

# Nombres irrationnels

Jean Etienne ROMBALDI

3 janvier 2006



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Nombres irrationnels</b>	<b>1</b>
1.1	Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$	1
1.2	Critères d'irrationalité	2
1.3	Le théorème d'intégration par parties itéré	3
1.4	Irrationalité de $e^r$ pour $r \in \mathbb{Q}^*$	3
1.5	Irrationalité de $\pi^2$	7
1.6	Irrationalité de $\cos(\sqrt{r})$ et $\operatorname{ch}(\sqrt{r})$ pour $r$ rationnel strictement positif	9
1.7	Irrationalité de $\frac{\tan(\sqrt{r})}{\sqrt{r}}$ et $\frac{\operatorname{th}(\sqrt{r})}{\sqrt{r}}$ pour $r \in \mathbb{Q}_+^*$	14
1.8	Irrationalité des racines des fonctions de Bessel d'indice entier	17
1.9	Exercices	23



# Nombres irrationnels

## 1.1 Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$

**Définition 1.1** *Un sous-groupe additif  $H$  de  $(\mathbb{R}, +)$  est discret si pour tout compact  $K$  de  $\mathbb{R}$ , l'intersection  $H \cap K$  est finie.*

**Théorème 1.1** *Les sous-groupes additifs de  $\mathbb{R}$  discrets sont de la forme :*

$$\mathbb{Z}\alpha = \{p\alpha \mid p \in \mathbb{Z}\},$$

où  $\alpha$  est un réel.

**Démonstration.** Il est clair que tout sous-groupe de  $(\mathbb{R}, +)$  de la forme  $\mathbb{Z}\alpha$  est discret. En effet pour  $\alpha = 0$  c'est clair et pour  $\alpha \neq 0$  tout compact  $K$  de  $\mathbb{R}$  est contenu dans un intervalle  $[a, b]$  avec  $a < b$  et il n'y a qu'un nombre fini d'entiers  $p$  vérifiant  $a \leq p\alpha \leq b$ .

Réciproquement si  $H$  est un sous-groupe discret de  $(\mathbb{R}, +)$  non réduit à  $\{0\}$ , il existe alors un réel  $a$  dans  $H \cap \mathbb{R}_+^*$  ( $0 \neq a \in H \Rightarrow -a \in H$ ) et  $[0, a] \cap H$  est fini non vide, il admet donc un plus petit élément  $\alpha > 0$ . De  $\alpha \in H$  on déduit que  $\mathbb{Z}\alpha \subset H$ . De plus, pour tout  $x \in H$  il existe un entier relatif  $k$  tel que  $0 \leq x - k\alpha < \alpha \leq a$  ( $k = E\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ ) et avec  $x - k\alpha \in H \cap \mathbb{R}_+$  on déduit du caractère minimal de  $\alpha$  que  $x - k\alpha = 0$ , soit  $x = k\alpha \in \mathbb{Z}\alpha$ . On a donc en définitive  $H = \mathbb{Z}\alpha$ . ■

De manière plus générale on dit qu'un sous-groupe additif  $H$  de  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 1$ ) est discret si pour tout compact  $K$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $H \cap K$  est fini et on a le résultat suivant (voir [5] chapitre IV).

**Théorème 1.2** *Si  $H$  est sous-groupe additif discret de  $\mathbb{R}^n$  alors :*

$$H = \sum_{j=1}^p \mathbb{Z}e_j$$

où  $\{e_1, \dots, e_p\}$  est un système libre dans  $\mathbb{R}^n$ .

**Théorème 1.3** *Si  $H$  un sous-groupe additif de  $\mathbb{R}$  alors  $H$  est dense ou discret.*

**Démonstration.** Si  $H$  un sous-groupe additif de  $\mathbb{R}$  non réduit à  $\{0\}$  alors :

$$K = H \cap \mathbb{R}_+^* \neq \emptyset$$

et cet ensemble est non vide minoré par 0, il admet donc une borne inférieure  $\alpha$ .

On distingue deux cas.

Si  $\alpha > 0$ , alors  $\alpha \in K$ . En effet dans le cas contraire, par définition de la borne inférieure, on peut trouver  $x \in K$  tel que  $\alpha < x < 2\alpha$  (on suppose que  $\alpha \notin H$ ). Pour la même raison, on peut trouver  $y \in K$  tel que  $\alpha < y < x$ . On a alors  $0 < x - y < \alpha$  avec  $x - y \in H \cap \mathbb{R}_+^*$ , ce qui est contradictoire avec la définition de la borne inférieure  $\alpha$ . Avec la structure de groupe additif de  $H$ , on déduit alors que  $H = \mathbb{Z}\alpha$ . En effet,  $\mathbb{Z}\alpha \subset H$  du fait que  $\alpha$  appartient au groupe  $H$  et pour tout  $x$  dans  $H$ , il existe  $k$  dans  $\mathbb{Z}$  tel que  $0 \leq x - k\alpha < \alpha$ , donc  $x - k\alpha = 0$  et  $x \in \mathbb{Z}\alpha$ , c'est-à-dire que  $H \subset \mathbb{Z}\alpha$ .

Si  $\alpha = 0$ , alors  $H$  est dense dans  $\mathbb{R}$ . En effet pour  $x < y$  dans  $\mathbb{R}$ , il existe  $z$  dans  $H \cap \mathbb{R}_+^*$  tel que  $0 < z < y - x$  soit  $1 < \frac{y}{z} - \frac{x}{z}$  et pour  $n \in \left] \frac{x}{z}, \frac{y}{z} \right[ \cap \mathbb{Z}$ , on a  $x < nz < y$  avec  $nz \in H$ . ■

## 1.2 Critères d'irrationalité

Pour tout réel  $\theta$  on note  $H_\theta = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta$  le sous-groupe additif de  $\mathbb{R}$  engendré par 1 et  $\theta$ . Il est défini par :

$$H_\theta = \{p + q\theta \mid (p, q) \in \mathbb{Z}^2\}.$$

**Théorème 1.4** *Un réel  $\theta$  est irrationnel si et seulement si le sous-groupe additif de  $\mathbb{R}$ ,  $H_\theta = \mathbb{Z}\theta + \mathbb{Z}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .*

**Démonstration.** Soit  $\theta \in \mathbb{R}$  irrationnel. Si  $H_\theta = \mathbb{Z}\theta + \mathbb{Z}$  est discret il existe alors  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $H_\theta = \mathbb{Z}\alpha$  et du fait que 1 et  $\theta$  sont dans  $H$ , on a  $1 = p\alpha$ ,  $\theta = q\alpha$  avec  $p, q$  dans  $\mathbb{Z}^*$  ce qui entraîne  $\alpha \in \mathbb{Q}$  et  $\theta = q\alpha \in \mathbb{Q}$  en contradiction avec l'hypothèse de départ. En conséquence le groupe  $H_\theta$  n'est pas discret et il est nécessairement dense dans  $\mathbb{R}$ .

Soit  $\theta = \frac{p}{q}$  rationnel avec  $p$  et  $q$  entiers premiers entre eux dans  $\mathbb{Z}$ . On a :

$$H_\theta = \mathbb{Z}\theta + \mathbb{Z} = (\mathbb{Z}p + \mathbb{Z}q) \frac{1}{q}$$

et le théorème de Bézout nous dit que  $\mathbb{Z}p + \mathbb{Z}q = \mathbb{Z}$ , ce qui donne  $H_\theta = \mathbb{Z}\frac{1}{q}$ , c'est-à-dire que  $H_\theta$  est discret. ■

**Théorème 1.5** *Un réel  $\theta$  est irrationnel si et seulement si il existe deux suites  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'entiers relatifs telles que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad q_n\theta - p_n \neq 0, \tag{1.1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (q_n\theta - p_n) = 0. \tag{1.2}$$

**Démonstration.** Si  $\theta \in \mathbb{R}$  est irrationnel alors  $H_\theta = \mathbb{Z}\theta + \mathbb{Z}$  est dense dans  $\mathbb{R}$  et 0 est limite d'une suite de points de  $H_\theta$ , c'est-à-dire qu'il existe deux suites  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'entiers relatifs telles que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (q_n\theta - p_n) = 0$ . L'hypothèse (1.1) est vérifiée du fait que  $\theta \notin \mathbb{Q}$ .

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$  vérifiant (1.1) et (1.2). Si  $\theta = \frac{p}{q}$  avec  $p$  et  $q$  entiers relatifs on déduit alors de (1.1) que  $q_n p - p_n q \neq 0$  dans  $\mathbb{Z}$  donc  $|q_n p - p_n q| \geq 1$  et :

$$|q_n\theta - p_n| = \frac{1}{|q|} |q_n p - p_n q| \geq \frac{1}{|q|},$$

ce qui est en contradiction avec (1.2). En conclusion  $\theta \notin \mathbb{Q}$ . ■

### 1.3 Le théorème d'intégration par parties itéré

Nous utiliserons à plusieurs reprises le résultat suivant.

**Théorème 1.6** *Soient  $a, b$  deux réels tels que  $a < b$ ,  $n$  un entier naturel non nul et  $f, g$  deux fonctions définies sur l'intervalle  $[a, b]$  à valeurs réelles et admettant des dérivées continues jusqu'à l'ordre  $n$ .*

On a :

$$\int_a^b f^{(n)}(x) g(x) dx = \left[ \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} f^{(n-k)} g^{(k-1)} \right]_a^b + (-1)^n \int_a^b f(x) g^{(n)}(x) dx.$$

**Démonstration.** On procède par récurrence sur  $n \geq 1$ . Pour  $n = 1$  il s'agit de la formule d'intégration par parties classique.

