

TABLE DES MATIERES

Contents	viii
Avant propos	ix
Chapitre 1 : Compléments sur le calcul matriciel	
<i>Problème 1 : Normes matricielles induites</i>	1
<i>Problème 2 : Valeurs propres et rayon spectral d'une matrice</i>	8
<i>Problème 3 : Localisation des valeurs propres</i>	10
<i>Problème 4 : Le quotient de Rayleigh</i>	14
<i>Problème 5 : Matrices tridiagonales. Agrégation 1993, extrait</i>	17
<i>Problème 6 : Conditionnement d'un système linéaire</i>	20
<i>Problème 7 : Conditionnement du problème de valeurs propres pour les matrices symétriques réelles</i>	23
<i>Problème 8 : Dérivabilité des valeurs propres d'une fonction matricielle en dimension 2</i>	26
<i>Problème 9 : Matrices de Hessenberg et tridiagonales</i>	29
Chapitre 2 : Résolution de systèmes linéaires. Déterminants et inverses	
<i>Problème 10 : Matrices de Hilbert</i>	33
<i>Problème 11 : Polynômes de Legendre et matrices de Hilbert</i>	35
<i>Problème 12 : Système tridiagonal. Agrégation 1993, extrait</i>	38
<i>Problème 13 : Système tridiagonal</i>	40
<i>Problème 14 : Méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires</i>	45
<i>Problème 15 : Méthodes itératives sur une matrice particulière</i>	51
<i>Problème 16 : Méthode de relaxation</i>	56
<i>Problème 17 : Méthode de relaxation pour les matrices tridiagonales symétriques définies positives</i>	59
Chapitre 3 : Valeurs et vecteurs propres	
<i>Problème 18 : Méthode de la puissance itérée et de déflation</i>	63

<i>Problème 19 : Méthode de Jacobi pour les matrices symétriques</i>	69
<i>Problème 20 : Tridiagonalisation d'une matrice symétrique.</i>	
<i>Méthode de Householder</i>	77
<i>Problème 21 : Méthode de Givens pour les matrices tridiagonales</i>	81
<i>Problème 22 : Une méthode homotopique de calcul des</i>	
<i>valeurs propres d'une matrice tridiagonale</i>	88
<i>Problème 23 : Méthode Q-R. Agrégation 1981, extrait</i>	93
<i>Problème 24 : Rayon spectral et majorations de normes matricielles.</i>	
<i>Agrégation 1980, extrait</i>	103

Chapitre 4 : Equations et systèmes d'équations non linéaires

<i>Problème 25 : Polynômes orthogonaux et matrices tridiagonales</i>	109
<i>Problème 26 : Inégalités de Newton et racines réelles d'un polynôme</i>	117
<i>Problème 27 : Méthode de Newton–Maehly</i>	124
<i>Problème 28 : Perturbation d'un polynôme. Influence sur les racines.</i>	
<i>Agrégation 1995, extrait</i>	127
<i>Problème 29 : Transformation de Schur et localisation des zéros</i>	
<i>d'un polynôme complexe. Agrégation 1995, extrait</i>	131
<i>Problème 30 : Méthode de Newton–Kantorovitch</i>	136
<i>Problème 31 : Calcul de l'inverse d'une matrice. Méthode de Schulz</i>	139
<i>Problème 32 : Racine carrée d'une matrice complexe</i>	141

Chapitre 5 : Approximation polynomiale des fonctions numériques

<i>Problème 33 : Polynômes d'interpolation d'Hermite</i>	152
<i>Problème 34 : Polynômes d'interpolation de Fejer–Hermite</i>	157
<i>Problème 35 : Polynômes de Bernstein</i>	160
<i>Problème 36 : Théorème de Korovkin</i>	169
<i>Problème 37 : Interpolation spline cubique</i>	171
<i>Problème 38 : Fonctions splines d'ajustement. Agrégation 1974, extrait</i>	179

Chapitre 6 : Calcul approché des intégrales

<i>Problème 39 : Méthodes de Newton–Cotes</i>	192
<i>Problème 40 : Méthode de Romberg</i>	202
<i>Problème 41 : Méthodes de Gauss</i>	207
<i>Problème 42 : Transformation de Fourier discrète.</i>	

<i>Algorithme de Cooley et Tukey</i>	215
<i>Problème 43 : Transformation de Fourier discrète.</i>	
<i>Agrégation 1993, extrait</i>	222
Chapitre 7 : Systèmes différentiels	
<i>Problème 44 : Problème de Cauchy. Méthodes à un pas</i>	226
<i>Problème 45 : Ordre d'une méthode à un pas. Méthode RK4</i>	232
<i>Problème 46 : Méthode de différentiation rétrograde de Gear.</i>	
<i>Agrégation 1980, extrait</i>	238
Chapitre 8 : Analyse fonctionnelle	
<i>Problème 47 : Théorème de projection sur un convexe fermé dans un</i> <i>espace de Hilbert. Applications</i>	251
<i>Problème 48 : L'espace de Sobolev $H^1(]a, b[)$</i>	261
<i>Problème 49 : Problème de Dirichlet dans $H_0^1(]-1, 1[)$. Agrégation 1994, extrait</i>	272
<i>Problème 50 : Discrétisation par des polynômes du problème de Dirichlet</i> <i>dans $H_0^1(]-1, 1[)$. Agrégation 1994, extrait</i>	276
Bibliographie	286
Index	288

AVANT-PROPOS

Ce recueil de 50 problèmes corrigés d'analyse numérique est destiné aux étudiants de licence et maîtrise de Mathématiques et plus particulièrement aux candidats à l'Agrégation.

