Université Joseph Fourier
Grenoble

Corrigé DM3

Exercice 9 : Tiré de l'examen de rattrapage 2010
Pour tout entier $n \geqslant 0$ on pose

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\cos^2 x}{1+x}\, dx, \qquad v_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{1+x}\, dx$$

1. Calculer $a_n := u_n + v_n$ et vérifier que la série $\sum_n a_n$ diverge.
   Solution :

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{1+x}\, dx\ , \\ &= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{1+x}\, dx\ , \\ &\geq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{n\pi+1}\, dx\ , \\ &= \frac{\pi}{n\pi+1}\ . \end{aligned}$$

   Soit $w_n = \frac{\pi}{n\pi+1}$ qui est une suite positive. w_n est équivalente à $1/n$ lorsque n tend vers l'infini, or $\sum \frac{1}{n}$ diverge (Riemann), donc la série $\sum w_n$ diverge également, et donc la série $\sum a_n$ diverge aussi par comparaison.

2. En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout $n > 0$ on a

$$|u_n - v_n| \leqslant \frac{1}{2\pi n^2}$$

   Solution :

$$\begin{aligned} u_n - v_n &= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{1+x}\, dx\ , \\ &= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\cos 2x}{1+x}\, dx\ , \\ &= \left[\frac{\sin 2x}{2(1+x)}\right]_{n\pi}^{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin 2x}{2(1+x)^2}\, dx\ , \\ &= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin 2x}{2(1+x)^2}\, dx\ . \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
|u_n - v_n| &= \left| \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin 2x}{2(1+x)^2}\, dx \right| , \\
&\leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin 2x}{2(1+x)^2} \right| dx , \\
&\leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{2(1+x)^2}\, dx , \\
&\leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{2x^2}\, dx , \\
&\leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{2n^2\pi^2}\, dx , \\
&= \frac{\pi}{2n^2\pi^2} , \\
&= \frac{1}{2n^2\pi} .
\end{aligned}$$

3. Déduire des résultats précédents que $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont deux séries divergentes.
   Solution :
   On sait que $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann convergente), donc $\sum \frac{1}{2n^2\pi}$ converge. Or $0 \leq |u_n - v_n| \leq \frac{1}{2n^2\pi}$ donc par comparaison de séies à termes généraux positifs, $\sum |u_n - v_n| converge$. Or la convergence absolue implique la convergence, donc $\sum u_n - v_n$ converge. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ étaient de natures différentes, $\sum u_n - v_n$ divergerait, ce qui est faux. Donc $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature. Mais si elles convergeaient toutes les deux, $\sum(u_n + v_n)$ convergerait, ce qui est exclu (premièer question). Donc $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont deux séries divergentes.

4. Si α est un paramètre réel, on pose

$$f_\alpha(x) = \frac{\sin^2 x}{(1+x)^\alpha} \quad \forall x \geqslant 0$$

   Déterminer les valeurs de α pour lesquelles la fonction f_α est intégrable sur $[0, +\infty[$.
   Solution :
   On remarque que f_α est positive et continue sur $[0, +\infty[$. Comme $x_n = n\pi$ est une suite croissante de $[0, +\infty[$ tendant vers $+\infty$, $\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\, dx$ converge si et seulement si la série $\sum \int_{x_n}^{x_{n+1}} f_\alpha(x)\, dx$ converge. Lorsque $\alpha = 1$, cette série est la série $\sum v_n$ qui diverge d'après la question précédente. Donc $\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\, dx$ diverge lorsque $\alpha = 1$.
   Si $\alpha \leq 1$, pour tout x de $[0, +\infty[$,

$$f_\alpha(x) \geq f_1(x) \geq 0 ,$$

   Donc par comparaison d'intégrales de fonctions positives, $\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\, dx$ diverge également.

Enfin, si $\alpha > 1$, pour tout x de $[1, +\infty[$,

$$0 \leq f_\alpha(x) \leq \frac{1}{x^\alpha}$$

or l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ converge, donc par comparaison d'intégrales de fonctions positives, $\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\, dx$ converge.