MAT232 : séries et intégrales généralisées
2013-2014

Université Joseph Fourier
Grenoble

TD n°1 : suites numériques

Rappel important : il existe un cours de L1 en ligne, intitulé "M@ths en L1gne", à l'adresse : `http://ljk.imag.fr/membres/Bernard.Ycart/mel/` Plusieurs des exercices ci-dessous en sont d'ailleurs tirés. Il est crucial, pour toute la partie du cours sur les séries numériques, d'être à l'aise avec les suites numériques, les notions de limite et de continuité et les développements limités. Vérifiez donc cette aisance à l'aide des QCM, exercices, cours et compléments du site.

Exercice 1 : Quelques exemples
Donner des exemples des situations suivantes :

1. Une suite décroissante positive ne tendant pas vers 0.
2. Une suite bornée non convergente.
3. Une suite positive non bornée ne tendant pas vers $+\infty$.
4. Une suite non monotone qui tend vers 0.
5. Deux suites divergentes $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ telles que $(u_n v_n)_n$ soit convergente.

Exercice 2 : Des suites définies par récurrence
Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$ telle que $f(0)=0$, $f(1)=1$ et

$$\forall x \in]0,1[, \quad f(x) < x \ .$$

1. On définit par récurrence une suite $(u_n)_{n\geq 0}$:

$$\begin{cases} u_0 \in [0,1], \\ \forall n \geq 0,\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

   Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge et donner sa limite.
2. On définit par récurrence une suite $(v_n)_{n\geq 0}$:

$$\begin{cases} v_0 = 1/2, \\ \forall n \geq 0,\ v_{n+1} = \dfrac{v_n}{2-\sqrt{v_n}}. \end{cases}$$

   Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ converge et donner sa limite.

Exercice 3 : Applications contractantes
Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, F une application de I dans lui-même et ρ un nombre réel de $[0,1[$. On suppose que F vérifie :

$$\forall x, y \in I, \quad |F(x) - F(y)| \leq \rho |x - y| \ .$$

Montrer que la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = F(u_n)$ converge, et que sa limite est l'unique point fixe de F. On pourra commencer par montrer que $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy.

Exercice 4 : Limite d'un produit
Rappeler la démonstration du résultat suivant.

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ des suites de nombres complexes. Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent, alors $(u_n v_n)_n$ converge et $\lim_n u_n v_n = (\lim_n u_n) \times (\lim_n v_n)$.

Exercice 5 : Calcul de limites à l'aide des fonctions usuelles
Calculer la limite, si elle existe, des suites suivantes.

1. $u_n = \dfrac{n+1}{3+2in}$
2. $u_n = \dfrac{n^{10}}{1.01^n}$
3. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$
4. $u_n = n^4 \left(\log \left(1 - \dfrac{1}{n^2} \right) + \dfrac{1}{n^2} \right)$
5. $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$
6. $u_n = \tan(1/n) \cos(2n+1)$
7. $u_n = \dfrac{(n+1)^2}{(n+1)^3 - n^3}$
8. $u_n = \dfrac{\sqrt{n-3} + i \log(2n)}{\log n}$
9. $u_n = \dfrac{\log(n^2 + 3n - 2)}{\log(n^{1/3})}$
10. $u_n = n(e^{\frac{2}{n}} - 1)$

Exercice 6 : Développements limités
Donner un développement limité pour $(u_n)_n$ (lorsque n tend vers l'infini) avec un reste en $o(1/n^2)$, dans chacun des cas suivants :

1. $u_n = \dfrac{n+1}{3+2n}$
2. $u_n = \dfrac{\log\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{1}{n}}}$
3. $u_n = \dfrac{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n} + 2}$
4. $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+2}$

Exercice 7 : Borne supérieure, borne inférieure
Pour chacun des ensembles suivants, déterminer s'il est majoré, s'il est minoré, s'il a un maximum, s'il a un minimum, et le cas échéant déterminer ses bornes supérieures et inférieures.

1. $A = \{(-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
2. $B = \{(-1)^n/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$
3. $C = \{(-1)^n n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$
4. $D = \left\{\frac{n+1}{n+2} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$
5. $E = \left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \mid n, m \in \mathbb{N}^*\right\}$

Exercice 8 : Suites extraites
Soit $(u_n)_n$ une suite complexe.

