M1 BIBS Orsay
Analyse spectrale et Séries Chro.
2010-2011

Travaux pratiques

Analyse visuelle - Processus stationnaire, ARMA

Le TP 1 portera sur les points suivants :
- description d'une série chronologique,
- extraction de la tendance,
- extraction de la saisonnalité,
- stationnarisation.

Exercice 1.1 Analyse visuelle de séries chronologiques
Décrire les trois séries chronologiques `uspop, AirPassengers` et `sunspots`, dans cet ordre.

On rappelle ce qu'on entend par "*décrire une série chronologique*" dans ce cours : c'est tracer la série, l'observer, puis commenter les aspects suivants :
- tendance (linéaire ? exponentielle ? etc.)
- phénomène saisonnier (amplitude variable ? motif variable ?)
- bruit (amplitude variable ? Corrélation variable ?)

Enfin, cela signifie :

> transformer de la façon la plus simple possible la série de manière à obtenir un résidu stationnaire, et être capable de résumer les transformations effectuées .

M1 BIBS Orsay
Analyse spectrale et Séries Chro.
2010-2011

Travaux pratiques

Processus stationnaires – Prédiction

Le TP 2 portera sur les points suivants :
- analyse de réalisations de processus aléatoires, stationnaires ou non,
- tracé de l'ACF théorique et empirique d'un $ARMA$,
- prédiction d'un $ARMA$ dont on connait les paramétres

Exercice 2.1 Un peu de simulation
Simuler une réalisation de longueur $n = 300$ pour chacun des processus suivant :

1. un bruit blanc gaussien,
2. un $AR(1)$ très corrélé ($|\phi| < 1$ mais proche de 1),
3. une marche aléatoire,
4. la concaténation d'un bruit blanc et d'un $AR(1)$, chacun de longueur 150.

Pour chaque réalisation, la décrire et analyser la stationnarité en visualisant la matrice de covariance empirique ainsi que l'autocovariance empirique à court terme.

Exercice 2.2 ACF théorique et empirique d'un ARMA, prédiction
Soit X un $ARMA(3, 2)$ gaussien de moyenne nulle et de paramètres : $\phi_1 = 0.7$, $\phi_2 = 0.3$, $\phi_3 = -0.4$, $\theta_1 = -0.3$, $\theta_2 = 0.9$ et $\sigma^2 = 4$.

1. Simuler une réalisation de X de longueur $n = 300$, et comparer sur un même graphique les autocorrélations empiriques et théoriques de X.
2. Prédire les valeurs de $X_{n+1}, \ldots, X_{n+10}$, et tracez-les assorties d'intervalles de confiance individuels, à la suite de la série initiale.

M1 BIBS Orsay
Analyse spectrale et Séries Chro.
2010-2011

Travaux pratiques

Statistique sur les ARMA

Le TP 3 portera sur les points suivants :
- ajustement d'un modèle $ARMA$
- fonction de corrélation croisée

Exercice 3.1 Charger les fichiers `x3.rda` et `x4.rda`, qui sont deux $ARMA$ simulés.

1. Ajuster un modèle $ARMA$ sur les deux séries $x3$ et $x4$.
2. Ecrire une fonction `armaic` qui prend en entrée une série x et un entier M, et qui cherche, parmi tous les modèles $ARMA(p, q)$ avec $p + q \leqslant M$, celui qui a la plus petite valeur d'AIC. L'utiliser sur les séries `x3.rda` et `x4.rda`, commenter.

Exercice 3.2 Charger les fichiers `ssask.rda` et `reddeer.rda` qui contiennent les débits mensuels de deux rivières (en $m^3.s^{-1}$). La *Red Deer River* est un affluent de la *South Saskatchewan River*, et toutes deux sont situées au Canada.