Supposons le résultat acquis pour  $n \geq 1$  et soient  $f, g$  dans  $\mathcal{C}^{n+1}([a, b])$ . Une intégration par parties donne :

$$\int_a^b f^{(n+1)}(x) g(x) dx = [f^{(n)} g]_a^b - \int_a^b f^{(n)}(x) g'(x) dx$$

et avec l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} \int_a^b f^{(n+1)}(x) g(x) dx &= [f^{(n)} g]_a^b - \left[ \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} f^{(n-k)} g^{(k)} \right]_a^b \\ &\quad - (-1)^n \int_a^b f(x) g^{(n+1)}(x) dx \\ &= \left[ \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} f^{(n+1-k)} g^{(k-1)} \right]_a^b \\ &\quad + (-1)^{n+1} \int_a^b f(x) g^{(n+1)}(x) dx. \end{aligned}$$

■

### 1.4 Irrationalité de $e^r$ pour $r \in \mathbb{Q}^*$

On désigne par  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de fonctions polynomiales définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n(x) = \frac{x^n (1-x)^n}{n!}.$$

**Lemme 1.1** *Si  $P$  est une fonction polynomiale non nulle à coefficients entiers relatifs,  $n$  un entier naturel non nul et  $Q$  la fonction polynomiale définie par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = \frac{x^n}{n!} P(x),$$

alors pour tout entier naturel  $k$ ,  $Q^{(k)}(0)$  est un entier relatif.

**Démonstration.** On note  $p$  le degré du polynôme  $P$  et  $P(x) = \sum_{j=0}^p a_j x^j$ , les coefficients  $a_j$ , pour  $j$  compris entre 0 et  $p$ , étant entiers relatifs.

Comme  $Q$  est de degré  $n+p$ , on a  $Q^{(k)}(0) = 0$  pour tout entier  $k$  strictement supérieur à  $n+p$ .

Le polynôme  $Q$  admettant 0 comme racine de multiplicité supérieure ou égale à  $n$ , on a  $Q^{(k)}(0) = 0$  pour tout entier  $k$  compris entre 0 et  $n-1$  (si  $n > 0$ ).

Il reste à étudier le cas où  $k$  est compris entre  $n$  et  $n+p$ .

En écrivant que :

$$Q(x) = \sum_{j=0}^p \frac{a_j}{j!} x^{n+j} = \sum_{i=n}^{n+p} \frac{a_{i-n}}{i!} x^i,$$

on obtient :

$$\forall k \in \{n, \dots, n+p\}, \quad Q^{(k)}(0) = a_{k-n} \frac{k!}{n!} \in \mathbb{Z}.$$

■

**Lemme 1.2** Pour tout entier naturel  $n$  et tout entier naturel  $k$  les quantités  $U_n^{(k)}(0)$  et  $U_n^{(k)}(1)$  sont des entiers relatifs.

**Démonstration.** En utilisant le lemme 1.1, on déduit que les  $U_n^{(k)}(0)$  sont des entiers relatifs et en remarquant que  $U_n(1-x) = U_n(x)$ , on déduit que les  $U_n^{(k)}(1) = (-1)^k U_n^{(k)}(0)$  sont aussi des entiers relatifs.

■

On définit la suite de fonctions  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad R_n(x) = x^{2n+1} \int_0^1 e^{xt} U_n(t) dt.$$

**Lemme 1.3** Pour tout entier naturel  $n$  il existe un unique couple  $(P_n, Q_n)$  de fonctions polynomiales à coefficients entiers relatifs de degré égal à  $n$  tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad R_n(x) = Q_n(x) e^x - P_n(x).$$

**Démonstration.** On a :

$$R_n(x) = \int_0^1 \frac{\partial^{2n+1}}{\partial t^{2n+1}} (e^{xt}) U_n(t) dt.$$

En utilisant la formule d'intégration par parties itérée on obtient :

$$R_n(x) = \left[ \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k+1} \frac{\partial^{2n+1-k}}{\partial t^{2n+1-k}} (e^{xt}) U_n^{(k-1)}(t) \right]_0^1 - \int_0^1 e^{xt} U_n^{(2n+1)}(t) dt.$$

La fonction polynomiale  $U_n$  étant de degré  $2n$  on a  $U_n^{(2n+1)} = 0$  et en considérant que 0 et 1 sont racines d'ordre  $n$  de  $U_n$ , on obtient finalement :

$$R_n(x) = \left[ \sum_{k=n+1}^{2n+1} (-1)^{k+1} x^{2n+1-k} e^{xt} U_n^{(k-1)}(t) \right]_0^1,$$

ce qui peut s'écrire sous la forme :

$$R_n(x) = Q_n(x) e^x - P_n(x),$$

avec :

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{k=n+1}^{2n+1} (-1)^{k+1} U_n^{(k-1)}(0) x^{2n+1-k} \\ &= (-1)^n \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{(k-1)!}{(k-1-n)!(2n-k+1)!} x^{2n+1-k}, \\ Q_n(x) &= \sum_{k=n+1}^{2n+1} (-1)^{k+1} U_n^{(k-1)}(1) x^{2n+1-k} \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n+1} (-1)^{k+1} U_n^{(k-1)}(0) (-x)^{2n+1-k} = P_n(-x). \end{aligned}$$

Les polynômes  $P_n$  et  $Q_n$  sont à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  et de degré  $n$ .

Les polynômes  $P_n, Q_n$  dans  $\mathbb{Z}[x]$  tels que  $R_n(x) = Q_n(x)e^x - P_n(x)$  sont uniques. En effet si  $Q_n(x)e^x - P_n(x) = 0$  alors :

$$Q_n(x) = \frac{P_n(x)}{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

ce qui entraîne  $Q_n = 0$  et  $P_n = 0$ . ■

**Lemme 1.4** Pour tout entier naturel  $n$  et tout réel non nul  $x$ ,  $R_n(x)$  est non nul et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$ .

**Démonstration.** Du fait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in ]0, 1[, \quad e^{xt}t^n(1-t)^n > 0,$$

on déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad R_n(x) = \frac{x^{2n+1}}{n!} \int_0^1 e^{xt}t^n(1-t)^n dt \neq 0.$$

Pour  $x = 0$ , on a  $R_n(x) = 0$ . Pour  $x$  non nul, on a :

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{n!} \frac{1}{4^n} \int_0^1 e^{xt} dt = \frac{1}{n!} \left(\frac{x^2}{4}\right)^n |e^x - 1|$$

et il en résulte que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$ . ■

**Théorème 1.7** Pour tout nombre rationnel non nul  $r$ ,  $e^r$  est irrationnel.

**Démonstration.** Si  $r \in \mathbb{Z}^*$  alors  $p_n = P_n(r) \in \mathbb{Z}$ ,  $q_n = Q_n(r) \in \mathbb{Z}$  et :

$$\begin{cases} R_n(r) = q_n e^r - p_n \neq 0, \\ R_n(r) = q_n e^r - p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{cases}$$

On déduit alors du théorème 1.5 que  $e^r$  est irrationnel.

Soit  $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^*$ . Si  $e^r$  est rationnel alors  $e^p = (e^r)^q$  est rationnel avec  $p \in \mathbb{Z}$ , en contradiction avec ce qui précède. ■

**Corollaire 1.1** Pour tout  $r \in \mathbb{Q}_+^*$ ,  $\ln(r)$  est irrationnel.

**Démonstration.** Soit  $r \in \mathbb{Q}_+^*$ . Si  $\ln(r) \in \mathbb{Q}$  alors  $r = e^{\ln(r)}$  est irrationnel ce qui est contradictoire avec l'hypothèse de départ. ■

**Remarque 1.1** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a  $Q_n(0) \neq 0$  et les développements en série entière au voisinage de 0 à l'ordre  $2n$  de  $e^x$  et  $\frac{P_n}{Q_n}$  sont identiques.

En effet, on a :

$$Q_n(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \neq 0.$$

La fonction  $\frac{P_n}{Q_n}$  est donc développable en série entière au voisinage de 0 et en écrivant que :

$$e^x - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = x^{2n+1} \varphi_n(x)$$

avec  $\varphi_n$  développable en série entière au voisinage de 0 on déduit que les développements en série entière au voisinage de 0 à l'ordre  $2n$  de  $e^x$  et  $\frac{P_n}{Q_n}$  sont identiques.

**Remarque 1.2** Les polynômes  $P_n$  et  $Q_n$  définissent l'approximant de Padé d'ordre  $(n, n)$  de  $e^x$ .

**Corollaire 1.2** Pour tout réel  $x$ ,  $Q_{2n}(x)$  est non nul et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)} = e^x.$$

**Démonstration.** La fonction  $|Q_n|$  est polynomiale à coefficients strictement positifs sur  $]-\infty, 0[$ , en conséquence  $Q_n(x)$  est non nul pour tout  $x$  strictement négatif. Pour  $n$  pair et  $x$  strictement positif on a  $Q_n(x) e^x = P_n(x) + R_n(x)$  avec  $P_n(x)$  et  $R_n(x)$  strictement positifs, on a donc  $Q_n(x)$  non nul pour tout  $x$  strictement positif. Pour  $x = 0$  on a  $Q_n(0) = 1$ . On peut donc conclure que, pour tout entier naturel  $n$  pair et pour tout réel  $x$ ,  $Q_n(x)$  est strictement positif (pour  $n$  impair  $Q_n(x)$  peut s'annuler pour une valeur positive de  $x$ ).