1. Montrer que si les suites extraites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers la même limite, alors $(u_n)_n$ converge.
2. Montrer que si les suites extraites $(u_{2n})_n$, $(u_{2n+1})_n$ et $(u_{3n})_n$ convergent, alors $(u_n)_n$ converge aussi.

Exercice 9 : Une somme téléscopique

1. Déterminer trois réels A, B, C tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$ différent de 0, 1 et -1 on ait :
$$\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+1}$$
2. En utilisant cette relation pour $x = 2, 3, \cdots, n$, déterminer pour chaque entier $n \geq 2$ une expression simple de
$$S_n := \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k^2-1)} = \frac{1}{2(2^2-1)} + \frac{1}{3(3^2-1)} + \cdots + \frac{1}{n(n^2-1)}$$
3. En déduire que la suite $(S_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 10 : Suites adjacentes

1. Pour chacun des couples suivants, montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.
   (a) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$.

(b) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n^2}$.

(c) $u_0 = a > 0$, $v_0 = b > a$, $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$.

2. On définit à présent les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!n}$.

   (a) Montrer que ces suites sont adjacentes. Leur limite commune est notée e (c'est $\exp(1) = e^1$).

   (b) Montrer que e n'est pas rationnel (on pourra raisonner par l'absurde : en supposant que $e = p/q$, on peut noter que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $n!u_n < n!p/q < n!v_n$; choisir n tel que $n!p/q$ soit entier permet alors de conclure).

Exercice 11 : Moyennes de Césaro

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres complexes. On note :

$$\forall n \geq 1, \quad S_n = \frac{1}{n}(u_1 + \ldots + u_n) \ .$$

1. Montrer que si $(u_n)_n$ converge dans $\mathbb{C}$, alors $(S_n)_n$ converge vers la même limite.
2. Exhiber une suite $(u_n)_n$ divergente telle que $(S_n)_n$ converge.
3. Soit $(u_n)_n$ une suite de nombre réels strictement positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge. Montrer que $(u_n^{1/n})_n$ converge vers la même limite.

Exercice 12 : Limite supérieure et limite inférieure

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite bornée de nombres réels. On définit les suites i_n et s_n par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad i_n = \inf\{u_k \text{ t.q. } k \geq n\} \quad \text{et} \quad s_n = \sup\{u_k \text{ t.q. } k \geq n\} \ .$$

1. Montrer que $(i_n)_n$ et $(s_n)_n$ convergent. La limite de i_n est appelée *limite inférieure de la suite* $(u_n)_n$ et est notée $\liminf_n u_n$. Celle de s_n est appelée *limite supérieure de la suite* $(u_n)_n$ et est notée $\limsup_n u_n$.
2. Montrer qu'il existe une sous-suite de $(u_n)_n$ convergeant vers $\liminf_n u_n$ et une autre convergeant vers $\limsup_n u_n$. Cela donne donc une autre démonstration du théorème de Bolzano-Weierstrass.
3. Montrer que $(u_n)_n$ converge si et seulement si $(i_n)_n$ et $(s_n)_n$ convergent dans $\mathbb{R}$ vers la même limite.

Université Joseph Fourier
Grenoble

TD n°2 : Séries à termes positifs

Exercice 13 : Nature de séries
Déterminer la nature des séries de terme général :

1. $u_n = \dfrac{e^n}{n^5+1}$;
2. $u_n = \dfrac{2^n+n^2}{3^n n^2+1}$;
3. $u_n = \dfrac{e^{\frac{1}{n}}}{n+1}$;
4. $u_n = \dfrac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\sqrt{n+1}}$;
5. $u_n = n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \quad (n \geq 1)$;
6. $u_n = \dfrac{e^{-n}}{4+\sin n}$;
7. $u_n = \dfrac{1-n\ln(1+\frac{1}{n})}{\sqrt{n+1}}$;
8. $u_n = \dfrac{\ln n}{n}$;
9. $u_n = \left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \quad (n \geq 1)$;
10. $u_n = ne^{-n}$;
11. $u_n = ne^{-\sqrt{n}}$;
12. $u_n = \left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \quad (n \geq 2)$;
13. $u_n = \dfrac{n!}{n^n} \quad (n \geq 1)$;
14. $u_n = \dfrac{\ln n}{n^\alpha} \quad (n \geq 1)$ (discuter selon la valeur du réel α) ;
15. $u_n = \tan\left(\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n}$;
16. $u_n = n^2\left(e^{\frac{1}{n}} - \sin\dfrac{1}{n} - \cos\dfrac{1}{n} - \left(\ln(1-\dfrac{1}{n})\right)^2\right)$.