1. Visualiser les séries et les décrire rapidement.
2. Stationnariser chacune des séries (en effectuant une transformation de Box-Cox, puis une désaisonnalisation). On notera x la série obtenue en stationnarisant la série des débits de la Red Deer River et y celle obtenue en stationnarisant la série South Saskatchewan.
3. Sur les séries x et y, ajuster un $ARMA$.
4. Examiner la fonction de corrélation croisée des résidus de ces estimations.

M1 BIBS Orsay
Analyse spectrale et Séries Chro.
2010-2011

Travaux pratiques

Modèles d'état et modèles non stationnaires

Le TP 4 portera sur les points suivants :
- prédiction par filtre de Kalman
- ajustement d'un modèle TFN
- ajustement d'un modèle $SARIMA$

Exercice 4.1 Cet exercice est fortement inspiré du chapitre 17 du livre de Hipel et McLeod [1]. On reprend la modélisation des séries des fichiers `ssask.rda` et `reddeer.rda` initiée dans l'exercice 3.2. On rappelle que la *Red Deer River* est un affluent de la *South Saskatchewan River*, et que toutes deux sont situées au Canada.

1. Proposer un modèle TFN pour la série y en fonction de la série x, et estimer les coefficients par la méthode de Box et Jenkins.
2. Comparer les prédictions à 1 pas obtenues avec le modèle TFN de la question 5 et celles obtenues avec le modèle $ARMA$ de la question 3. Commenter.
3. Sur un même graphique, tracer la série des débits de la South Saskatchewan River ainsi que les prédictions à 1 pas de cette série provenant des modèles TFN et $ARMA$ pour la série stationnarisée.

Exercice 4.2 Modélisation à l'aide d'un processus $SARIMA$
On veut ajuster un modèle $SARIMA$ sur la série `AirPassengers`, puis prédire les 12 prochaines valeurs.

1. Quelle est la période de la saisonnalité de cette série ?
2. Modéliser cette série avec un $SARIMA$ en utilisant la méthode indiquée dans le cours.
3. Quel est le modèle final pour `air.rda` ?
4. A l'aide de la fonction `predict`, prédire les valeurs de `air.rda` sur les 12 prochains mois (année 1961). A l'aide de `ts.plot`, représenter sur un même graphique les valeurs de la série initiale et les valeurs prédites assorties des intervalles de confiance (individuels) à 95%.

Références

[1] Keith W. Hipel and A. Ian McLeod. *Time series modelling of water resources and environmental systems*. Number 45 in Developments in water science. Elsevier, 1994. `http://www.stats.uwo.ca/faculty/aim/1994Book/`.

M1 BIBS Orsay
Analyse spectrale et Séries Chro.
2010-2011

Travaux pratiques

Analyse spectrale

Le TP 5 portera sur les points suivants :
- transformée de Fourier discrète
- spectre d'un $ARMA$
- transformée en cosinus discret

Exercice 5.1 Le fichier `sinar.rda` contient une réalisation d'un signal X défini par :

$$X_t = s_t + B_t \ .$$

où s est une sinusoïde de fréquence, phase et amplitude inconnues, et B est un bruit $AR(1)$.
- Examiner le périodogramme du signal X.
- Reconstruire s.
- Estimer les paramètres du bruit B.

Exercice 5.2 Télécharger le package R intitulé `dtt` avec la commande `install.packages('dtt')`. On peut obtenir la transformée en cosinus discret avec la commande `dct` de ce package. Précisément, la commande `dct(x)` renvoie la formule suivante :

$$X_k = \sum_{j=0}^{n-1} x_j \cos\left(\frac{k\pi}{n}\left(j+\frac{1}{2}\right)\right) \ .$$

1. En notant e_k le vecteur défini par :

$$\forall j \in \{0,\dots,n-1\}, \quad e_k(j) = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\left(j+\frac{1}{2}\right)\right) \ ,$$

   calculer la norme de $e_0,\dots,e_{n-1}$. Quelle est la fréquence de e_k ?
2. Comparer sur un même graphe la transformée en cosinus discret et la transformée de Fourier discrète de la série AirPassengers.