete monoids*, Topology 18 (1979), p. 313-320.

[15] D. MacDuff et G. B. Segal – *Homology fibrations and the group completion theorem*, Invent. Math. 31 (1976), p. 279-284.

[16] E. Dyer and R. Lashof – *Homology of iterated loop spaces,* Amer. J. Math. 84 (1962), p. 35-88.

[17] J. Hollender et R.M. Vogt – *Modules of topological spaces, applications to homotopy limits and E_∞-structures,* Arch. Math. 59 (1992), p. 115-129.

[18] T. Kashiwabara – *On the Homotopy Type of Configuration Complexes,* Contemp. Math. 146 (1993), p. 159-170.

[19] J. P. May – *The Geometry of iterated loop spaces,* Lecture Notes in Math. 271, Springer Verlag (1972).

[20] J. P. May – *E_∞-spaces, group completions and permutative categories,* London Math. Soc. Lecture Notes 11 (1974), p. 61-94.

[21] R. J. Milgram – *Iterated loop spaces,* Annals of Math. 84 (1966), p. 386-403.

[22] J. Milnor et J. C. Moore – *On the structure of Hopf algebras,* Annals of Math. 81 (1965), p. 211-264.

[23] H. Mui – *Homology operations derived from modular coinvariants,* Lecture Notes in Math. 1172 (1984), p. 85-115.

[24] M. Nakaoka – *Homology of the infinite symmetric group,* Annals of Math. 73 (1961), p. 229-257.

[25] S. Priddy – *Transfer, symmetric groups and stable homotopy theory,* Lecture Notes in Math. 341 (1973), p. 244-255.

[26] D. Quillen – *Higher algebraic K-theory I,* Lecture Notes in Math. 341, Springer Verlag (1973), p. 85-147.

[27] M. Salvetti – *The homotopy type of Artin groups,* Math. Res. Lett. 1 (1994), p. 565-577.

[28] G. B. Segal – *Configuration spaces and iterated loop spaces,* Inventiones Math. 21 (1973), p. 213-221.

[29] G. B. Segal – *Categories and cohomology theories,* Topology 13 (1974), p. 293-312.

[30] P. R. Turner – *Dickson coinvariants and the homology of* QS^0*,* Math. Z. 224 (1997), p. 209-228.

[31] J. H. Smith – *Simplicial Group Models for* $\Omega^n S^n X$*,* Israel Journal of Math. 66 (1989), p. 330-350.

[32] J. D. Stasheff – *Homotopy associativity of* H*-spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 108 (1963), p. 275-312.