L2, Université Joseph Fourier
Séries et intégration (MAT 232)
2013-2014

Correction du partiel

N.B. : cette correction n'a pas pour vocation d'expliquer pédagogiquement comment résoudre les exercices mais de montrer un exemple de rédaction de copie qui aurait eu la note maximale.

1. Autour du cours

1. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite nombres complexes. Le critère de Cauchy dit que (U_n) converge dans $\mathbb{C}$ si et seulement si
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p, q \geqslant N,\ |U_p - U_q| \leqslant \varepsilon\ .$$
2. Le théorème des séries alternées s'énonce comme suit. Si $u_n = (-1)^n v_n$ avec (v_n) une suite réelle positive, décroissante et qui converge vers 0, alors la série $(\sum u_n)$ converge.
3. Soient $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ des séries à termes positifs telles que $u_n \leqslant v_n$ pour tout n. On a alors pour tout $N \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{n=0}^{N} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{N} v_n\ . \tag{1}$$
Supposons que la série $(\sum u_n)$ diverge. Comme la série est à termes positifs, on a forcément $\sum_{n=0}^{N} u_n \to +\infty$ quand $N \to +\infty$ et donc d'après (1), il en est de même pour la somme partielle de la série $(\sum v_n)$, qui diverge elle aussi. Par contraposée, si la série $(\sum v_n)$ converge, alors c'est que la série $(\sum u_n)$ converge aussi.

2. Nature de séries

1. Soit $u_n = \frac{n+\ln n}{n+3^n}$. Quand n tend vers l'infini, par croissances comparées, on a l'équivalent $u_n \sim \frac{n}{3^n}$. Comme u_n est positif, il suffit de trouver la nature de $(\sum \frac{n}{3^n})$ pour avoir celle de $(\sum u_n)$. En appliquant la règle de d'Alembert, on obtient facilement que ces séries convergent car $\frac{(n+1)/3^{n+1}}{n/3^n} \to \frac{1}{3} < 1$ quand $n \to +\infty$.
2. On a
$$\ln\left(\frac{n+2}{n+3}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{n+3}\right) \sim -\frac{1}{n+3} \sim -\frac{1}{n} \qquad \text{quand } n \to +\infty\ .$$
La série $(\sum \frac{1}{n})$ est une série de Riemann divergente. Les termes des séries ci-dessus étant tous négatifs, les équivalences permettent de conclure que la série $\sum \ln\left(\frac{n+2}{n+3}\right)$ diverge.
3. Pour n assez grand, on a que $\ln n/n \geqslant 1/n$. La série $(\sum \frac{1}{n})$ étant positive et divergente, la série $(\sum \frac{\ln n}{n})$ diverge (cf. exo 1.3).
4. En utilisant les mêmes arguments que ci-dessus, la série $(\sum \frac{\ln n}{\ln(e^n-1)})$ est divergente car $\frac{\ln n}{\ln(e^n-1)} \geqslant \frac{\ln n}{\ln(e^n)} = \frac{\ln n}{n}$.
5. Soit $a \in \mathbb{C}$ et soit $u_n = \frac{2^n}{1+2^n+a^n}$. Si $|a| < 2$, le terme dominant du dénominateur est 2^n et on a que $\lim_{n\to 0} u_n = 1 \neq 0$: la série $(\sum u_n)$ diverge. Si $|a| > 2$, le terme dominant du dénominateur est a^n et on a que $|u_n| \sim (\frac{2}{|a|})^n$ avec $\frac{2}{|a|} < 1$: d'après la régle des séries géométriques et par équivalence, $(\sum u_n)$ converge absolument. Si $|a| = 2$, on pose $a = 2e^{i\theta}$ et on a
$$u_n = \frac{2^n}{1+2^n+a^n} = \frac{1}{1+e^{in\theta}+1/2^n}$$
qui ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$: la série $(\sum u_n)$ diverge. En résumé $(\sum u_n)$ converge si et seulement si $|a| > 2$.

6. La série $(\sum \frac{\sin n}{\sqrt{n}})$ converge par application directe du théorème d'Abel. En effet, $\frac{1}{\sqrt{n}}$ est une suite positive décroissante et tendant vers 0 et pour tout N

$$\left|\sum_{n=0}^{N} \sin n\right| = \left|\mathrm{Im}(\sum_{n=0}^{N} e^{in})\right| \leqslant \left|\frac{1-e^{i(N+1)}}{1-e^{i}}\right| \leqslant \frac{2}{|1-e^{i}|} \ ,$$

ce qui montre que la somme $\sum_{n=0}^{N} \sin n$ est bornée uniformément en N.

7. Par développement limité, on trouve :

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^{1/3}}\right) = \frac{(-1)^n}{n^{1/3}} - \frac{1}{2n^{2/3}} + \frac{(-1)^n}{3n} - \frac{1}{4n^{4/3}} + o\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right) \ .$$

En utilisant le critère des séries alternées, on montre facilement que les séries des premiers et troisièmes termes convergent. Les termes 2 et 4 sont les termes de deux séries de Riemann qui diverge et converge respectivement. Le terme $o\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right)$ est négligeable en valeur absolue devant une série de Riemann convergente, donc engendre une série qui converge absolument. En conclusion, seul un des termes donne une série qui diverge. On en conclut donc que la série $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^{1/3}}\right)$ est divergente.

8. Pour n pair, on a $\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^n \geqslant 1$. la série $\sum \left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^n$ diverge donc car son terme général ne tend pas vers 0.

3. Convergence absolue ou pas (3 points)

Pour n assez grand, on a $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$. Par comparaison, la série $(\sum \frac{1}{\ln n})$ diverge, donc la série $(\sum \frac{(-1)^n}{\ln n})$ ne converge pas absolument.

La suite $\left(\frac{1}{\ln n}\right)_n$ est positive, décroissante et tend vers 0, donc, par le théorème des séries alternées, la série $(\sum \frac{(-1)^n}{\ln n})$ converge.

On a $\left|\frac{\cos(n\sqrt{3})}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3}$, donc par comparaison avec la série de Riemann $(\sum \frac{1}{n^3})$, la série $(\sum \frac{\cos(n\sqrt{3})}{n^3})$ converge absolument.

Comme une série qui converge absolument converge, la série $(\sum \frac{\cos(n\sqrt{3})}{n^3})$ converge.

4. Règle de Cauchy (3 points)

1. Soit α un réel strictement compris entre 1 et ℓ. Comme $\lim u_n^{1/n} = l > \alpha$, il existe n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on a $u_n^{1/n} > \alpha$, soit $u_n > \alpha^n$.
2. La série $(\sum \alpha^n)$ est une série géométrique divergente à termes positifs. Par comparaison, $(\sum u_n)$ est également divergente.
3. Dans le cas $\ell < 1$, soit α un réel strictement compris entre ℓ et 1. Alors, il existe n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on a $u_n^{1/n} < \alpha$, soit $u_n < \alpha^n$. Comme la série $(\sum \alpha^n)$ est une série géométrique convergente et que (u_n) est à termes positifs, par comparaison, la série $(\sum u_n)$ converge.