Avec les majorations :

$$\forall x > 0, \quad \begin{cases} \left| e^x - \frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)} \right| \leq \frac{1}{(2n)!} \left( \frac{x^2}{4} \right)^{2n} \frac{|e^x - 1|}{Q_{2n}(x)}, \\ Q_{2n}(x) > e^{-x} P_{2n}(x) > e^{-x} \frac{(4n)!}{(2n)!}, \end{cases}$$

on déduit que :

$$\left| e^x - \frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)} \right| \leq \frac{1}{(4n)!} \left( \frac{x}{2} \right)^{4n} e^x |e^x - 1|$$

et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)} = e^x. \quad \blacksquare$$

On a en prenant par exemple  $n = 2, 4, 6, 8$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{x^2+6x+12}{x^2-6x+12}, \\ \frac{P_4(x)}{Q_4(x)} = \frac{x^4+20x^3+180x^2+840x+1680}{x^4-20x^3+180x^2-840x+1680}, \\ \frac{P_6(x)}{Q_6(x)} = \frac{x^6+42x^5+840x^4+10\,080x^3+75\,600x^2+332\,640x+665\,280}{x^6-42x^5+840x^4-10\,080x^3+75\,600x^2-332\,640x+665\,280}, \\ \frac{P_8(x)}{Q_8(x)} = \frac{x^8+72x^7+2520x^6+55440x^5+8316000x^4+8648640x^3+60540480x^2+259459200x+518918400}{x^8-72x^7+2520x^6-55440x^5+8316000x^4-8648640x^3+60540480x^2-259459200x+518918400} \end{array} \right.$$

En prenant  $x = 1$ , on obtient les approximations rationnelles suivante du nombre  $e \simeq 2.7182818284590452353$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{P_2(1)}{Q_2(1)} = \frac{19}{7} \simeq 2.7142857142857142857, \\ \frac{P_4(1)}{Q_4(1)} = \frac{2721}{1001} \simeq 2.7182817182817182817, \\ \frac{P_6(1)}{Q_6(1)} = \frac{1084483}{398959} \simeq 2.7182818284585634112, \\ \frac{P_8(1)}{Q_8(1)} = \frac{848456353}{312129649} \simeq 2.7182818284590452347. \end{array} \right.$$

## 1.5 Irrationalité de $\pi^2$

On désigne par  $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite des polynômes de Legendre définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad L_n = U_n^{(n)},$$

où  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite de fonctions polynomiales définie au paragraphe 1.4 par  $U_n(x) = \frac{x^n (1-x)^n}{n!}$ .

**Lemme 1.5** *Pour tout entier naturel  $n$ ,  $L_n$  est une fonction polynomiale à coefficients entiers relatifs de degré  $n$ .*

**Démonstration.** On a :

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k C_{n+k}^n x^k.$$

■

**Lemme 1.6** *Si  $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est la suite de réels définie par :*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad I_k = \int_0^1 \sin(\pi t) t^k dt,$$

alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} I_0 = \frac{2}{\pi}, \quad I_1 = \frac{1}{\pi}, \\ I_k = \frac{1}{\pi} - \frac{k(k-1)}{\pi^2} I_{k-2} \quad (k \geq 2) \end{array} \right.$$

et pour tout entier naturel non nul  $k$ , il existe un polynôme  $Q_k$  à coefficients entiers relatif de degré  $\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$  tel que  $I_k = \frac{1}{\pi} Q_k \left( \frac{1}{\pi^2} \right)$ .

**Démonstration.** On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} I_0 = \int_0^1 \sin(\pi t) dt = \frac{2}{\pi}, \\ I_1 = \int_0^1 \sin(\pi t) t dt = \left[ \frac{-\cos \pi t}{\pi} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos \pi t}{\pi} dt = \frac{1}{\pi}. \end{array} \right.$$

Et pour  $k \geq 2$ , deux intégration par parties successives donnent :

$$I_k = \int_0^1 \sin(\pi t) t^k dt = \frac{1}{\pi} - \frac{k(k-1)}{\pi^2} I_{k-2}.$$

On a  $I_1 = \frac{1}{\pi} Q_1\left(\frac{1}{\pi^2}\right)$  avec  $Q_1(t) = 1$  et  $I_2 = \frac{1}{\pi} Q_2\left(\frac{1}{\pi^2}\right)$  avec  $Q_2(t) = 1 - 4t$ . En supposant le résultat acquis jusqu'à l'ordre  $k-1 \geq 2$ , on a :

$$I_k = \frac{1}{\pi} - \frac{k(k-1)}{\pi^2} I_{k-2} = \frac{1}{\pi} Q_k\left(\frac{1}{\pi^2}\right),$$

avec  $Q_k(t) = 1 - k(k-1)tQ_{k-2}(t)$  et  $Q_k$  est un polynôme à coefficients entiers de degré  $1 + \left[\frac{k-2}{2}\right] = \left[\frac{k}{2}\right]$ . ■

On définit la suite de réels  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_n = \int_0^1 \sin(\pi t) L_n(t) dt.$$

**Lemme 1.7** *Pour tout entier naturel non nul  $n$ , il existe un polynôme  $P_n$  à coefficients entiers relatifs de degré  $\left[\frac{n}{2}\right]$  tel que :*

$$R_n = \frac{1}{\pi} P_n\left(\frac{1}{\pi^2}\right).$$

**Démonstration.** On a :

$$R_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k C_{n+k}^n I_k = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k C_{n+k}^n Q_k\left(\frac{1}{\pi^2}\right) = \frac{1}{\pi} P_n\left(\frac{1}{\pi^2}\right)$$

avec  $P_n(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k C_{n+k}^n Q_k(t)$  à coefficients entiers relatifs de degré  $\left[\frac{n}{2}\right]$ . ■

**Lemme 1.8** *Pour tout entier naturel  $n$ ,  $R_{2n}$  est non nul et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_{2n} = 0$ .*

**Démonstration.** En utilisant la formule d'intégration par parties itérée on a :

$$\begin{aligned} n! R_n &= \left[ \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} (t^n (1-t)^n)^{(n-k)} (\sin(\pi t))^{(k-1)} \right]_0^1 \\ &\quad + (-1)^n \int_0^1 (\sin(\pi t))^{(n)} t^n (1-t)^n dt. \end{aligned}$$

Et du fait que 0 et 1 sont racines d'ordre  $n$  du polynôme  $t^n (1-t)^n$ , il reste :

$$R_n = \frac{(-1)^n \pi^n}{n!} \int_0^1 \sin\left(\pi t + n\frac{\pi}{2}\right) t^n (1-t)^n dt.$$

On a donc, pour les entiers pairs :

$$R_{2n} = \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{(2n)!} \int_0^1 \sin(\pi t) t^{2n} (1-t)^{2n} dt \neq 0$$

et :

$$|R_{2n}| \leq \frac{\pi^{2n}}{(2n)!} \int_0^1 \sin(\pi t) \frac{1}{4^{2n}} dt = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(2n)!} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

■

**Remarque 1.3** Pour les entiers impairs, on a :

$$R_{2n+1} = \frac{(-1)^n \pi^n}{n!} \int_0^1 \cos(\pi t) t^{2n+1} (1-t)^{2n+1} dt = 0.$$

**Théorème 1.8**  $\pi^2$  est irrationnel.

**Démonstration.** Supposons que  $\pi^2 = \frac{p}{q}$  avec  $p$  et  $q$  entiers strictement positifs. On a alors :

$$\pi R_{2n} = P_{2n} \left( \frac{1}{\pi^2} \right) = P_{2n} \left( \frac{q}{p} \right)$$

avec  $P_{2n}$  polynôme à coefficients entiers de degré  $n$ , ce qui peut s'écrire :

$$\pi R_{2n} = \frac{1}{p^n} \sum_{k=0}^n \alpha_k p^{n-k} q^k$$

avec  $\alpha_k \in \mathbb{Z}$  pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ . Du fait que  $R_{2n}$  est non nul, on déduit que  $\sum_{k=0}^n \alpha_k p^{n-k} q^k$  est un entier non nul et  $|\pi R_{2n}| \geq \frac{1}{p^n}$ . On a alors :

$$\frac{1}{\pi} \leq p^n |R_{2n}| \leq p^n \frac{1}{\pi} \frac{1}{(2n)!} \left( \frac{\pi}{4} \right)^{2n} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(2n)!} \frac{p^{2n}}{q^n} \frac{1}{4^{2n}} \leq \frac{p^{2n}}{(2n)!}$$

avec  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p^{2n}}{(2n)!} = 0$  ce qui est impossible. En conséquence  $\pi^2$  est irrationnel.  $\blacksquare$

**Remarque 1.4** De l'irrationalité de  $\pi^2$  on déduit celle de  $\pi$ .

## 1.6 Irrationalité de $\cos(\sqrt{r})$ et $\operatorname{ch}(\sqrt{r})$ pour $r$ rationnel strictement positif

On désigne par  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de fonctions polynomiales définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad V_n(x) = \frac{x^n (1-x)^n (2-x)^n}{n!}.$$

Pour  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$  on désigne par  $s_\varepsilon$  la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y''(x) = \varepsilon y(x), & (x \in \mathbb{R}), \\ y(0) = 0, & y'(0) = 1. \end{cases} \quad (1.3)$$

C'est-à-dire que  $s_\varepsilon = \sin$  pour  $\varepsilon = -1$  et  $s_\varepsilon = \operatorname{sh}$  pour  $\varepsilon = 1$ .

