M1 BIBS Orsay
Analyse spectrale et Séries Chro.
2009-2010

Examen du 6 mai 2010

3 heures

Important :
• *Tous les documents du cours sont autorisés. Il est interdit d'aller sur internet.*
• *Les exercices 3 et 4 sont à traiter avec R et à rendre en un seul fichier au format* {`numéro de copie`}`.doc` *ou* {`numéro de copie`}`.pdf`*, dans le dossier suivant :*
`rrossign@ssh1.ie2.u-psud.fr:doc/depot/`
• *Les données sont disponibles dans le dossier suivant :*
`rrossign@ssh1.ie2.u-psud.fr:doc/examen/`

Exercice 1. Soit X un $AR(1)$ défini par :

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad X_t = \phi X_{t-1} + Z_t \ ,$$

où Z est un bruit blanc de variance σ^2 et $|\phi| < 1$. On pose :

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad Y_t = X_t - X_{t-1} \ .$$

1. Montrer que Y est un processus stationnaire centré, puis que c'est un $ARMA(p, q)$. Préciser les valeurs de p et q et donner l'équation canonique de Y.
2. Que vaut la variance de Y_t ?

Exercice 2. Soit X un processus $ARMA$ satisfaisant

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad X_t - \frac{5}{2}X_{t-1} - \frac{3}{2}X_{t-2} = Z_t + 6Z_{t-1} + 8Z_{t-2},$$

où Z est un bruit blanc gaussien de variance σ^2.

1. Montrer que X vérifie l'équation canonique suivante :

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad X_t - \frac{1}{3}X_{t-1} = \widetilde{Z}_t + \frac{1}{4}\widetilde{Z}_{t-1}$$

   où $\widetilde{Z}$ est un bruit blanc dont on précisera la variance.
2. Pour un processus SLC , on rappelle la notation désignant le passé de X jusqu'à l'instant n :

$$H_n^X = \overline{\text{vect}}\{X_t, t \leqslant n\} \ .$$

   Expliquer pourquoi pour tout n, $H_n^X = H_n^{\widetilde{Z}}$.

3. Montrer que l'on peut écrire

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad X_t = \sum_{k=0}^{+\infty} \psi_k \widetilde{Z}_{t-k}.$$

   Expliciter $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$.
4. Montrer, en utilisant la relation $ARMA$ canonique, que pour $h \geqslant 2$, $P(X_{n+h}|H_n^X)$ se calcule facilement à l'aide de $P(X_{n+1}|H_n^X)$.
5. Calculer $P(X_{n+1}|H_n^X)$.
6. Connaissant $(X_p,\ p \leqslant n)$, donner un intervalle de confiance à 95% pour X_{n+1}.

Exercice 3. Dans cet exercice, on étudie la série `serie1.rda`, et on considère un modèle additif de la forme :

$$\forall t = 1, \ldots, n, \quad x_t = m(t) + s(t) + \varepsilon_t \ , \tag{1}$$

où m est une tendance polynomiale, s une saisonnalité et ε un bruit $ARMA$ causal et de moyenne nulle (conduit par un bruit blanc gaussien).

1. Tracer la série `serie1.rda` et son périodogramme. Quelle est la période p de la saisonnalité s ?
2. Estimer une tendance polynomiale et une saisonnalité de période p par moindres carrés ordinaires sur la série `serie1.rda`.
3. Sur le résidu de cette estimation, proposer un modèle $ARMA$.
4. Une fois identifié l'ordre du bruit $ARMA$, ajuster directement avec `arima` un modèle de type (1) sur `serie1.rda`. Pensez à valider votre modèle et donnez les valeurs estimées des paramètres de l'$ARMA$.
5. Représenter l'estimation de $m + s$.
6. En utilisant la fonction `predict`, prédire les 12 prochaines valeurs de la série `serie1.rda`. Donner des intervalles de confiance de coefficient de sécurité 95% pour chaque prédiction en supposant que le bruit ε est gaussien.

Exercice 4. Dans cet exercice, on étudie la série `serie2.rda`.

1. Tracer la série `serie2.rda`. Est-elle stationnaire ?
2. Ajuster un $ARMA$ gaussien de moyenne quelconque sur cette série. Pensez à valider votre modèle.
3. Peut-on considérer cet $ARMA$ comme étant de moyenne nulle ?