Exercice 14 : Transformation I
Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres positifs telle que $\sum u_n$ converge.
Montrer que la série $\sum \dfrac{u_n}{u_n+1}$ converge.

Exercice 15 : Série à terme général défini par une récurrence
Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{\sin u_n}{n+1}$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \in [0,1]$, puis montrer que la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 16 : Séries à terme général positif décroissant
Soit $(u_n)_n$ une suite positive décroissante telle que $\sum u_n$ converge. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N$ on ait $(n-N)u_n \leqslant \varepsilon$. En déduire que nu_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
Donner un exemple de suite positive $(v_n)_n$ telle que $\sum v_n$ converge et nv_n ne tend pas vers 0.

Exercice 17 : Transformation II
Soit $(u_n)_n$ une suite à termes positifs, et notons $v_n = \dfrac{1}{1+n^2u_n}$.

1. Montrer par des exemples que la divergence de $\sum u_n$ ne permet pas de déterminer la nature de $\sum v_n$.
   On suppose dans la suite que $\sum u_n$ converge et on va montrer que $\sum v_n$ diverge.
2. Traiter le cas où n^2u_n ne tend pas vers $+\infty$.
3. Traiter le cas où $n^2u_n \to +\infty$ en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n^{1/2}v_n^{1/2}$.

Exercice 18 : Transformation III – dérivée logarithmique
Soit $(u_n)_n$ une suite réelle positive. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $S_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} u_p$.
Comparer la nature des séries $\sum u_n$ et $\displaystyle\sum \frac{u_n}{S_n}$
(indication : on pourra considérer $\log S_{n+1} - \log S_n$).

Université Joseph Fourier
Grenoble

TD n°3 : séries à termes quelconques

Exercice 19 : Natures de séries
Déterminer la nature des séries de terme général :

1. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln n}$;
2. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$;
3. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$;
4. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n + a^n}$ en fonction de $a \in \mathbb{C}$;
5. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n + (-1)^n}}$;
6. $u_n = \sin\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$;
7. $u_n = 1 - \sqrt{1 - \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}$;
8. $u_n = \dfrac{\cos(3n)}{\ln(n)}$;
9. $u_n = \dfrac{(-1)^n \cos(n)}{\ln(\ln(n))}$.

Exercice 20 : Linéarisations
Rappeler la formule d'Euler sur les polynômes trigonométriques puis déterminer la nature des séries de terme général :

1. $u_n = \dfrac{\sin^3(n)}{n}$;
2. $u_n = \dfrac{\sin^k(n)\cos^\ell(n)}{n}$ où $k, \ell \in \mathbb{N}$ sont fixés et k et ℓ de parités différentes ou bien si $k = \ell$;
3. $u_n = \dfrac{|\sin(n)|}{n}$.

Exercice 21 : Comparaison avec une intégrale
En utilisant la comparaison avec une intégrale, étudier en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$ la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$;

2. $\displaystyle\sum \frac{1}{n(\ln n)(\ln(\ln n))^\alpha}$.

Indication : on pourra dans le premier cas calculer la dérivée de $x \mapsto (\ln x)^\beta$.

Exercice 22 : Petits "o"

Soit (u_n) une suite à termes réels.

1. Donner un exemple tel que $\sum u_n$ converge et $\sum u_n^2$ diverge.
2. On suppose maintenant que $\sum u_n$ et $\sum u_n^2$ convergent et que f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivable en 0, telle que $f(0) = 0$. Montrer que $\sum f(u_n)$ converge.

Exercice 23 : Calcul de sommes

Montrer que les séries suivantes convergent et calculer leurs sommes :

1. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \left(3^{-n+2} + 2^{-n+3}\right)$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n}{n!}$
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n!}$

Exercice 24 : Formule de Taylor avec reste intégral

On note f la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ définie sur $]-1,+\infty[$ et on fixe $\lambda \in]-1,1]$.

1. Montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}\lambda^n}{n}$ (où $n \geqslant 1$) converge.
2. Montrer que sa somme vérifie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\lambda^n}{n} = \ln(1+\lambda)$$
3. En déduire la somme de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ et de $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Exercice 25 : Calcul de $\sum_{n\geqslant 1} nx^{n-1}$

Soit x un nombre réel, avec $|x| < 1$.