Pour  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$  on désigne par  $c_\varepsilon$  la dérivée de la fonction  $s_\varepsilon$ . C'est-à-dire que  $c_\varepsilon = \cos$  pour  $\varepsilon = -1$  et  $c_\varepsilon = \operatorname{ch}$  pour  $\varepsilon = 1$ .

On définit la suite de fonctions  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad S_n(x) = x^{6n+4} \int_0^1 c_\varepsilon(xt) V_{2n+1}(t) dt.$$

**Lemme 1.9** *Pour tout entier naturel  $n$  et tout entier naturel  $k$  les quantités  $V_n^{(k)}(0)$  et  $V_n^{(k)}(1)$  sont des entiers relatifs et :*

$$\begin{cases} V_{2n+1}^{(2k)}(1) = 0, \\ V_{2n+1}^{(2k+1)}(1) = \begin{cases} \frac{(-1)^{k-n+1} (2k+1)!}{(2n+1)!} C_{2n+1}^{k-n} & \text{si } n \leq k \leq 3n+1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_{2n}^{(2k)}(1) = \begin{cases} \frac{(-1)^{k-n} (2k)!}{(2n)!} C_{2n}^{k-n} & \text{si } n \leq k \leq 3n, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \\ V_{2n}^{(2k+1)}(1) = 0. \end{cases}$$

**Démonstration.** Avec  $V_n(x) = U_n(x)(2-x)^n$  et en utilisant la formule de Leibniz, on a :

$$V_n^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^k C_k^j U_n^{(j)}(x) ((2-x)^n)^{(k-j)} = \sum_{j=0}^k C_k^j U_n^{(j)}(x) \frac{n!}{(n-k+j)!} (2-x)^{n-k+j}$$

et on en déduit que les  $V_n^{(k)}(0)$  et les  $V_n^{(k)}(1)$  sont des entiers relatifs.

En remarquant que la fonction  $W_n$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$W_n(x) = V_n(x+1) = \frac{(-1)^n x^n (1-x^2)^n}{n!}$$

est de la parité de  $n$ , on déduit que pour tout entier naturel  $k$  on a :

$$\begin{cases} V_{2n+1}^{(2k)}(1) = W_{2n+1}^{(2k)}(0) = 0, \\ V_{2n}^{(2k+1)}(1) = W_{2n}^{(2k+1)}(0) = 0. \end{cases}$$

En écrivant que :

$$\begin{aligned} W_{2n+1}(x) &= \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{(2n+1)!} C_{2n+1}^k x^{2(n+k)+1} = \sum_{k=n}^{3n+1} \frac{(-1)^{k-n+1}}{(2n+1)!} C_{2n+1}^{k-n} x^{2k+1} \\ &= \sum_{j=0}^{6n+3} \frac{W_{2n+1}^{(j)}(0)}{j!} x^j, \end{aligned}$$

on déduit que :

$$V_{2n+1}^{(2k+1)}(1) = W_{2n+1}^{(2k+1)}(0) = \begin{cases} \frac{(-1)^{k-n+1} (2k+1)!}{(2n+1)!} C_{2n+1}^{k-n} & \text{si } n \leq k \leq 3n+1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De même avec :

$$\begin{aligned} W_{2n}(x) &= \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{(2n)!} C_{2n}^k x^{2(n+k)} = \sum_{k=n}^{3n} \frac{(-1)^{k-n}}{(2n)!} C_{2n}^{k-n} x^{2k} \\ &= \sum_{j=0}^{6n} \frac{W_{2n}^{(j)}(0)}{j!} x^j, \end{aligned}$$

on déduit que :

$$V_{2n}^{(2k)}(1) = \begin{cases} \frac{(-1)^{k-n} (2k)!}{(2n)!} C_{2n}^{k-n} & \text{si } n \leq k \leq 3n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

■

**Lemme 1.10** On a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} s_\varepsilon^{(2k)} = \varepsilon^k s_\varepsilon, \\ s_\varepsilon^{(2k+1)} = \varepsilon^k c_\varepsilon, \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{N} - \{0\}, \quad \begin{cases} c_\varepsilon^{(2k)} = \varepsilon^k c_\varepsilon, \\ c_\varepsilon^{(2k-1)} = \varepsilon^k s_\varepsilon. \end{cases}$$

**Démonstration.** La vérification est immédiate par récurrence sur  $k$ . ■

**Théorème 1.9** Pour tout entier naturel  $n$  il existe un unique couple  $(P_n, Q_n)$  de fonctions polynomiales à coefficients entiers relatifs de degré égal à  $2n + 1$  tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S_n(x) = Q_n(x^2) c_\varepsilon(x) - P_n(x^2).$$

**Démonstration.** On a :

$$S_n(x) = \varepsilon^n \int_0^1 \frac{\partial^{6n+4}}{\partial t^{6n+4}} c_\varepsilon(xt) V_{2n+1}(t) dt$$

et en utilisant la formule d'intégration par parties généralisée on obtient :

$$\varepsilon^n S_n(x) = \left[ \sum_{k=1}^{6n+4} (-1)^{k+1} \frac{\partial^{6n+4-k}}{\partial t^{6n+4-k}} c_\varepsilon(xt) V_{2n+1}^{(k-1)}(t) \right]_0^1 + \int_0^1 c_\varepsilon(xt) V_{2n+1}^{(6n+4)}(t) dt.$$

Le polynôme  $V_{2n+1}(t)$  étant de degré  $6n + 3$ , on a  $V_{2n+1}^{(6n+4)} = 0$  et :

$$\varepsilon^n S_n(x) = \left[ \sum_{k=1}^{6n+4} (-1)^{k+1} \frac{\partial^{6n+4-k}}{\partial t^{6n+4-k}} c_\varepsilon(xt) V_{2n+1}^{(k-1)}(t) \right]_0^1.$$

En tenant compte du fait que 0 et 1 sont racines d'ordre  $2n + 1$  de  $V_{2n+1}$ , on a :

$$\varepsilon^n S_n(x) = \left[ \sum_{k=2n+2}^{6n+4} (-1)^{k+1} \frac{\partial^{6n+4-k}}{\partial t^{6n+4-k}} c_\varepsilon(xt) V_{2n+1}^{(k-1)}(t) \right]_0^1.$$

En séparant les dérivées d'ordres pairs et impairs, cela s'écrit :

$$\begin{aligned} \varepsilon^n S_n(x) &= \left[ -c_\varepsilon(xt) \sum_{j=n+1}^{3n+2} \varepsilon^{3n+2-j} x^{6n+4-2j} V_{2n+1}^{(2j-1)}(t) \right]_0^1 \\ &+ \left[ s_\varepsilon(xt) \sum_{j=n+1}^{3n+1} \varepsilon^{3n+2-j} x^{6n+3-2j} V_{2n+1}^{(2j)}(t) \right]_0^1. \end{aligned}$$

En tenant compte de  $V_{2n+1}^{(2j)}(1) = 0$ ,  $s_\varepsilon(0) = 0$  et  $c_\varepsilon(0) = 1$ , il reste :

$$\varepsilon^n S_n(x) = -c_\varepsilon(x) \sum_{j=n+1}^{3n+2} (\varepsilon x^2)^{3n+2-j} V_{2n+1}^{(2j-1)}(1) + \sum_{j=n+1}^{3n+2} (\varepsilon x^2)^{3n+2-j} V_{2n+1}^{(2j-1)}(0).$$

Ce qui s'écrit en définitive :

$$S_n(x) = Q_n(x^2) c_\varepsilon(x) - P_n(x^2),$$

en notant :

$$\begin{cases} P_n(t) = - \sum_{j=n+1}^{3n+2} \varepsilon^j V_{2n+1}^{(2j-1)}(0) t^{3n+2-j}, \\ Q_n(t) = - \sum_{j=n+1}^{3n+2} \varepsilon^j V_{2n+1}^{(2j-1)}(1) t^{3n+2-j}. \end{cases}$$

Ces polynômes sont à coefficients entiers relatifs de degré égal à  $2n+1$ . Les coefficients  $V_{2n+1}^{(2n+1)}(0)$  et  $V_{2n+1}^{(2n+1)}(1)$  sont non nuls puisque 0 et 1 sont racines d'ordre  $2n+1$  de  $V_{2n+1}$ .