Les enseignants y trouveront également une source d'inspiration.

On peut distinguer trois types de problèmes :

- 1 – des problèmes de révisions et d'approfondissement de notions essentielles ;
- 2 – des problèmes originaux ;
- 3 – des extraits de problèmes d'agrégation qui illustrent des notions introduites dans les problèmes précédents.

Un grand nombre de problèmes sont accessibles au niveau licence et peuvent être profitables aux élèves de mathématiques spéciales et aux candidats à l'agrégation interne.

Les problèmes extraits d'agrégation et le chapitre sur l'analyse fonctionnelle supposent connues les notions des programmes de licence (topologie, intégration, calcul différentiel et variables complexes).

Les problèmes proposés permettent de parcourir l'essentiel de ce que doit connaître un candidat à l'option analyse numérique de l'Agrégation de Mathématiques.

Certains problèmes sont également utiles pour l'épreuve d'analyse.

Le lecteur pourra aussi y trouver des idées pour les leçons d'oral.

Une façon efficace d'exploiter ces problèmes consiste évidemment à les rechercher et les rédiger de façon détaillée, puis à confronter les résultats aux solutions proposées.

Le chapitre 1 est composé de problèmes qui ont pour objet de réviser et d'approfondir des notions fondamentales d'algèbre linéaire.

Les thèmes suivants sont étudiés :

- Normes matricielles induites.
- Rayon spectral d'une matrice.
- Localisation des valeurs propres d'une matrice (théorèmes de Gerschgorin–Hadamard et d'Ostrowski).
- Matrices tridiagonales et tridiagonales par blocs.
- Quotient de Rayleigh.
- Conditionnement d'un système linéaire.
- Continuité des valeurs propres d'une famille de matrices dépendant continûment d'un paramètre (théorème de Courant–Fischer).
- Matrices de Hessenberg irréductibles.

Le chapitre 2 porte sur les problèmes de résolutions de systèmes linéaires et d'inversions de matrices. C'est l'aspect théorique avec les preuves de convergence des méthodes qui est privilégié. Des calculs concrets sont également proposés. L'aspect programmation est développé dans certains problèmes.

Les thèmes suivants sont étudiés :

- Matrices de Hilbert.
- Résolution de systèmes linéaires tridiagonaux.
- Méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires.

Le chapitre 3 porte sur les problèmes de valeurs et vecteurs propres en dimension finie avec les mêmes motivations que pour le chapitre 2.

Les thèmes suivants sont étudiés :

- Méthodes classiques de recherche d'éléments propres. Les problèmes de convergence des méthodes sont développés de façon rigoureuse.
- Une méthode homotopique de calcul des valeurs propres d'une matrice tridiagonale symétrique.
- Méthode Q-R avec une étude approfondie de la convergence.

Le chapitre 4 est relatif aux équations et systèmes d'équations non linéaires.

Les thèmes suivants sont étudiés :

- Equations polynomiales.
- Polynômes orthogonaux et matrices tridiagonales.
- Méthode de Newton–Maehly de calcul de toutes les racines réelles d'un polynôme réel.
- Conditionnement et localisation des racines d'un polynôme complexe.
- Méthode de Newton–Kantorovitch (version simplifiée de la méthode de Newton–Raphson).
- Calcul de l'inverse d'une matrice par une adaptation de la méthode de Newton–Raphson.
- Diverses méthodes de calcul de la racine carrée d'une matrice complexe.

Le chapitre 5 est relatif aux problèmes de l'approximation polynomiale des fonctions d'une variable réelle.

Les thèmes suivants sont étudiés :

- Etude approfondie des polynômes d'interpolation de Lagrange, d'Hermite et de Fejer–Hermite.
- Polynômes de Bernstein et théorème de Korovkin.
- Fonctions splines cubiques et d'ajustement.

Le chapitre 6 est relatif au calcul approché des intégrales avec étude développée de l'erreur de quadrature.

Les thèmes suivants sont étudiés :

- Méthodes de quadrature de Newton–Cotes.
- Méthode de Romberg.
- Méthodes de quadrature de Gauss utilisant les polynômes orthogonaux.
- Transformation de Fourier rapide.

Le chapitre 7 est relatif à la résolution approchée des équations et des systèmes différentiels. On étudie particulièrement les conditions de convergence.

Les thèmes suivants sont étudiés :

- Méthodes itératives à un pas.
- Méthodes de Runge–Kutta.
- Méthode de différentiation rétrograde de Gear.

Le chapitre 8 est relatif à l'analyse fonctionnelle.

Les thèmes suivants sont étudiés :

- Théorème de projection et de Riesz.
- Espaces de Sobolev.
- Problème de Dirichlet et méthode variationnelle de Rayleigh, Ritz et Galerkin (éléments finis).