1. Montrer que $\sum_n x^n$ et $\sum_n nx^{n-1}$ convergent.
2. Donner des expressions fermées (c'est-à-dire sans signe $\sum$) de
$$\sum_{n=0}^{N} x^n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{N} nx^{n-1}.$$

3. En déduire la valeur de $\sum_{n\geqslant 1} nx^{n-1}$.
4. Montrer que les séries suivantes convergent et calculer leurs sommes :

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\big((n-2)3^{-n}+(n-3)2^{-n}\big)$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n^2-2n)3^{-n}$

Exercice 26 : Attention à la semi-convergence
Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes complexes. Montrer que la série $\sum \frac{u_n}{n}$ converge.

Exercice 27 : Un pot-pourri
Soient a et b deux réels. On considére la série $\sum u_n$ avec $u_n = \frac{a^n}{n+b^n}$.

1. On suppose $|b| \leq 1$. Pour quelles valeurs de a la série est-elle absolument convergente ?
2. Même question pour $|b| > 1$.
3. On suppose $a = -1$. Pour quelles valeurs de b la série est-elle convergente ?
4. Représenter dans le plan les points de coordonnées (a, b) tels que la série est absolument convergente, convergente, divergente.

Exercice 28 : Règle de Raabe-Duhamel
Soit $(u_n)_n$ une suite de réels strictement positifs. On suppose qu'il existe $a > 0$ et $b > 1$ tels que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^b}\right) .$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = n^a u_n$. Montrer que la série de terme général $\ln \frac{v_{n+1}}{v_n}$ converge.
2. En déduire la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 29 : Attention à l'ordre de sommation.
On considère la série semi-convergente $\displaystyle\sum_n u_n \equiv \sum_n \frac{(-1)^n}{n}$. Montrer que pour toute limite $l \in [-\infty, +\infty]$, on peut trouver une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que la série $\sum_n u_{\varphi(n)}$ converge vers l.

Université Joseph Fourier
Grenoble

TD n°4 : Intégrabilité des fonctions à valeurs positives

Exercice 30 : Rappels de primitives

Pour chacune des intégrales suivantes,
- déterminer les intervalles I tels que l'intégrale soit bien définie lorsque a et b sont dans I
- calculer alors la valeur de l'intégrale,
- déterminer si I est compact ou non,
- si $\sup I$ (resp. $\inf I$) n'appartient pas à I déterminer la limite de l'intégrale, si elle existe lorsque b tend vers $\sup I$ (resp. lorsque a tend vers $\inf I$).

1. $\int_a^b t^n \, dt$ avec $n \in \mathbb{N}$
2. $\int_a^b P(t) \, dt$, avec P polynôme de degré d
3. $\int_a^b e^{\alpha t} \, dt$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$
4. $\int_a^b \sqrt{t} \, dt$
5. $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{t}} \, dt$
6. $\int_a^b t^{1/3} \, dt$
7. $\int_a^b \frac{1}{1+t^2} \, dt$

Exercice 31 : Une fraction rationnelle

1. Déterminer trois réels A, B, C tels que pour tout $x > 0$:
$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}$$
2. Calculer pour $X > 0$:
$$I(X) = \int_1^X \frac{dx}{x(x+1)(x+2)}$$
3. Quelle est la limite lorsque $X \to +\infty$ de $I(X)$? Que peut-on donc dire de l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)(x+2)}$?

Exercice 32 : Changement de variable

Soit $X \in [0, +\infty[$. Calculer $I(X) = \int_0^X \frac{dt}{\text{ch}t}$ puis déterminer la limite de $I(X)$ lorsque $X \to +\infty$.

Exercice 33 : Intégration par parties
Déterminer une primitive F de la fonction

$$\begin{array}{rcl} f : [0,+\infty[& \to & [0,+\infty[\\ t & \mapsto & t^2 e^{-t} \end{array}$$

En déduire que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, et déterminer sa valeur.

Exercice 34 : Nature d'intégrales impropres
Déterminer la nature de chacune des intégrales impropres suivantes.

1. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x+e^{-x}}\,dx$;
2. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln x}{x+e^{-x}}\,dx$;
3. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x+e^{-x}}\,dx$;
4. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x^2+1}\,dx$;
5. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2|\sin x|}$;
6. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} e^{-x}\,dx$;
7. $\displaystyle\int_0^{\infty} (x+2-\sqrt{x^2+4x+1})\,dx$;
8. $\displaystyle\int_1^{\infty} (\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{x^2+1})\,dx$;
9. $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-\sqrt{x^2-x}}\,dx$;
10. $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(\ln x)^3}\,dx$;
11. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{2+\sin x+\sin^2 x}{\sqrt[3]{x^4+x^2}}\,dx$;
12. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$;
13. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln x}{1-x}\,dx$;

Exercice 35 : Limite et convergence de l'intégrale

1. Soit $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ une fonction continue par morceaux telle que $f(t) \to \ell$ quand $t \to +\infty$, avec $\ell > 0$ ou $\ell = +\infty$. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge.
2. Donner un exemple de fonction continue par morceaux $g : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ telle que $g(t) \not\to 0$ quand $t \to +\infty$ et $\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$ converge.

Exercice 36 : Deux équivalents

1. Déterminer la nature des intégrales impropres $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$.

2. Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$. Calculer sa limite en $+\infty$.
3. Utiliser une intégration par parties pour montrer que :

$$f(x) \sim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}}{x} .$$

4. Montrer que :

$$f(x) \sim_{x \to 0^+} \ln \frac{1}{x} .$$

Exercice 37 : Dérivée logarithmique
Soit $f : [0, +\infty[\to]0, +\infty[$ une fonction continue. Pour tout $x \in [0, +\infty[$ on note $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$.

Montrer que les intégrales impropres $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{F(t)}\, dt$ ont même nature.

Exercice 38 : Tiré de l'examen de rattrapage 2010
Pour tout entier $n \geqslant 0$ on pose

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\cos^2 x}{1+x}\, dx, \qquad v_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{1+x}\, dx$$

1. Calculer $a_n := u_n + v_n$ et vérifier que la série $\sum_n a_n$ diverge.
2. En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout $n > 0$ on a

$$|u_n - v_n| \leqslant \frac{1}{2\pi n^2}$$

3. Déduire des résultats précédents que $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont deux séries divergentes.
4. Si α est un paramètre réel, on pose

$$f_\alpha(x) = \frac{\sin^2 x}{(1+x)^\alpha} \quad \forall x \geqslant 0$$

Déterminer les valeurs de α pour lesquelles la fonction f_α est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Université Joseph Fourier
Grenoble

TD n°5 : Intégrales impropres, cas général

Exercice 39 : $\int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t}\, dt$ n'est pas absolument convergente
Pour tout $n \geq 1$, on pose :

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t}\, dt\ .$$

1. Déterminer un réel $a > 0$ tel que pour tout $x \in [n\pi + \frac{\pi}{4}, n\pi + \frac{3\pi}{4}]$, $|\sin(x)| \geq a$.
2. En déduire un réel $b > 0$ tel que $u_n \geq \frac{b}{n+1}$ pour tout $n \geq 1$.
3. En déduire que $\int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t}\, dt$ est divergente.

Exercice 40 : Nature d'intégrales impropres
Déterminer la nature de chacune des intégrales impropres suivantes.

1. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\cos x}{\ln(x)}\, dx$;
2. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin(x-1)}{\ln(x)}\, dx$;
3. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x + e^{-x}}\, dx$;
4. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{ix}}{x^{1/2} + x^{1/4}\sin(x)}\, dx$;
5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos\frac{2}{x}}{x}\, dx$;
6. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin^3(x)}{\sqrt{x+2}}\, dx$;
7. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x(1-x^2)\ln|x|}\, dx$;

Exercice 41 : $\int_0^{+\infty} f(t^\alpha)\, dt$ pour une fonction périodique de moyenne nulle
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, périodique, de période 1, et telle que $\int_0^1 f(t)\, dt = 0$. On rappelle qu'une fonction continue sur un intervalle compact est bornée sur cet intervalle.

1. Montrer que la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}$, et en déduire que la fonction F définie par $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$ est bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t^a}\, dt$ converge pour tout $a \in]0, 1[$.
3. En déduire que $\int_0^{+\infty} f(t^\alpha)\, dt$ converge pour tout $\alpha > 1$.
4. Montrer que $\int_0^{+\infty} \sin(\sqrt{t})\, dt$ est divergente.