Les polynômes  $P_n, Q_n$  dans  $\mathbb{Z}[x]$  tels que  $S_n(x) = Q_n(x^2) c_\varepsilon(x) - P_n(x^2)$  sont uniques. En effet si  $Q_n(x^2) c_\varepsilon(x) - P_n(x^2) = 0$  avec  $Q_n$  non nulle, alors, pour  $\varepsilon = -1$  la fonction  $\frac{P_n(x^2)}{Q_n(x^2)}$  serait égale à la fonction périodique  $\cos(x)$ , ce qui est impossible et pour  $\varepsilon = 1$ , la fonction  $\frac{P_n(x^2)}{Q_n(x^2)}$  qui admet une limite finie à l'infini (les polynômes sont de même degré) serait égale à la fonction  $\operatorname{ch}(x)$ , ce qui est impossible. ■

**Lemme 1.11** *On suppose que  $\varepsilon = 1$ . Pour tout entier naturel  $n$  et tout réel  $x$  non nul,  $S_n(x)$  est strictement positif.*

**Démonstration.** Du fait que :

$$\forall t \in ]0, 1[, \quad \operatorname{ch}(xt) t^{2n+1} (1-t)^{2n+1} (2-t)^{2n+1} > 0,$$

on déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad S_n(x) = \frac{x^{6n+4}}{(2n+1)!} \int_0^1 \operatorname{ch}(xt) t^{2n+1} (1-t)^{2n+1} (2-t)^{2n+1} dt > 0. \quad \blacksquare$$

**Lemme 1.12** *On suppose que  $\varepsilon = -1$ . Pour tout entier naturel  $n$  et tout réel  $x$  appartenant à  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$ ,  $S_n(x)$  est strictement positif.*

**Démonstration.** Du fait que :

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \forall t \in ]0, 1[, \quad \cos(xt) t^{2n+1} (1-t)^{2n+1} (2-t)^{2n+1} > 0,$$

on déduit que pour tout  $x$  dans  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$ , on a :

$$S_n(x) = \frac{x^{6n+4}}{(2n+1)!} \int_0^1 \cos(xt) t^{2n+1} (1-t)^{2n+1} (2-t)^{2n+1} dt > 0. \quad \blacksquare$$

**Remarque 1.5** *Dans le cas où  $\varepsilon = -1$ ,  $S_n(x)$  peut s'annuler en dehors de  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$ .*

**Lemme 1.13** *On a :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = 0.$$

**Démonstration.** Pour  $x = 0$ , on a  $S_n(x) = 0$ . Pour  $x$  non nul, on a :

$$|S_n(x)| \leq \frac{|x|^{6n+4}}{(2n+1)!} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^{2n+1} \int_0^1 c_\varepsilon(xt) dt = \frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{2|x|^3}{3\sqrt{3}}\right)^{2n+1} |s_\varepsilon(x)|.$$

Il en résulte que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = 0$ . ■

**Théorème 1.10** Pour tout nombre rationnel  $r$  strictement positif,  $\operatorname{ch}(\sqrt{r})$  est irrationnel.

**Démonstration.** Soit  $r = \frac{p}{q}$  un nombre rationnel strictement positif avec  $p$  et  $q$  entiers strictement positifs et premiers entre eux. De ce qui précède, avec  $\varepsilon = 1$ , on déduit que :

$$0 < S_n(\sqrt{r}) = Q_n(r) \operatorname{ch}(\sqrt{r}) - P_n(r) \leq \frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{2r\sqrt{r}}{3\sqrt{3}}\right)^{2n+1} \operatorname{sh}(\sqrt{r}).$$

Les polynômes  $P_n$  et  $Q_n$  étant à coefficients entiers de degré égal à  $2n+1$ , il existe deux entiers relatifs  $p_n$  et  $q_n$  tels que :

$$P_n(r) = \frac{p_n}{q^{2n+1}}, \quad Q_n(r) = \frac{q_n}{q^{2n+1}}$$

et l'égalité précédente devient :

$$0 < q_n \operatorname{ch}(\sqrt{r}) - p_n \leq \frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^{2n+1} \sqrt{r} \frac{p^{3n+1}}{q^{3n+1}} q^{2n+1} \operatorname{sh}(\sqrt{r}).$$

Ce qui peut s'écrire :

$$0 < q_n \operatorname{ch}(\sqrt{r}) - p_n \leq \frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}} p \sqrt{r}\right)^{2n+1} \operatorname{sh}(\sqrt{r}).$$

Ce qui entraîne que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (q_n \operatorname{ch}(\sqrt{r}) - p_n) = 0$  et l'irrationalité de  $\operatorname{ch}(\sqrt{r})$ . ■

**Corollaire 1.3** Pour tout nombre rationnel  $r$  strictement positif,  $\operatorname{sh}(\sqrt{r})$  et  $\operatorname{th}(\sqrt{r})$  sont irrationnels.

**Démonstration.** Avec :

$$\operatorname{ch}(2\sqrt{r}) = 2 \operatorname{sh}^2(\sqrt{r}) + 1 = \frac{1 + \operatorname{th}^2(\sqrt{r})}{1 - \operatorname{th}^2(\sqrt{r})},$$

on déduit l'irrationalité de  $\operatorname{sh}(\sqrt{r})$  et  $\operatorname{th}(\sqrt{r})$  pour tout rationnel strictement positif. ■

**Remarque 1.6** Avec  $\operatorname{ch}(r) = \frac{1}{2} \left(e^r + \frac{1}{e^r}\right)$  on retrouve l'irrationalité de  $e^r$  pour tout rationnel strictement positif.

**Corollaire 1.4** Pour tout nombre rationnel  $r$  strictement supérieur à 1,  $\operatorname{argch}(r)$  est irrationnel, pour tout nombre rationnel  $r$  non nul,  $\operatorname{argsh}(r)$  est irrationnel et pour tout nombre appartenant à  $] -1, 1[$   $\operatorname{argth}(r)$  est irrationnel.

**Démonstration.** Si  $\operatorname{argch}(r)$  est rationnel alors  $r = \operatorname{ch}(\operatorname{argch}(r))$  est irrationnel. De même pour les deux autres fonctions inverses. ■

**Théorème 1.11** *Pour tout nombre rationnel  $r$  appartenant à  $\left]0, \frac{\pi^2}{4}\right]$ ,  $\cos(\sqrt{r})$  est irrationnel.*

**Démonstration.** Analogue à ce qui précède. ■

**Corollaire 1.5**  $\pi$  est irrationnel.

**Démonstration.** Si  $\pi$  est rationnel alors  $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$  est irrationnel, ce qui est faux. ■

On déduit facilement des résultats analogues à ceux des corollaires 1.3 et 1.4 pour les fonctions trigonométriques et leurs inverses.

## 1.7 Irrationalité de $\frac{\tan(\sqrt{r})}{\sqrt{r}}$ et $\frac{\text{th}(\sqrt{r})}{\sqrt{r}}$ pour $r \in \mathbb{Q}_+^*$

Pour  $k \in \mathbb{N}$  on désigne par  $E_k$  l'espace vectoriel des fonctions définies sur  $\mathbb{R}$ , à valeurs réelles et de classe  $\mathcal{C}^k$  (continues pour  $k = 0$ ).

On désigne par  $T$  l'opérateur intégral défini sur  $E_0$  par :

$$\forall f \in E_0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad T(f)(x) = \int_0^x tf(t) dt.$$

En gardant les notations du paragraphe 1.6, on définit la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} f_0 = s_\varepsilon, \\ f_{n+1} = T(f_n) \quad (n \geq 0). \end{cases}$$

**Remarque 1.7** De  $s_\varepsilon'' = \varepsilon f$  avec  $\varepsilon^2 = 1$  on déduit que  $\varepsilon s_\varepsilon' = \varepsilon c_\varepsilon$  est une primitive de  $s_\varepsilon$ .

**Lemme 1.14** La suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie la relation de récurrence :

$$f_0 = s_\varepsilon, \quad f_1 = \varepsilon(xc_\varepsilon - s_\varepsilon), \tag{1.4}$$

$$\forall n \geq 2, \quad f_n = \varepsilon(x^2 f_{n-2} - (2n-1)f_{n-1}). \tag{1.5}$$

**Démonstration.** Une intégration par parties donne, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$f_1(x) = \int_0^x ts_\varepsilon(t) dt = \varepsilon(xc_\varepsilon(x) - s_\varepsilon(x))$$

et :

$$f_2(x) = \int_0^x tf_1(t) dt = \varepsilon \left( \int_0^x t^2 c_\varepsilon(t) dt - f_1(x) \right).$$

Une autre intégration par parties donne :

$$\int_0^x t^2 c_\varepsilon(t) dt = x^2 s_\varepsilon(x) - 2 \int_0^x ts_\varepsilon(t) dt = x^2 s_\varepsilon(x) - 2f_1(x)$$

et donc :

$$f_2(x) = \varepsilon(x^2 f_0(x) - 3f_1(x)).$$

La relation (1.5) est donc vérifiée pour  $n = 2$ . En la supposant vérifiée jusqu'à l'ordre  $n$ , on a pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x tf_n(t) dt = \varepsilon \left( \int_0^x t^3 f_{n-2}(t) dt - (2n-1)f_n(x) \right)$$

et une intégration par parties donne :

$$\int_0^x t^3 f_{n-2}(t) dt = x^2 f_{n-1}(x) - 2f_n(x),$$

donc :

$$f_{n+1}(x) = \varepsilon (x^2 f_{n-1}(x) - (2n+1) f_n(x)),$$

c'est-à-dire que la relation (1.5) est vérifiée à l'ordre  $n+1$ . ■

**Lemme 1.15** *Il existe un unique couple  $(P_n, Q_n)$  de polynômes à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  de degré inférieur ou égal à  $n$  tel que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n = Q_n s_\varepsilon - P_n c_\varepsilon. \quad (1.6)$$

**Démonstration.** La relation (1.6) est vérifiée pour  $n=0$  et  $n=1$  avec :

$$\begin{cases} Q_0 = 1, & P_0 = 0, \\ Q_1 = -\varepsilon, & P_1 = -\varepsilon x. \end{cases}$$

En supposant le résultat vrai jusqu'à l'ordre  $n-1$  pour  $n \geq 2$  on déduit de la récurrence (1.5) que  $f_n = Q_n s_\varepsilon - P_n c_\varepsilon$  avec :

$$\begin{cases} Q_n = \varepsilon (x^2 Q_{n-2} - (2n-1) Q_{n-1}), \\ P_n = \varepsilon (x^2 P_{n-2} - (2n-1) P_{n-1}) \end{cases} \quad (1.7)$$

et  $P_n, Q_n$  sont des polynômes à coefficients entiers de degré au plus  $n$  si chaque  $P_k$  et  $Q_k$  est un polynôme à coefficients entiers de degré au plus  $k$  pour  $k$  dans  $\{n-1, n-2\}$ .

On a donc ainsi prouvé l'existence du couple  $(P_n, Q_n)$ .

Pour l'unicité il suffit de prouver que si  $P$  et  $Q$  sont deux polynômes à coefficients réels tels que  $Q s_\varepsilon - P c_\varepsilon = 0$  alors  $P = Q = 0$ .

Pour  $\varepsilon = 1$  on a  $s_\varepsilon = \text{sh}$ ,  $c_\varepsilon = \text{ch}$  et  $Q s_\varepsilon - P c_\varepsilon = 0$  équivaut à :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) \frac{e^x - e^{-x}}{2} - P(x) \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 0,$$

soit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (Q(x) - P(x)) e^x - (Q(x) + P(x)) e^{-x} = 0.$$

En faisant tendre  $x$  vers  $+\infty$  on déduit que nécessairement  $P - Q = 0$  puis  $P + Q = 0$  et  $P = Q = 0$ .

Pour  $\varepsilon = -1$  on a  $s_\varepsilon = \sin$ ,  $c_\varepsilon = \cos$  et  $Q s_\varepsilon - P c_\varepsilon = 0$  équivaut à :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) \sin(x) - P(x) \cos(x) = 0.$$

On a alors  $P(2k\pi) = 0$  pour tout entier  $k$  et nécessairement  $P = 0$  puis  $Q = 0$ . ■

**Lemme 1.16** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  le polynôme  $P_n$  est impair, le polynôme  $Q_n$  est pair.*

**Démonstration.** Les propriétés de parités de  $P_n$  et  $Q_n$  se déduisent immédiatement de (1.7). ■

Les polynômes  $P_n$  et  $Q_n$  peuvent donc se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} P_n(x) = x R_n(x^2), \\ Q_n(x) = S_n(x^2), \end{cases}$$

où  $R_n$  et  $S_n$  sont des polynômes à coefficients entiers de degré inférieur ou égal à  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ .

**Lemme 1.17** Pour  $\varepsilon = 1$  on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x > 0, \quad 0 < f_n(x) \leq \frac{x^{2n}}{2^n n!} \operatorname{sh}(x) \quad (1.8)$$

et pour  $\varepsilon = -1$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[ , \quad 0 < f_n(x) \leq \frac{x^{2n}}{2^n n!} \sin(x). \quad (1.9)$$

**Démonstration.** Pour  $\varepsilon = 1$  et  $x > 0$  on a :

$$0 < f_0(x) = \operatorname{sh}(x),$$

$$0 < f_1(x) = \int_0^x t \operatorname{sh}(t) dt \leq \operatorname{sh}(x) \int_0^x t dt = \operatorname{sh}(x) \frac{x^2}{2}$$

et en supposant (1.8) vérifiée pour  $n \geq 1$  on a :

$$0 < f_{n+1}(x) = \int_0^x t f_n(t) dt \leq \operatorname{sh}(x) \int_0^x \frac{t^{2n+1}}{2^n n!} dt = \operatorname{sh}(x) \frac{x^{2(n+1)}}{2^{n+1} (n+1)!}.$$

On procède de même dans le où  $\varepsilon = -1$  en utilisant la croissance de la fonction sin sur l'intervalle  $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$ . ■

**Théorème 1.12** Pour tout  $r \in \mathbb{Q}_+^*$ ,  $\frac{\operatorname{th}(\sqrt{r})}{\sqrt{r}}$  est irrationnel et pour tout  $r$  dans  $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right[ \cap \mathbb{Q}$ ,  $\frac{\tan(\sqrt{r})}{\sqrt{r}}$  est irrationnel.

**Démonstration.** De ce qui précède on déduit que pour  $\varepsilon = 1$  on a, pour  $x > 0$  et  $n \in \mathbb{N}$  :

$$0 < f_n(x) = S_n(x^2) \operatorname{sh}(x) - x R_n(x^2) \operatorname{ch}(x) \leq \frac{x^{2n}}{2^n n!} \operatorname{sh}(x)$$

et donc :

$$\forall x > 0, \quad 0 < S_n(x) \frac{\operatorname{th}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} - R_n(x) \leq \frac{x^n}{2^n n!} \frac{\operatorname{th}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}.$$

En notant  $m \leq \frac{n}{2}$  le plus grand des degrés de  $R_n$  et  $S_n$  on peut écrire pour  $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+^*$  :

$$S_n\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{q_n}{q^p}, \quad R_n\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p_n}{q^p},$$

avec  $p_n$  et  $q_n$  entiers. On a alors :

$$0 < q_n \frac{\operatorname{th}(\sqrt{r})}{\sqrt{r}} - p_n \leq \frac{1}{q^{n-p}} \frac{p^n}{2^n n!} \frac{\operatorname{th}(\sqrt{r})}{\sqrt{r}} \leq \frac{p^n}{2^n n!} \frac{\operatorname{th}(\sqrt{r})}{\sqrt{r}},$$

avec  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p^n}{2^n n!} = 0$ . Le théorème 1.5 permet alors de conclure à l'irrationalité de  $\frac{\operatorname{th}(\sqrt{r})}{\sqrt{r}}$ .

Le cas  $\frac{\tan(\sqrt{r})}{\sqrt{r}}$  ( $\varepsilon = -1$ ) avec  $r \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[ \cap \mathbb{Q}$  se traite de la même manière. ■

## 1.8 Irrationalité des racines des fonctions de Bessel d'indice entier

Pour ce paragraphe,  $p$  désigne un entier naturel.

On désigne par  $(U_{n,p})_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de fonctions polynomiales définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad U_{n,p}(x) = \frac{x^{n+p}(1-x)^n}{n!}$$

et par  $(L_{n,p})_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de fonctions définies sur  $\mathbb{R}^*$  par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad L_{n,p}(x) = \frac{1}{x^p} U_{n,p}^{(n)}(x).$$

**Lemme 1.18** *Pour tout entier naturel  $n$ ,  $L_{n,p}$  est une fonction polynomiale à coefficients entiers relatifs et de degré égal à  $n$ .*

**Démonstration.** On a :

$$L_{n,p}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k C_{p+n+k}^n x^k.$$

■

**Lemme 1.19** *Pour tout entier naturel  $n$ , on a :*

$$\begin{cases} L_{n,p}(1) = (-1)^n, \\ L'_{n,p}(1) = (-1)^n n(p+n+1). \end{cases}$$

**Démonstration.** En écrivant que :

$$U_{n,p}(x) = \frac{(1-x)^n}{n!} (1 - (1-x))^{n+p} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{n!} C_{p+n}^k (1-x)^{n+k},$$

on déduit que :

$$U_{n,p}^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k+n}}{n!} C_{p+n}^k \frac{(n+k)!}{k!} (1-x)^k$$

et :

$$U_{n,p}^{(n)}(1) = (-1)^n, \quad U_{n,p}^{(n+1)}(1) = (-1)^n (p+n)(n+1).$$

Ce qui entraîne :

$$\begin{cases} L_{n,p}(1) = U_{n,p}^{(n)}(1) = (-1)^n, \\ L'_{n,p}(1) = U_{n,p}^{(n+1)}(1) - p U_{n,p}^{(n)}(1) = (-1)^n n(p+n+1). \end{cases}$$

■

**Lemme 1.20** *La série entière de terme général  $\frac{1}{k!(p+k)!} x^k$  a un rayon de convergence infini.*

**Démonstration.** La vérification est immédiate en utilisant le critère de d'Alembert. ■

On définit la fonction  $I_p$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad I_p(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k! (p+k)!} x^k$$

et la fonction de Bessel d'indice  $p$  est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad I_p(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! (p+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2k} = \left(\frac{x}{2}\right)^p I_p\left(-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right).$$

**Lemme 1.21** La fonction  $I_p$  est solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle :

$$(x^{p+1}y'(x))' = x^p y(x). \quad (1.10)$$

**Démonstration.** On a :

$$x^{p+1}I_p'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)! (p+k)!} x^{p+k}$$

et :

$$(x^{p+1}I_p'(x))' = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)! (p+k-1)!} x^{p+k-1} = x^p I_p(x).$$

■

**Lemme 1.22** Pour tout réel  $x$ , on a :

$$\int_0^x t^p I_p(t) dt = x^{p+1} I_p'(x).$$

**Démonstration.** Résulte immédiatement du lemme 1.21. ■

**Lemme 1.23** Pour tout entier  $k$  strictement positif, il existe deux fonctions polynomiales à coefficients entiers relatifs  $A_{k,p}$  et  $B_{k,p}$ , de degrés respectifs  $k-1$  et  $k$  telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x t^{p+k} I_p(t) dt = x^{p+1} (A_{k,p}(x) I_p(x) + B_{k,p}(x) I_p'(x)).$$

**Démonstration.** On procède par récurrence sur l'entier  $k \geq 1$ .

Pour  $k=1$ , une première intégration par parties donne :

$$\int_0^x t^{p+1} I_p(t) dt = \int_0^x t (t^{p+1} I_p'(t))' dt = x^{p+2} I_p'(x) - \int_0^x t^{p+1} I_p'(t) dt,$$

puis avec une deuxième intégration par parties :

$$\int_0^x t^{p+1} I_p'(t) dt = x^{p+1} I_p(x) - (p+1) \int_0^x t^p I_p(t) dt.$$

En utilisant le lemme 1.22, on aboutit à :

$$\int_0^x t^{p+1} I_p(t) dt = x^{p+1} (A_{1,p}(x) I_p(x) + B_{1,p}(x) I_p'(x)),$$

avec :

$$\begin{cases} A_{1,p}(x) = -1, \\ B_{1,p}(x) = (p+1) + x. \end{cases}$$

En supposant le résultat acquis pour  $k \geq 1$ , une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \int_0^x t^{p+k+1} I_p(t) dt &= \int_0^x t^{k+1} (t^{p+1} I_p'(t))' dt \\ &= x^{p+k+2} I_p'(x) - (k+1) \int_0^x t^{p+k+1} I_p'(t) dt, \end{aligned}$$

avec :

$$\int_0^x t^{p+k+1} I_p'(t) dt = x^{p+k+1} I_p(x) - (p+k+1) \int_0^x t^{p+k} I_p(t) dt.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on aboutit à :

$$\int_0^x t^{p+k+1} I_p(t) dt = x^{p+1} (A_{k+1,p}(x) I_p(x) + B_{k+1,p}(x) I_p'(x)),$$

avec :

$$\begin{cases} A_{k+1,p}(x) = (k+1) ((p+k+1) A_{k,p}(x) - x^k), \\ B_{k+1,p}(x) = (k+1) (p+k+1) B_{k,p}(x) + x^{k+1}, \end{cases}$$

la fonction  $A_{k+1,p}$  [resp.  $B_{k+1,p}$ ] étant polynomiale à coefficients entiers relatifs de degré égal à  $k$  [resp.  $k+1$ ]. ■

**Remarque 1.8** *Le coefficient de  $x^{k-1}$  dans  $A_{k,p}$  est égal à  $-k$  et le coefficient de  $x^k$  dans  $B_{k,p}$  est égal à 1.*

**Remarque 1.9** *Avec  $A_{k+1,p}(0) = (k+1)(p+k+1)A_{k,p}(0)$  et  $A_{1,p}(0) = -1$ , on déduit que le coefficient constant dans  $A_{k,p}$  est :*

$$A_{k,p}(0) = -\frac{k!(p+k)!}{(p+1)!}.$$

*De même, avec  $B_{k+1,p}(0) = (k+1)(p+k+1)B_{k,p}(0)$  et  $B_{1,p}(0) = p+1$ , on déduit que le coefficient constant dans  $B_{k,p}$  est :*

$$B_{k,p}(0) = \frac{k!(p+k)!}{p!}.$$

On définit la suite de fonctions  $(R_{n,p})_{n \in \mathbb{N}}$  par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad R_{n,p}(x) = x^n \int_0^1 I_p(xt) L_{n,p}(t) t^p dt.$$

**Lemme 1.24** *Pour tout entier  $n$  strictement positif, il existe deux fonctions polynomiales à coefficients entiers relatifs  $P_{n,p}$  et  $Q_{n,p}$ , de degrés respectifs  $n-1$  et  $n$  telles que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad R_{n,p}(x) = P_{n,p}(x) I_p(x) + Q_{n,p}(x) I_p'(x).$$

**Démonstration.** On a  $L_{n,p}(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ , avec  $a_k \in \mathbb{Z}$  pour tout entier  $k$  compris entre 0 et  $n$ . On peut donc écrire :

$$R_{n,p}(x) = x^n \sum_{k=0}^n a_k \int_0^1 I_p(xt) t^{p+k} dt.$$

Pour  $x$  non nul, le changement de variable  $u = xt$  donne :

$$x^n \int_0^1 I_p(xt) t^{p+k} dt = x^{n-p-k-1} \int_0^x I_p(u) u^{p+k} du.$$

En utilisant le lemme 1.23, on a :

$$x^n \int_0^1 I_p(xt) t^{p+k} dt = x^{n-k} (A_{k,p}(x) I_p(x) + B_{k,p}(x) I'_p(x))$$

et :

$$R_{n,p}(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^{n-k} (A_{k,p}(x) I_p(x) + B_{k,p}(x) I'_p(x)),$$

ce qui s'écrit aussi :

$$R_{n,p}(x) = P_{n,p}(x) I_p(x) + Q_{n,p}(x) I'_p(x),$$

en posant :

$$\begin{cases} P_{n,p}(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^{n-k} A_{k,p}(x), \\ Q_{n,p}(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^{n-k} B_{k,p}(x). \end{cases}$$

Par continuité le résultat est encore vrai pour  $x = 0$ .

La fonction  $P_{n,p}$  [resp.  $Q_{n,p}$ ] est polynomiale à coefficients entiers relatifs de degré inférieur ou égal à  $n - 1$  [resp.  $n$ ].

Le coefficient de  $x^{n-1}$  dans  $P_{n,p}$  est donné par :

$$\alpha_{n-1} = - \sum_{k=0}^n k a_k = -L'_{n,p}(1) = (-1)^{n+1} n (p + n + 1)$$

et le coefficient de  $x^n$  dans  $Q_{n,p}$  est donné par :

$$\beta_{n-1} = \sum_{k=0}^n a_k = L_{n,p}(1) = (-1)^n.$$

Le polynôme  $P_{n,p}$  [resp.  $Q_{n,p}$ ] est donc bien de degré égal à  $n - 1$  [resp.  $n$ ]. ■

**Remarque 1.10** *Le coefficient constant de  $P_{n,p}$  est :*

$$P_{n,p}(0) = a_n A_{n,p}(0) = -a_n \frac{n! (p+n)!}{(p+1)!}$$

*et le coefficient constant de  $Q_{n,p}$  est :*

$$Q_{n,p}(0) = a_n B_{n,p}(0) = a_n \frac{n! (p+n)!}{p!}.$$

**Lemme 1.25** Pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad R_{n,p}(x) = (-1)^n x^{2n} \int_0^1 I_p^{(n)}(xt) U_{n,p}(t) dt. \quad (1.11)$$

**Démonstration.** En utilisant la formule d'intégration par parties itérée on a :

$$\begin{aligned} R_{n,p}(x) &= x^n \left[ \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{\partial^{n-k}}{\partial t^{n-k}} (I_p(xt)) U_{n,p}^{(k-1)}(t) \right]_0^1 \\ &\quad + (-1)^n x^n \int_0^1 \frac{\partial^n}{\partial t^n} (I_p(xt)) U_{n,p}(t) dt \end{aligned}$$

et en considérant que 0 et 1 sont racines d'ordre  $n$  de  $U_{n,p}$ , on obtient :

$$R_{n,p}(x) = (-1)^n x^{2n} \int_0^1 I_p^{(n)}(xt) U_{n,p}(t) dt. \quad \blacksquare$$

**Lemme 1.26** Pour tout entier naturel  $n$  et tout réel  $x$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_{n,p}(x) = 0$ .

**Démonstration.** Pour tout réel  $x$ , on a :

$$I_p^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(k-n)!(p+k)!} x^{k-n}$$

et :

$$|I_p^{(n)}(x)| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(k-n)!} |x|^{k-n} = e^{|x|}.$$

Avec le lemme 1.25, on déduit alors que :

$$\begin{aligned} |R_{n,p}(x)| &\leq \frac{x^{2n} e^{|x|}}{n!} \int_0^1 t^{n+p} (1-t)^n dt \\ &\leq \frac{x^{2n} e^{|x|}}{n!} \int_0^1 (t(1-t))^n dt \leq \frac{e^{|x|}}{n!} \left( \frac{x^2}{4} \right)^n. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Il en résulte que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_{n,p}(x) = 0$ . ■

**Lemme 1.27** Pour tout entier  $n$  strictement positif, il existe une constante non nulle  $c_{n,p}$  telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_{n-1,p}(x) Q_{n,p}(x) - P_{n,p}(x) Q_{n-1,p}(x) = c_{n,p} x^{2n-2}.$$

**Démonstration.** On pose :

$$D_{n,p}(x) = P_{n-1,p}(x) Q_{n,p}(x) - P_{n,p}(x) Q_{n-1,p}(x).$$

La fonction  $D_{n,p}$  est polynomiale de degré inférieur ou égal à  $2n-2$ .

En éliminant  $I_p(x)$  dans le système :

$$\begin{cases} R_{n-1,p}(x) = P_{n-1,p}(x) I_p(x) + Q_{n-1,p}(x) I_p'(x), \\ R_{n,p}(x) = P_{n,p}(x) I_p(x) + Q_{n,p}(x) I_p'(x), \end{cases}$$

on obtient :

$$D_{n,p}(x) I'_p(x) = P_{n-1,p}(x) R_{n,p}(x) - P_{n,p}(x) R_{n-1,p}(x).$$

Et avec l'égalité (1.11), on déduit que  $D_{n,p}(x) I'_p(x)$  est divisible par  $x^{2n-2}$ . Comme  $I'_p(0)$  est non nul, il en résulte que  $D_{n,p}(x)$  est divisible par  $x^{2n-2}$ . On a donc  $D_{n,p}(x) = c_{n,p} x^{2n-2}$ , la constante étant donnée par :

$$c_{n,p} = -(p + 2n).$$

■

**Lemme 1.28** *Pour tout entier  $n$  strictement positif et tout réel non nul  $x$  tel que  $I'_p(x)$  soit non nul, l'une des deux quantités  $R_{n,p}(x)$  ou  $R_{n-1,p}(x)$  est non nulle.*

**Démonstration.** En reprenant les calculs du lemme 1.27, pour  $x$  tel que  $R_{n,p}(x) = 0$  et  $R_{n-1,p}(x) = 0$ , on a  $D_{n,p}(x) I'_p(x) = 0$ , avec  $D_{n,p}(x) = c_{n,p} x^{2n-2}$  non nul pour  $x$  non nul. On a donc nécessairement  $I'_p(x) = 0$ . ■

**Lemme 1.29** *Les racines de la fonctions  $I_p$  sont toutes simples.*

**Démonstration.** Supposons qu'il existe  $x_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $I_p(x_0) = I'_p(x_0) = 0$ . Les coefficients de la série entière définissant la fonction  $I_p$  étant tous strictement positifs, on a nécessairement  $x_0 < 0$ . En utilisant l'équation différentielle (1.10) on déduit que la fonction  $I_p$  est identiquement nulle sur l'intervalle  $]-\infty, 0[$  (théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire) et par continuité on aurait  $I_p(0) = 0$ , ce qui est faux. En conséquence un tel  $x_0$  ne peut exister et les zéros de  $I_p$  sont simples. ■

**Remarque 1.11** *On peut montrer que l'ensemble des zéros de la fonction  $I_p$  forme une suite strictement décroissante de réels strictement négatifs.*

**Théorème 1.13** *Les racines de la fonction  $I_p$  sont toutes irrationnelles.*

**Démonstration.** Supposons que la fonction  $I_p$  admette une racine rationnelle  $r = \frac{a}{b}$  avec  $a$  entier négatif et  $b$  entier naturel non nul. On a alors  $I'_p(r) \neq 0$  et  $R_{n,p}(r) = Q_{n,p}(r) I'_p(r)$ . L'inégalité (1.12) donne alors :

$$|Q_{n,p}(r)| \leq \frac{e^{|r|}}{|I'_p(r)| n!} \left( \frac{r^2}{4} \right)^n.$$

Le polynôme  $Q_{n,p}$  étant à coefficients entiers relatifs de degré  $n$ , on peut écrire  $Q_{n,p}(r) = \frac{q_n}{q^n}$  avec  $q_n$  entier relatif et on a les inégalités :

$$\forall n > 0, \quad |q_n| \leq \frac{e^{|r|}}{|I'_p(r)| n!} \left( \frac{p^2}{4q} \right)^n.$$

On déduit alors que la suite d'entiers  $(q_n)_{n>0}$  a une limite nulle à l'infini, elle est donc constante égale à 0 à partir d'un certain rang, c'est-à-dire qu'il existe un entier  $n_0$  tel que :

$$\forall n \geq n_0, \quad q_n = 0.$$

Avec  $R_{n,p}(r) = Q_{n,p}(r) I'_p(r) = \frac{q_n}{q^n} I'_p(r)$ , on déduit alors que :

$$\forall n \geq n_0, \quad R_{n,p}(r) = 0,$$

avec  $r$  non nul et  $I'_p(r) \neq 0$ , ce qui contredit le résultat du lemme 1.28.

En conclusion  $I_p$  n'a pas de racine rationnelle. ■

**Corollaire 1.6** *Pour toute racine  $\alpha$  de la fonction de Bessel  $J_p$ ,  $\alpha^2$  est irrationnel.*

## 1.9 Exercices

**Exercice 1.1** Montrer que, pour tout nombre rationnel non nul  $r$ , l'ensemble  $\{\cos(nr) \mid n \in \mathbb{N}\}$  est dense dans  $[-1, 1]$ .

**Solution 1.1** Si  $r$  est un rationnel non nul alors le groupe  $H = 2\pi\mathbb{Z} + r\mathbb{Z}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ . En effet si ce groupe est discret il est de la forme  $\mathbb{Z}\alpha$  avec  $\alpha$  non nul et il existe des entiers relatifs non nuls  $p, q$  tels que  $r = p\alpha$ ,  $2\pi = q\alpha$  ( $r$  et  $2\pi$  sont dans  $H$  et non nuls) ce qui entraîne  $\frac{2\pi}{r} = \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}$  et  $2\pi = r\frac{q}{p} \in \mathbb{Q}$  ce qui est faux.

Avec la continuité et la surjectivité de l'application  $f : x \mapsto \cos(rx)$  de  $\mathbb{R}$  sur  $[-1, 1]$ , on déduit alors que l'ensemble :

$$f(H) = \{\cos(2\pi m + nr) \mid (m, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\} = \{\cos(nr) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

( $2\pi$ -périodicité et parité de la fonction  $\cos$ ) est dense dans  $[-1, 1]$ .

**Exercice 1.2** Montrer l'irrationalité du nombre  $e$  en utilisant le théorème 1.5.

**Solution 1.2** En écrivant que  $e = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!}$  on pose :

$$p_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}, \quad q_n = n!$$

et on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$q_n e - p_n = n! \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{n+1} \left( 1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(n+2) \cdots (n+k)} \right),$$

avec :

$$\forall k \geq 2, \quad \frac{1}{(n+2) \cdots (n+k)} \leq \frac{1}{k!}.$$

On déduit donc que :

$$0 < q_n e - p_n \leq \frac{1}{n+1} e \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et l'irrationalité de  $e$  s'en déduit.

**Exercice 1.3** Avec les notations du paragraphe 1.6, calculer  $\int_0^1 V_{2n+1}(t) dt$ , pour tout entier naturel  $n$ .

**Solution 1.3** On note  $W_{2n+1}$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$W_{2n+1}(x) = V_{2n+1}(x+1) = -\frac{x^{2n+1}(1-x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Le changement de variable  $t = u + 1$  donne :

$$\int_0^1 V_{2n+1}(t) dt = \int_{-1}^0 W_{2n+1}(u) du = \frac{1}{(2n+1)!} \int_0^1 u^{2n+1} (1-u^2)^{2n+1} du.$$

Le changement de variable  $t = u^2$  donne :

$$\int_0^1 u^{2n+1} (1 - u^2)^{2n+1} du = \frac{1}{2} \int_0^1 t^n (1 - t)^{2n+1} dt.$$

Puis par intégrations par parties itérées, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^n (1 - t)^{2n+1} dt &= \frac{n!}{(3n+1)!} \int_0^1 (t^{3n+1})^{(2n+1)} (1 - t)^{2n+1} dt \\ &= \frac{n!}{(3n+1)!} \int_0^1 t^{3n+1} ((1 - t)^{2n+1})^{(2n+1)} dt = \frac{n! (2n+1)!}{(3n+2)!}. \end{aligned}$$

Ce qui donne, en définitive :

$$\int_0^1 V_{2n+1}(t) dt = \frac{n!}{2(3n+2)!}.$$

**Exercice 1.4** Avec les notations du paragraphe 1.6, pour  $\varepsilon = -1$ , montrer que pour tout réel  $t$  strictement positif,  $Q_n(t)$  est non nul.

**Solution 1.4** On a :

$$\begin{aligned} Q_n(t) &= - \sum_{j=n+1}^{3n+2} (-1)^j V_{2n+1}^{(2j-1)}(1) t^{3n+2-j} \\ &= - \sum_{j=n+1}^{3n+2} (-1)^j \frac{(-1)^{j-n} (2j-1)!}{(2n+1)!} C_{2n+1}^{j-1-n} t^{3n+2-j} \\ &= (-1)^{n+1} \sum_{j=n+1}^{3n+2} \frac{(2j-1)!}{(2n+1)!} C_{2n+1}^{j-1-n} t^{3n+2-j} \end{aligned}$$

et :

$$\forall t > 0, \quad |Q_n(t)| = \sum_{j=n+1}^{3n+2} \frac{(2j-1)!}{(2n+1)!} C_{2n+1}^{j-1-n} t^{3n+2-j} > 0.$$

# Bibliographie

- [1] R. ANDRE-JEANNIN — *Quelques propriétés de  $\text{th}(x)$* . Revue de Mathématiques Spéciales (Juin 1987)
- [2] D. BERTRAND — *Equations différentielles linéaires et analyse diophantienne*. Cours de D. E. A. (I. H. P. 1982)
- [3] F. BEUKERS — *Legendre polynomials in irrationality proofs*. Bull. Austr. Math. Soc. Vol. 22
- [4] I. NIVEN — *Irrational numbers*. The Carus Mathematical Monographs (1956)
- [5] P. SAMUEL — *Théorie algébrique des nombres*. Hermann (1971)